



MATEMATICA alla SAPIENZA

i matematici del Castelnuovo e dello
SBAI presentano le loro ricerche

Sunti degli interventi

(versione: 8 febbraio 2015)

La Geometria al Castelnuovo

Enrico ARBARELLO

Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Si illustreranno vari filoni di ricerca in Geometria del Dipartimento Castelnuovo, se ne descriveranno i mutui intrecci, le origini storiche, e le prospettive.

Partendo dai semigrupperi numerici

Valentina BARUCCI

Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Un semigruppero numerico è un sottoinsieme additivamente chiuso dei numeri naturali contenete lo 0 e con complemento finito in \mathbb{N} . Esistono numerosi risultati e congetture sui semigrupperi numerici (cf. ad esempio J.C. Rosales, P.A. García Sánchez, "Numerical Semigroups", Springer 2009), ma quello che vorrei esporre è come alcune nozioni nate nell'ambito dei semigrupperi numerici abbiano avuto sviluppi in ambiti molto più generali dell'algebra commutativa.

La legge di Fick per un gas di Lorentz in un regime di bassa densità

Giada BASILE

Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Il gas di Lorentz è un modello microscopico relativamente semplice da cui ottenere le equazioni macroscopiche che descrivono il trasporto di massa. Si tratta di un gas di particelle "leggere" non interagenti che si muovono in una distribuzione aleatoria di ostacoli fissi. Consideriamo il problema stazionario per il gas di Lorentz a contatto con due serbatoi di particelle a densità diverse, in un regime di bassa densità di ostacoli. Dimostriamo quindi che esiste un'unica soluzione stazionaria per la dinamica microscopica che converge al profilo lineare di densità di massa. Nello stesso regime la corrente macroscopica nello stato stazionario soddisfa la legge di Fick. (In collaborazione con Alessia Nota, Federica Pezzotti e Mario Pulvirenti).

*Equazioni completamente nonlineari:
proprietà qualitative delle soluzioni e problemi spettrali*

Isabeau BIRINDELLI

Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Farò una rassegna dei risultati recenti e dei problemi aperti riguardo le soluzioni di equazioni ellittiche completamente non lineari, considerando in particolare le questioni di regolarità, di

positività, approssimazioni con operatori non locali, e affrontando questioni che riguardano gli autovalori generalizzati.

*Problemi di evoluzione integro-differenziali lineari
e non-lineari: alcuni risultati recenti*

Sandra CARILLO

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria

Nel caso in cui le proprietà fisiche di un solido dipendano in modo essenziale non solo dallo *stato* del materiale stesso nell'istante considerato, ma anche dalla *storia*, cioè dall'evoluzione precedente, si parla di *materiale con memoria*. Il modello di materiale con memoria, dal punto di vista analitico, si traduce in equazioni integro-differenziali in cui il nucleo tiene conto della *storia*; il nucleo, in generale, gode di proprietà di regolarità che, recentemente, in collaborazione con V. Valente e G. Vergara Caffarelli, sono state rilassate per considerare anche il caso di nuclei singolari nell'origine atti a modellare ulteriori materiali. Il problema di un solido viscoelastico il modello, nel caso unidimensionale, in considerazione può essere scritto nella forma:

$$u_{tt} = G(0)u_{xx} + \int_0^t \dot{G}(t-\tau)u_{xx}(\tau)d\tau + f$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = u_1 \text{ in } \Omega; \quad u = 0 \text{ su } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T),$$

in cui, u rappresenta lo spostamento ed f la sollecitazione esterna, includendo in essa anche la *storia* passata. Nel caso *classico*, il modulo di rilassamento G soddisfa le proprietà

$$\dot{G} \in L^1(\mathbb{R}^+), \quad G(t) = G_0 + \int_0^t \dot{G}(s) ds, \quad G(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t)$$

ed è anche tale che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\tilde{a} = a(\varepsilon, E^t) \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni $a > \tilde{a}$,

$$\left| \int_0^\infty \dot{G}(s+a)E^t(s) ds \right| < \varepsilon.$$

Il problema *singolare* corrisponde ad imporre $G \in L^1(0, T)$ per ogni $T \in \mathbb{R}$ includendo, così anche il caso $\lim_{t \rightarrow 0^+} G(t) = +\infty$.

