Lower semicontinuous value fonctions for target control problems with state constraints

O. Bokanowski¹ N. Megdich² H. Zidani²

¹Laboratoir Jacques-Louis Lions, Paris 6 & 7

²ENSTA-Paris & INRIA (Projet Sydoco)

Minisymposium "Qualitative Methods for Hamilton-Jacobi Equations and Applications", Torino, 4th July 2006.

(4 同) (4 回) (4 回)

Outline



- Known results on control problem with state constraints
- Minimum time problem with state constraints
- 2 The HJB equation associated to our problem
 - Geometric approach. Contingent derivatives
 - A second approach. Viscosity notion
- 3 NUmerical test
- 4 Numerical example

Introduction The HJB equation associated to our problem NUmerical test

Numerical example

Known results Minimum time problem with state constraints

< 一 →

★ □ ► ★ □ ►

Outline



Introduction

- Known results on control problem with state constraints
- Minimum time problem with state constraints
- 2 The HJB equation associated to our problem
 - Geometric approach. Contingent derivatives
 - A second approach. Viscosity notion
- 3 NUmerical test
- Numerical example

Known results Minimum time problem with state constraints

Control problem with state constraints

$$\begin{aligned} v(T,x) &:= \operatorname{Min} \varphi(y_x(T)); \\ \begin{cases} \dot{y}_x(t) &= f(y_x(t), u(t)), \quad t > 0, \\ y_x(0) &= x, \end{cases} \end{aligned} \tag{1a} \\ u(t) &\in \mathcal{U} := L^\infty(0, +\infty; U) \text{ a.e. } t > 0 \text{(1b)} \\ y_x(T) &\in \mathcal{C}, \quad y_x(t) \in \mathcal{K} \text{ for } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

 $C \subset \mathcal{K}$ closed sets of \mathbb{R}^d ($C \neq \emptyset$), $U \subset \mathbb{R}^m$ a compact set, the functions $f : \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$ and $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ are Lipschitz, bounded, and f(x, U) is convex formany $\mathfrak{s} \in \mathbb{R}^d$.

Known results Minimum time problem with state constraints

Control problem with state constraints

$$\begin{aligned} v(T, x) &:= \operatorname{Min} \varphi(y_x(T)); \\ \begin{cases} \dot{y}_x(t) &= f(y_x(t), u(t)), \quad t > 0, \\ y_x(0) &= x, \end{cases} \end{aligned} \tag{1a} \\ u(t) &\in \mathcal{U} := L^\infty(0, +\infty; U) \text{ a.e. } t > 0 \text{(1b)} \\ y_x(T) &\in \mathcal{C}, \quad y_x(t) \in \mathcal{K} \text{ for } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

 $C \subset \mathcal{K}$ closed sets of \mathbb{R}^d ($C \neq \emptyset$), $U \subset \mathbb{R}^m$ a compact set, the functions $f : \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$ and $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ are Lipschitz, bounded, and f(x, U) is convex for any $x \in \mathbb{R}^d$.

O. Bokanowski, N. Megdich, H. Zidani Control problem with state constraints

Known results Minimum time problem with state constraints

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > .

Free state constraints ($\mathcal{K} = \mathcal{C} = \mathbb{R}^d$)

v is the unique bounded continuous viscosity solution of the HJB equation:

 $\partial_t V - H(x, D_x V(x)) = 0$ in $x \in \mathbb{R}^d$, t > 0 $V(x, 0) = \varphi(x)$ $x \in \mathbb{R}^d$,

where $H(x, D_x V(x)) = \min_{a \in U} (f(x, a) \cdot D_x V(x)).$

(Lions, Barles, Cappuzo-Dolcetta, ... etc)

Known results Minimum time problem with state constraints

・ロッ ・ 一 ・ ・ ー ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・

RDV problem ($\mathcal{K} = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$)

In this case, the value function v is the unique l.s.c. 'Bilateral' solution

 $\partial_t V - H(x, D_x V(x)) = 0$ in]0, $T[\times \mathbb{R}^d,$ $V(x, 0) = \varphi(x)\chi_c(x) \quad x \in \mathbb{R}^d,$

(Barron-Jensen, Frankowska, ...)

Known results Minimum time problem with state constraints

RDV problem ($\mathcal{K} = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$)

Bilateral solution: touching one side test function

Definition (Barron-Jensen, Frankowska)

A l.s.c. function v is a bilateral solution of the HJB equation, if

(i) for every $\phi \in C^1$ s. t. $u - \phi$ has a local minimum at $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+_*$,

$$\partial_t \phi(\mathbf{x},t) - H(\mathbf{x}, D_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x},t)) = 0,$$

(ii) $v(x,0) = \varphi(x)\chi_{\mathcal{C}}(x) = \liminf_{\substack{y \to x \\ t > 0+}} v(y,t),$

 $\forall \mathbf{v}$

Introduction

The HJB equation associated to our problem NUmerical test Numerical example

Known results Minimum time problem with state constraints

Known results State constraints ($\mathcal{K} = \mathcal{C}$)

• Inward qualification constraint:

 $min_{a\in U}f(x,a)\cdot\eta_x<0,\quad \forall x\in\partial\mathcal{K}$

v is continuous on K (Ishii-Koike, Soner, ...)
Outward qualification constraint:

$\sup_{\boldsymbol{a}\in U} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) \cdot \eta_{\boldsymbol{x}} > \boldsymbol{0}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial \mathcal{K}$

The value function is the unique l.s.c. viscosity solution of the HJB equation on int(\mathcal{K}) and supersolution on $\partial \mathcal{K}$.

(Frankowska, Vinter, Plaskasz)

O. Bokanowski, N. Megdich, H. Zidani Control problem with state constraints

Known results Minimum time problem with state constraints

Known results State constraints ($\mathcal{K} = \mathcal{C}$)

• Inward qualification constraint:

 $\textit{min}_{a \in U} f(x, a) \cdot \eta_x < 0, \quad \forall x \in \partial \mathcal{K}$

v is continuous on *K* and is the unique bounded continuous viscosity solution of the HJB equation on *K* (Ishii-Koike, Soner, ...)
Outward gualification constraint:

 $\sup_{a\in U} f(x,a) \cdot \eta_x > 0, \quad \forall x \in \partial \mathcal{K}$

The value function is the unique l.s.c.

viscosity solution of the HJB equation on a solution

O. Bokanowski, N. Megdich, H. Zidani

Control problem with state constraints

Known results Minimum time problem with state constraints

Known results State constraints ($\mathcal{K} = \mathcal{C}$)

• Inward qualification constraint:

 $\textit{min}_{a \in U} f(x, a) \cdot \eta_x < 0, \quad \forall x \in \partial \mathcal{K}$

v is continuous on *K* (Ishii-Koike, Soner, ...)
Outward qualification constraint:

$$\sup_{\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{U}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \cdot \eta_{\boldsymbol{x}} > \boldsymbol{0}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial \mathcal{K}$$

The value function is the unique l.s.c. viscosity solution of the HJB equation on int(\mathcal{K}) and supersolution on $\partial \mathcal{K}$. (Frankowska, Vinter, Plaskasz)

O. Bokanowski, N. Megdich, H. Zidani

Control problem with state constraints

Known results Minimum time problem with state constraints

< A >

★ □ ► ★ □ ►

Outline



Introduction

- Known results on control problem with state constraints
- Minimum time problem with state constraints
- 2 The HJB equation associated to our problem
 - Geometric approach. Contingent derivatives
 - A second approach. Viscosity notion
- 3 NUmerical test
- Numerical example