In ambito non lineare, alcune proprietà strutturali, quali la struttura Hamiltoniana e bi-Hamiltoniana, di equazioni nonlineari di evoluzione di tipo *solitonico* possono essere ottenute mediante l'applicazione di trasformazioni *reciproche* e di *Bäcklund*: alcuni esempi sono mostrati. In particolare, nuovi risultati, ottenuti in collaborazione con M. Lo Schiavo e C. Schiebold, riguardano proprietà di equazioni nonlineari di evoluzione di tipo *solitonico* nel caso non-commutativo che ha interessanti applicazioni e comprende il caso di equazioni in cui l'incognita è rappresentata da una funzione matriciale.

Equazione di Vlasov-Poisson con massa infinita

Guido CAVALLARO

Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Studiamo l'esistenza e unicità della soluzione dell'equazione di Vlasov-Poisson descrivente un plasma di particelle cariche dello stesso segno. Saranno presentati i casi in cui l'evoluzione avviene in tutto \mathbb{R}^3 , oppure in un cilindro illimitato, con un campo esterno confinante. Vengono presi in considerazione dati iniziali con massa infinita e con velocità limitate, oppure distribuite secondo una Maxwell-Boltzmann.

*Esclusione semplice asimmetrica in una striscia:
stima numerica del tempo di attraversamento*

Emilio CIRILLO

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria

Lo studio si propone di analizzare numericamente il tempo che una particella impiega per attraversare una striscia se la dinamica del sistema prevede l'esclusione semplice. La dinamica è asimmetrica e le particelle tendono a muoversi in una direzione preferenziale sia per la presenza di un campo esterno sia perchè il sistema è a contatto, ai capi della striscia, con serbatoi con diverse densità. L'obiettivo è quello di capire quale sia l'effetto degli spostamenti laterali sul tempo tipico di attraversamento. Effetti interessanti vengono osservati quando la differenza di densità tra i due serbatoi è piccola.

Lo studio è stato condotto in collaborazione con A. Muntean (Tu/e, Eindhoven), R. van Santen (TU/e, Eindhoven), A. Sengar (Indian Institute of Technology, Delhi).

Regola della catena non autonoma in BV e applicazioni

Virgina DE CICCIO

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria

In un lavoro recente in collaborazione con L. Ambrosio, G. Crasta and G. De Philippis è stata provata una regola della catena non autonoma nello spazio delle funzioni BV a variazione limitata del seguente tipo: si consideri la composizione

$$v(x) := F(x, u(x)),$$

con u funzione BV vettoriale e $F(x, z)$ funzione BV in x e globalmente Lipschitziana e di classe C^1 in z (con ragionevoli ipotesi di uniformità); allora $v \in BV$ e la derivata misura Dv può essere espressa tramite le derivate di u e di F .

Saranno presentate alcune applicazioni di questa formula:

- la semicontinuità inferiore per funzionali integrali con crescita lineare definiti in BV ;
- l'unicità per le soluzioni di leggi di conservazione con flusso discontinuo.

Saranno discussi anche possibili sviluppi nel seguente ambito:

- l'esistenza per le soluzioni di equazioni (stazionarie o evolutive) con parte principale 1-laplaciano. Problemi di questo tipo possono essere visti come caso limite per $p \rightarrow 1$ di problemi analoghi recentemente studiati per $p > 1$.

Approssimazione del movimento secondo curvatura media e applicazioni

Maurizio FALCONE

Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Il movimento di una interfaccia secondo la sua curvatura media è un problema ormai classico che ha una vasta letteratura e numerose applicazioni. Nella prima parte del seminario presenterò uno schema di approssimazione di tipo semi-Lagrangiano ed un risultato di convergenza. Come verrà illustrato in alcune simulazioni, lo schema si è dimostrato molto robusto anche in presenza di singolarità. Nella seconda parte presenterò alcune applicazioni di varianti di questo schema al trattamento delle immagini.

Lavori in collaborazione con E. Carlini e R. Ferretti.