Known results Minimum time problem with state constraints

・ロッ ・ 一 ・ ・ ー ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・

э

Target problem with state constraints (\mathcal{P})

$$\begin{split} \vartheta(\mathcal{T}, \mathbf{x}) &:= \operatorname{Min} \Psi(\mathbf{y}_{\mathbf{x}}(\tau)); \\ \begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{y}_{\mathbf{x}}(t), u(t)), & t > 0, \\ \mathbf{y}_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}, \\ u(t) \in \mathcal{U} := L^{\infty}(0, +\infty; \mathcal{U}) \text{ a.e. } t > 0, \\ \tau \in [0, \mathcal{T}], \quad \mathbf{y}_{\mathbf{x}}(\tau) \in \mathcal{C}, \\ \mathbf{y}_{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{K} \text{ for } 0 \leq t \leq \tau. \end{split}$$

Known results Minimum time problem with state constraints

Target problem with state constraints (\mathcal{P})

$$\begin{split} \vartheta(\mathcal{T}, \mathbf{x}) &:= \operatorname{Min} \Psi(\mathbf{y}_{\mathbf{x}}(\tau)); \\ \begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{y}_{\mathbf{x}}(t), u(t)), & t > 0, \\ \mathbf{y}_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}, \\ u(t) \in \mathcal{U} := L^{\infty}(0, +\infty; \mathcal{U}) \text{ a.e. } t > 0, \\ \tau \in [0, \mathcal{T}], \quad \mathbf{y}_{\mathbf{x}}(\tau) \in \mathcal{C}, \\ \mathbf{y}_{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{K} \text{ for } 0 \leq t \leq \tau. \end{split}$$

 $C \subset \mathcal{K}$ closed sets of \mathbb{R}^d , $U \subset \mathbb{R}^m$ compact, $f : \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$ is Lipschitz, bounded, and f(x, U) is convex for any $x \in \mathbb{R}^d$.

Known results Minimum time problem with state constraints

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < □ > <

э

Target problem with state constraints (\mathcal{P})

$$\begin{split} \vartheta(\mathcal{T}, \mathbf{x}) &:= \operatorname{Min} \Psi(y_{\mathbf{x}}(\tau)); \\ \begin{cases} \dot{y}_{\mathbf{x}}(t) = f(y_{\mathbf{x}}(t), u(t)), & t > 0, \\ y_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}, \\ u(t) \in \mathcal{U} := L^{\infty}(0, +\infty; U) \text{ a.e. } t > 0, \\ \tau \in [0, T], \quad y_{\mathbf{x}}(\tau) \in \mathcal{C}, \\ y_{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{K} \text{ for } 0 \leq t \leq \tau. \end{split}$$

$$\Psi({m x}) = egin{cases} 0 & {m x} \in \mathcal{C} \ 1 & ext{otherwise} \end{cases} = \chi_{\mathcal{C}}({m x}).$$

Known results Minimum time problem with state constraints

• Link with the optimal time problem $\mathcal{T}(\mathbf{x}) := \inf\{\tau \ge 0 \mid \mathbf{y}_{\mathbf{x}}(\tau) \in \mathcal{C}, \mathbf{y}_{\mathbf{x}} \subset \mathcal{K}\}.$

Theorem

$$\blacktriangleright \vartheta(T, x) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{T}(x) \leq T$$

► For every $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\Big[artheta({\it T},{\it x})={\it 1},\;\forall{\it T}\geq {\it 0}\Big] \Longleftrightarrow {\cal T}({\it x})=+\infty.$$

$$\succ \mathcal{T}(\mathbf{x}) = \inf\{T \ge 0; \ \vartheta(T, \mathbf{x}) = 0\}.$$

Link with front propagation:
 The target set C: burned region at a model of the set C: burned region at a mode

O. Bokanowski, N. Megdich, H. Zidani

Control problem with state constraints

Known results Minimum time problem with state constraints

ヘロト 人間 ト イヨト イヨト

• Link with the optimal time problem

 $\mathcal{T}(\mathbf{x}) := \inf\{\tau \ge \mathbf{0} \mid \mathbf{y}_{\mathbf{x}}(\tau) \in \mathcal{C}, \mathbf{y}_{\mathbf{x}} \subset \mathcal{K}\}.$

Link with front propagation: The target set C: burned region at t = 0, ϑ(0, x) = χ_C(x). C_t := {x ∈ ℝⁿ, ϑ(t, x) = 0}: burned region at time t.

"Evolution of regions" instead of the "level set approach".

Geometric approach. Contingent derivatives A second approach. Viscosity notion

١

$$\begin{cases} \dot{y}_{x}(t) = f(y_{x}(t), u(t)) & \qquad \begin{cases} \dot{\tilde{y}}_{x}(t) = \lambda(t)f(\tilde{y}_{x}(t), \tilde{u}(t)) \\ \widetilde{y}_{x}(0) = x \\ \lambda(t) \in \Lambda(\tilde{y}_{x}(t)) \end{cases} \\ \Lambda(z) = \begin{cases} \{0\} & \text{if } z \in \mathcal{K}^{c} \\ [0, 1] & \text{if } z \in \mathcal{C} \cup \partial \mathcal{K} \\ \{1\} & \text{otherwise.} \end{cases} \end{cases}$$

Geometric approach. Contingent derivatives A second approach. Viscosity notion

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Lemma 2.

Let $T \ge 0$, $x \in \mathcal{K}$. For every $\widetilde{y}_x : [0, T] \to \mathcal{K}$, there exist $0 \le S \le T$, $u \in \mathcal{U}$ such that:

 $\dot{y}_x(t) = f(y_x(t), u(t)) \ t \in (0, S), \quad y_x(0) = x,$ $y_x(S) = \widetilde{y}_x(T),$

 $\{y_x(t); t \in (0, S)\} \equiv \{\widetilde{y}_x(t); t \in [0, T]\} \subset K.$

Geometric approach. Contingent derivatives A second approach. Viscosity notion

ヘロト 人間 ト イヨト イヨト

3

Idea of the proof of Lemma 2:

 \widetilde{y}_x satisfies: $\exists \lambda : (0, T) \longrightarrow [0, 1]$ such that:

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{y}}_{x}(t) = \lambda(t)f(\widetilde{y}_{x}(t), \widetilde{u}(t)), & \lambda(t) \in \Lambda(\widetilde{y}_{x}(t)). \\ \widetilde{y}_{x}(0) = x \end{cases}$$

Let $\gamma(t) := \int_0^t \lambda(s) ds$. We construct *y* such that

$$\mathbf{y}_{\mathbf{x}}(\gamma(t)) = \widetilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{x}}(\beta(t)); \quad \mathbf{S} = \gamma(\mathbf{T});$$

where
$$\beta(t) = \inf\{0 \le \tau \le t, \ \gamma(\tau) = \gamma(t)\}.$$

Geometric approach. Contingent derivatives A second approach. Viscosity notion

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < □ > <

э

An other formulation of the target problem

$$\vartheta(\mathcal{T}, \mathbf{x}) = \inf\{\chi_{\mathcal{C}}(\widetilde{y}_{\mathbf{x}}(t)), \ \dot{\widetilde{y}}_{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{F}(\widetilde{y}_{\mathbf{x}}(t)), \ \widetilde{y}_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}, \}$$

where
$$F(x) = \{\lambda f(x, a), a \in U, \lambda \in \Lambda(x)\}$$
 et

$$\Lambda(x) := \begin{cases} \{0\} & \text{if } x \in \mathcal{K}^c \\ [0, 1] & \text{if } x \in \mathcal{C} \cup \partial \mathcal{K} \\ \{1\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Geometric approach. Contingent derivatives A second approach. Viscosity notion

・ロッ ・ 一 ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・

э

Question

What is the HJB equation satisfied by ϑ ?