*Flussi gradiente della variazione totale***Lorenzo GIACOMELLI***Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria*

Introdurrò alcune classi di equazioni paraboliche (anche degeneri e/o singolari) i cui prototipi si interpretano come flusso gradiente della variazione totale di una funzione. Il caso in cui tale funzione assume valori scalari presenta varie analogie con le leggi di conservazione, in particolare per quanto riguarda la formazione e l'evoluzione di singolarità. Il caso in cui tale funzione assume valori su una superficie (per esempio una sfera) è un ambito poco esplorato nella teoria delle equazioni alle derivate parziali, con molte questioni aperte. In questo quadro, illustrerò informalmente la struttura dei problemi, alcuni risultati recenti e le attuali direzioni di ricerca.

*Comportamento asintotico di modelli microscopici e macroscopici
utilizzati nello studio della conduzione elettrica nei tessuti biologici*

Roberto GIANNI*Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria*

La conduzione elettrica nei tessuti viventi è stata fatta oggetto di molti studi in anni recenti, ciò a causa del ruolo che essa gioca nella sviluppo di nuovi metodi diagnostici basati su tecniche di bioimpedenziometria elettrica. Al fine di produrre modelli atti a descriverla l'influenza dei campi magnetici viene, in genere, trascurata. Quindi, utilizzando le equazioni di Maxwell, vengono ottenuti sistemi di equazioni che descrivono l'evoluzione del potenziale del campo elettrico sia nelle cellule sia nel materiale extracellulare, nonché le equazioni di accoppiamento attraverso la membrana cellulare. Il nostro gruppo di ricerca ha sviluppato sia modelli microscopici sia, tramite metodi di omogeneizzazione, modelli macroscopici. L'utilizzo di tecniche di omogeneizzazione è reso necessario dal fatto che il gran numero di cellule coinvolte richiede e giustifica un tale approccio.

In questo seminario presenteremo alcuni risultati ed alcuni problemi aperti riguardanti il comportamento asintotico di entrambi i nostri modelli quando un dato al contorno periodico è assegnato ed il tempo tende all'infinito. Mostreremo che il caso in cui le membrane cellulari dispiegano un comportamento resistivo nonlineare è fondamentalmente diverso da quello in cui tale comportamento è assente o è lineare. In conseguenza di ciò, nel caso nonlineare, i risultati dai noi ottenuti sono più deboli (in particolare non siamo in grado di dimostrare una decadenza asintotica esponenziale, ottimale ad un ciclo limite) e non siamo capaci né di migliorarli né di dimostrarne l'ottimalità.

Collaborazione con Micol Amar and Daniele Andreucci.

*15 anni di problemi frattali al contorno***Maria Rosaria LANCIA***Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria*

In questo seminario presenterò risultati e problemi aperti su alcuni problemi al contorno in domini frattali o in domini con frontiera frattale.

*Diffusione forward-backward e transizioni di fase***Corrado MASCIA***Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"*

Genericamente, una "transizione di fase" è il passaggio di un sistema da uno stato, con determinate caratteristiche fisiche, ad un altro, con caratteristiche significativamente diverse. Esistono molti approcci diversi per le transizioni di fase. Qui, verrà discusso quello basato su equazioni alle derivate parziali di tipo evolutivo, in cui si utilizzano equazioni di diffusione con funzioni di diffusione a monotonia variabile nell'incognita. A seconda della crescita/decrecita della funzione di diffusione, si assiste ad un meccanismo di espansione o di concentrazione. Di conseguenza, trascurando tutti gli altri eventuali termini, il corrispondente problema di Cauchy risulta essere mal-posto, così come avviene per l'equazione del calore all'indietro.

Si intende presentare come ritrovare la buona positura attraverso il recupero di termini di ordine superiore che regolarizzano l'equazione e che possiedono una precisa interpretazione fisica, descrivendo la corrispondente dinamica di propagazione delle transizioni di fase.

Alla tematica hanno contribuito in tempi, modalità e contenuti diversi, Alberto Tesi, Maria Michaela Porzio, Andrea Terracina e Flavia Smarrazzo (ex-post-doc ed ex-dottorato) e Bui Le Trong Thanh (ex-dottorato).

*Teoria di Lie al Castelnuovo***Paolo PAPI***Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"*

Darò una breve e informale rassegna di alcuni dei temi di ricerca in teoria di Lie (con particolare riguardo alle algebre vertice e alla teoria delle rappresentazioni) trattati in Dipartimento.

*Metodi numerici per l'elaborazione di dati***Francesca PITOLLI***Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria*

Negli anni recenti l'elaborazione dei dati ha acquistato una importanza sempre maggiore in vari settori della tecnologia, dalla medicina alla video sorveglianza, dalle reti di distribuzione di servizi al restauro digitale, solo per citarne alcuni. Per estrarre dai dati le informazioni di interesse è necessario avere a disposizione metodi numerici sofisticati e algoritmi efficienti. Presenteremo alcuni metodi da noi sviluppati per elaborare i dati relativi ad alcune applicazioni specifiche. Il lavoro è svolto in collaborazione con Vittoria Bruni e Laura Pezza.

*Modelli variazionali per singolarità topologiche in due dimensioni***Marcello PONSIGLIONE***Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"*

Vortici in sistemi di spin e dislocazioni nei cristalli sono esempi di singolarità topologiche in sistemi discreti. In questo seminario introdurrò modelli variazionali per descrivere tali singolarità topologiche nel discreto, le configurazioni ad energia minima, e la dinamica delle singolarità secondo il flusso gradiente del funzionale energia. Inoltre, discuterò il limite del parametro di scala discreto che tende a zero, ossia il passaggio dal discreto al continuo in tali modelli.

*L'influenza di Lie sulla ricerca e sulla didattica della matematica in Italia***Enrico ROGORA***Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"*

Le idee di Sophus Lie sulla geometria dello spazio dei getti e le applicazione all'analisi delle equazioni differenziali sono fortemente legate all'approccio caratteristico della scuola italiana di geometria algebrica di semplificare lo studio delle varietà attraverso l'immersione canonica negli iperspazi proiettivi. Scopo del seminario è quello di mettere in luce questo legame da un punto di vista storico e matematico e di sottolineare come il ruolo fondamentale della capacità di "saper vedere" nelle ricerche di Lie, Corrado Segre, Guido Castelnuovo e Federigo Enriques abbia profondamente influenzato le concezioni sulla didattica della matematica di Emma Castelnuovo e Bruno de Finetti .

*Varietà Riemanniane con flusso del calore costante***Alessandro SAVO***Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria*

Si consideri un dominio limitato, a bordo liscio, di una varietà Riemanniana. Studieremo la soluzione dell'equazione del calore sul dominio, con dato iniziale costante (ad esempio, uguale a 1), e condizioni al bordo di Dirichlet. Lo scopo di questo seminario è quello di studiare la geometria dei domini per i quali, per ogni valore fissato del tempo, la derivata normale della soluzione è costante sul bordo. Esprimeremo questo fatto dicendo che il dominio ha "flusso del calore costante". Negli spazi a curvatura costante esempi immediati di tali domini sono dati dalle palle geodetiche. Ci sono altri esempi? Possiamo classificare tali domini? Esamineremo tale questione e metteremo in relazione il problema con altri problemi sovradeterminati per il Laplaciano, come il problema di Serrin o quello di Schiffer.

*Problemi di raggiungibilità per equazioni integro-differenziali***Daniela SFORZA***Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria*

Si vogliono illustrare alcuni risultati di controllo riguardanti una classe di equazioni di evoluzione con memoria. Le equazioni integro-differenziali prese in esame trovano applicazione, ad esempio, nella teoria della viscoelasticità.

L'approccio seguito è basato sullo Hilbert Uniqueness Method (metodo dovuto a J.-L. Lions) e su tecniche di analisi non armonica. La discussione è centrata principalmente su alcune disuguaglianze di tipo Ingham, che rappresentano uno strumento fondamentale per ottenere le stime di osservabilità. In particolare, si mostra come superare alcune difficoltà collegate alla separazione tra gli autovalori del problema, aspetto essenziale per stabilire le disuguaglianze di Ingham.

I risultati presentati sono stati ottenuti in collaborazione con Paola Loreti.

*Formule di rappresentazione per sistemi di equazioni di Hamilton–Jacobi***Antonio SICONOLFI***Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"*

Si studiano sistemi di equazioni di Hamilton–Jacobi debolmente accoppiate di tipo periodico.

Si propongono formule di rappresentazione per sottosoluzioni massimali/soluzioni che generalizzano quelle note nel caso scalare. A questo scopo si utilizza in maniera cruciale una famiglia di misure di probabilità indotte dalla matrice d'accoppiamento nello spazio dei cammini càdlàg a valori in $\{1, \dots, M\}$, dove M è il numero delle equazioni del sistema.