O. Bokanowski, N. Megdich, H. Zidani Control problem with state constraints

Geometric approach. Contingent derivatives A second approach. Viscosity notion

< A >

-∢ ∃ →

-

Outline



4 Numerical example

Geometric approach. Contingent derivatives A second approach. Viscosity notion

ヘロト 人間 ト イヨト イヨト

Contingent epiderivative of a l.s.c function *u*:

$$D_{\uparrow}u(t,x)(s,p) := \liminf_{h \searrow 0, q \to p} \frac{1}{h}(u(t+hs,x+hq)-u(t,x))$$

When F(x) := f(x, U) ($\mathcal{K} = \mathbb{R}^d$), F is cont.,

 $u = \vartheta \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ lsc, verifies (IC): } \liminf_{t \searrow 0, \ y \to x} u(y, t) = \chi_{\mathcal{C}}(x), \\ \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \ \sup_{p \in F(x)} -D_{\uparrow}u(t, x)(-1, p) \ge 0 \\ \forall t \ge 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \ \sup_{p \in F(x)} D_{\uparrow}u(t, x)(1, -p) \le 0. \end{cases}$

Geometric approach. Contingent derivatives A second approach. Viscosity notion

< 日 > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

Contingent epiderivative of a l.s.c function *u*:

$$D_{\uparrow}u(t,x)(s,p) := \liminf_{h \searrow 0, q \to p} \frac{1}{h}(u(t+hs,x+hq)-u(t,x))$$

When F(x) := f(x, U) ($\mathcal{K} = \mathbb{R}^d$), F is cont.,

$$u = \vartheta \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ lsc, verifies (IC): } \liminf_{t \searrow 0, \ y \to x} u(y, t) = \chi_{\mathcal{C}}(x), \\ \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \ \sup_{p \in F(x)} -D_{\uparrow}u(t, x)(-1, p) \ge 0 \\ \forall t \ge 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \ \sup_{p \in F(x)} D_{\uparrow}u(t, x)(1, -p) \le 0. \end{cases}$$

Geometric approach. Contingent derivatives A second approach. Viscosity notion

▲ロ → ▲圖 → ▲ 画 → ▲ 画 → …

æ

$$D_{\uparrow}u(t,x)(s,p) := \liminf_{h \searrow 0, q \to p} \frac{1}{h} (u(t+hs, x+hq)-u(t,x))$$
When $F(x) := f(x, U)$ ($\mathcal{K} = \mathbb{R}^d$), F is cont.,

$$u = \vartheta \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ lsc, verifies (IC): } \liminf_{t \searrow 0, \ y \to x} u(y,t) = \chi_{\mathcal{C}}(x), \\ \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \ \sup_{p \in F(x)} -D_{\uparrow}u(t,x)(-1,p) \ge 0 \\ (super - solution) \\ \forall t \ge 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \ \sup_{p \in F(x)} D_{\uparrow}u(t,x)(1,-p) \le 0 \\ (sub - solution). \end{cases}$$

Ref: Frankowska'93

Geometric approach. Contingent derivatives A second approach. Viscosity notion

・ロ と く 雪 と く ヨ と ・

3

$$\begin{aligned} \textit{Tr}^-(x) &:= \left\{ \left. \widetilde{y}_x \right| \exists \nu > 0 \ \dot{\widetilde{y}}_x(\cdot) \subset \textit{F}(\widetilde{y}_x(\cdot)), \ \text{on} \ [-\nu, 0], \\ & \text{et} \ \widetilde{y}_x(0) = x \right\}, \\ & \text{with} \ \textit{F}(x) = \{ \lambda f(x, a), \ a \in \textit{U}, \ \lambda \in \Lambda(x) \} \end{aligned}$$

 $D_{\uparrow}^{F}u(t,x)(\widetilde{y}_{x}) := \liminf_{h \searrow 0} \frac{1}{h} (u(t+h,\widetilde{y}_{x}(-h)) - u(t,x))$ Derivative with respect to trajectories arriving in *x*.