Algebre PI: crescita delle codimensioni e variet minimali

Ernesto SPINELLI

Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Uno degli strumenti più significativi nello studio delle identità polinomiali di una data algebra si basa sulla descrizione dell'andamento asintotico della successione delle codimensioni. In questa presentazione discuteremo tale aspetto ed analizzeremo alcuni sviluppi nell'ambito delle algebre graduate.

Affidabilità dei sistemi e funzioni di aggregazione

Fabio SPIZZICHINO

Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Fissato un numero intero positivo n , consideriamo i seguenti oggetti: l'insieme $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ e l'insieme delle sue parti $2^{[n]} \equiv \{0, 1\}^n$, le funzioni $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, le funzioni di insieme $\alpha : 2^{[n]} \rightarrow [0, 1]$.

Si usa spesso il termine *fuzzy measure* per indicare il fatto che una tale funzione α è monotona non decrescente e tale che $\alpha(\mathbf{0}) = 0$, $\alpha(\mathbf{1}) = 1$ (cioè una *capacità*, specificamente definita su $2^{[n]}$).

Invece, negli stessi ambiti, il termine *funzione di aggregazione* viene usato per indicare che $A : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ è monotona non decrescente in ogni variabile e tale che $A(\mathbf{0}) = 0$, $A(\mathbf{1}) = 1$ (le *copule* sono particolari funzioni di aggregazione).

In diverse applicazioni emergono funzioni $R_{\alpha, A} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ della specifica forma

$$(1) \quad R_{\alpha, A}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{I \in 2^{[n]}} M_{\alpha}(I) \cdot A(\mathbf{x}_I),$$

dove A è una funzione di aggregazione, M_{α} indica la *Trasformata di Moebius* di una fuzzy measure α e $\mathbf{x}_I = (u_1, \dots, u_n)$ con

$$u_i = \begin{cases} x_i & \text{per } i \in I \\ 1 & \text{per } i \notin I \end{cases}$$

Sotto semplici condizioni su A , $R_{\alpha, A}$ è una funzione di aggregazione, che estende α da $\{0, 1\}^n$ a $[0, 1]^n$.

Dato un sistema affidabilistico di n componenti, indichiamo con $R(p_1, \dots, p_n)$ la funzione che associa l'affidabilità del sistema (ad un tempo $t > 0$ fissato) al vettore costituito dalle affidabilità "marginali" dei singoli componenti.

$R(p_1, \dots, p_n)$ è una funzione di aggregazione, che estende ϕ da $\{0, 1\}^n$ a $[0, 1]^n$, essendo ϕ la speciale fuzzy measure che descrive la *funzione di struttura* del sistema.

Si può scrivere $R(p_1, \dots, p_n)$ sotto la forma (1)? In caso, chi è la $A(\cdot)$? Che ruolo ha la forma di dipendenza stocastica fra i componenti del sistema?

Dare risposte a tali domande è abbastanza semplice nel caso di indipendenza; ma risulta, in generale, complesso nel caso di dipendenza. Nel seminario verranno date delle risposte da diversi punti di vista, corrispondenti a diversi metodi di descrizione della struttura logica del sistema.

*Modelli inferenziali Bayesiani con multiple priors***Barbara VANTAGGI***Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria*

Nel seminario verranno introdotti brevemente i principali interessi di ricerca dei docenti di Probabilità e Statistica Matematica del Dipartimento SBAl: Diffusioni frazionarie e anomale su domini regolari e irregolari, Campi aleatori sulla sfera, Preferenze e loro rappresentazioni mediante funzionali, Modelli grafici, Identificabilità di modelli con variabili latenti, Inferenza Bayesiana con multiple priors.

Si tratterà in particolare il problema dell' inferenza Bayesiana quando la prior non è unicamente elicitata, ma si considera una classe di probabilità. I modelli multiple priors trovano loro applicazione ad esempio, nei problemi decisionali in economia nonché nell'analisi della robustezza statistica.

Il problema sarà presentato in un contesto finitamente additivo, e verrà fornita una forma chiusa per gli involucri delle probabilità condizionali. Il ruolo dell'ipotesi di disintegrabilità verrà illustrato. Alcuni esempi verranno discussi.