Geometric approach. Contingent derivatives

ヘロト 人間 ト イヨト イヨト

$$\mathcal{T}r^{-}(x) := \left\{ \widetilde{y}_{x} \middle| \exists \nu > 0 \ \dot{\widetilde{y}}_{x}(\cdot) \subset \mathcal{F}(\widetilde{y}_{x}(\cdot)), \text{ on } [-
u, 0],
ight.$$

et $\widetilde{y}_{x}(0) = x
ight\},$

 $D_{\uparrow}^{\mathsf{F}}u(t,x)(\widetilde{y}_{x}) := \liminf_{h \geq 0} \frac{1}{h}(u(t+h,\widetilde{y}_{x}(-h)) - u(t,x))$

Derivative with respect to trajectories arriving in x

Geometric approach. Contingent derivatives A second approach. Viscosity notion

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < □ > <

э

Theorem (O. Bokanowski, HZ, N. Megdich)

$$u = \vartheta \Leftrightarrow egin{cases} u ext{ is l.s.c, and satisfies the IC,} \ orall t > 0, \ x \in \mathcal{K}, \ \sup_{p \in \mathcal{F}(x)} -D_{\uparrow}u(t,x)(-1,p) \geq 0, \ orall t \geq 0, \ x \in \mathcal{K}, \ \sup_{y \in \mathcal{T}r^{-}(x)} D_{\uparrow}^{\mathcal{F}}u(t,x)(y) \leq 0, \end{cases}$$

Geometric approach. Contingent derivatives A second approach. Viscosity notion

▲口 > ▲母 > ▲目 > ▲目 > ▲目 > ④ へ @ >

$$u = \vartheta \Leftrightarrow \begin{cases} u \text{ is l.s.c., and satisfies IC,} \\ \forall t > 0, \ x \in K, \ \sup_{p \in F(x)} -D_{\uparrow}u(t,x)(-1,p) \ge 0, \\ \forall t \ge 0, \ \forall x \in K, \sup_{y \in Tr^{-}(x)} D_{\uparrow}^{F}u(t,x)(y) \le 0, \\ \\ u \text{ is l.s.c., and satisfies IC,} \\ \forall t > 0, \ x \in K, \sup_{p \in F(x)} -D_{\uparrow}u(t,x)(-1,p) \ge 0, \\ \\ \forall t \ge 0, \ x \in \operatorname{int}(\mathcal{K}), \sup_{p \in F(x)} D_{\uparrow}u(t,x)(1,-p) \le 0, \\ \\ \forall t \ge 0, \ \forall x \in \partial K, \sup_{p \in F(x)} D_{\uparrow}^{F}u(t,x)(y) \le 0, \\ \\ \\ \forall t \ge 0, \ \forall x \in \partial K, \sup_{y \in Tr^{-}(x)} D_{\uparrow}^{F}u(t,x)(y) \le 0, \end{cases}$$

A second approach. Viscosity notion

< 一 →

★ ∃ > ★

.⊒ . >

Outline



- The HJB equation associated to our problem
- Geometric approach. Contingent derivatives
- A second approach. Viscosity notion

Geometric approach. Contingent derivatives A second approach. Viscosity notion

・ロト ・聞 ト ・ ヨ ト ・ ヨ ト ・

Theorem (OB, HZ, NM)

The value function V is I.s.c on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+_*$, and is a bilateral solution of the HJB equation

$$\frac{\min(\partial_t \vartheta(\mathbf{x}, t) - \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \vartheta(\mathbf{x}, t)), \vartheta - \chi_{\mathcal{K}}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, \\ V(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \Phi(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

where $\mathcal{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \inf\{\lambda f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}); \lambda \in \Lambda(\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{U}\}$,

Introduction The HJB equation associated to our problem NUmerical test

Numerical example

Algorithme: (without proof)

$$\min(\frac{V^{n+1}-V^n}{\Delta t}+[H(V^n)], V^{n+1}-\chi_{\mathcal{K}})=0,$$

$$\Rightarrow V^{n+1}=\max(V^n-\Delta t[H(V^n)], \chi_{\mathcal{K}})$$

• 2d sparse method - The HJB-UltraBee (Bokanowski, Megdich, Zidani'05)

・ロッ ・ 一 ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・ ・

3



t= 3.5137255

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへで





▲口 > ▲母 > ▲目 > ▲目 > ▲目 > ④ へ @ >





◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへで

▲口 > ▲母 > ▲目 > ▲目 > ▲目 > ④ へ @ >

▲口 > ▲母 > ▲目 > ▲目 > ▲目 > ④ へ @ >