

Geometria (Laurea Triennale in Fisica).
Anno Accademico 2020-21. Prof. P. Piazza.
Alcuni preliminari.

In Matematica è molto frequente l'uso dei seguenti simboli:

\Rightarrow : Implica \Leftrightarrow : Equivalente

\forall : Per ogni \exists : Esiste $\exists!$: Esiste Unico \in : appartiene

Il simbolo | è utilizzato a volte al posto di *tale che*

IMPLICAZIONI. Cominciamo con le implicazioni (\Rightarrow , \Leftrightarrow) e le loro interpretazioni come condizioni necessarie e/o sufficienti.

Abbiamo già detto che $A \Rightarrow B$ vuol dire che "A implica B" oppure "da A segue B" o anche "accade che se A è vera allora è vera anche B".

La negazione di $A \Rightarrow B$ è "A non implica B" e cioè, "accade che A sia vera ma che B sia falsa".

La proposizione $A \Rightarrow B$ si può anche tradurre indifferentemente con una delle seguenti proposizioni

- 1) *Condizione necessaria affinché A sia vero è che sia verificato B.*
- 2) *Condizione sufficiente affinché B sia vero è che sia verificato A.*
- 3) *Se A è vero allora B è vero.*
- 4) *A è vero solo se B è vero.*

Osserviamo che una condizione sufficiente "implica" mentre una condizione necessaria "è implicata".

Esercizio 1 "Condizione sufficiente affinché la strada sia bagnata ¹ è che stia piovendo"

Come si scrive questa proposizione con il simbolo \Rightarrow ?

Esercizio 2 "Condizione necessaria affinché stia piovendo è che la strada sia bagnata"

Che differenza c'è fra questa proposizione e quella dell'esercizio 1 ?

Esercizio 3 "Condizione necessaria affinché la strada sia bagnata è che stia piovendo"

Come si scrive questa proposizione con il simbolo \Rightarrow ? È vera ?

Soluzioni

1. "Sta piovendo" \Rightarrow "la strada è bagnata".
2. Non c'è alcuna differenza. Anche questa proposizione si traduce in : "Sta piovendo" \Rightarrow "la strada è bagnata".
3. La proposizione si può scrivere "la strada è bagnata" \Rightarrow "sta piovendo". È chiaramente falsa (perché la strada davanti al portone di casa potrebbe essere bagnata per altri motivi).

In generale la veridicità di $A \Rightarrow B$ non fornisce alcuna informazione circa la veridicità della proposizione $B \Rightarrow A$.

Domanda 1 Se la strada è asciutta che cosa se ne può dedurre?

Risposta 1 "se la strada è asciutta" ne segue che "non sta piovendo".

Questo è un esempio della regola di contrapposizione:

$A \Rightarrow B$ è equivalente a (negazione di B) \Rightarrow (negazione di A).

¹La strada è per definizione la strada davanti al portone di casa

Giustificiamo la regola di contrapposizione. Supponiamo vera $A \Rightarrow B$ e facciamo vedere che (negazione di B) \Rightarrow (negazione di A). Partiamo da (negazione di B), accettiamo quindi che la negazione di B sia vera. Ricordiamo ora la regola del terzo escluso: una proposizione o è vera oppure è falsa (*tertium non datur*). Quindi, o A è vera, oppure è falsa. Ci domandiamo: può essere vera A ? La risposta è no, perché da A seguirebbe B , in contrasto col fatto che abbiamo accettato, per ipotesi, che sia vera la negazione di B . La conclusione è che se supponiamo vera $A \Rightarrow B$ allora è anche vera (negazione di B) \Rightarrow (negazione di A). L'implicazione inversa, e cioè

$$(\text{negazione di } B) \Rightarrow (\text{negazione di } A) \text{ implica } A \Rightarrow B$$

si dimostra allo stesso modo, utilizzando in aggiunta che

$$(\text{negazione di}(\text{negazione di } A)) \text{ è } A$$

(due negazioni danno un'affermazione).

Domanda 2 Sia $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la seguente proposizione :

“Condizione necessaria e sufficiente affinché n^2 sia pari è che n sia pari.”

- 1) Quali sono le due implicazioni che esprimono questa proposizione ?
- 2) Come si traduce questa proposizione con il simbolo \Leftrightarrow ?
- 3) Qual è la condizione necessaria e quella sufficiente ?

Risposta 2

- 1) Le implicazioni sono : “ n^2 pari \Rightarrow n pari” e “ n pari \Rightarrow n^2 pari”.
- 2) $n^2 \text{ pari} \Leftrightarrow n \text{ pari}$.

osservazione. Vi ricordo che “ $A \Leftrightarrow B$ ” si esprime dicendo che “(A vera) è equivalente a (B vera)” o, più semplicemente, “ A è equivalente a B ”

- 3) “ n è pari” è sia condizione necessaria che condizione sufficiente. Se si volesse dimostrare la veridicità della condizione necessaria si dovrebbe dimostrare che $n^2 \text{ pari} \Rightarrow n \text{ pari}$. Se si volesse invece dimostrare la veridicità della condizione sufficiente allora si dovrebbe far vedere che $n \text{ pari} \Rightarrow n^2 \text{ pari}$.

La proposizione $n^2 \text{ pari} \Leftrightarrow n \text{ pari}$ viene anche espressa nel seguente modo:
 n^2 è pari se e solo se n è pari.

Riandate a 3) e 4) nella pagina precedente.

Quindi, se si volesse dimostrare la parte “ se ” dell'implicazione allora si dovrebbe dimostrare che $n \text{ pari} \Rightarrow n^2 \text{ pari}$. Se si volesse dimostrare la parte “ solo se ” dell'implicazione allora si dovrebbe dimostrare che $n^2 \text{ pari} \Rightarrow n \text{ pari}$.

In generale la proposizione “ $A \Leftrightarrow B$ ” si può anche esprimere dicendo che “ A è vera se e solo se B è vera”.

Riassumendo: “ $A \Leftrightarrow B$ ” si esprime con una delle tre proposizioni:

- (A vera) è equivalente a (B vera)
- A è vera se e solo se B è vera
- Condizione necessaria e sufficiente affinché A sia vera è che sia vera B

Domanda 3 Si consideri ora la proposizione :

“Condizione necessaria e sufficiente affinché Paola sia a Roma è che Paola sia in Italia.”

- 1) Questa proposizione è vera o falsa ?
- 2) Se è falsa, quale fra le due condizioni (necessaria e sufficiente) è vera ?

Risposta 3

- 1) La proposizione è ovviamente falsa perché se Paola è in Italia non è detto che sia

a Roma. 2) “Paola è a Roma” \Rightarrow “Paola è in Italia” (e cioè la condizione necessaria) è vera. Mentre è falso che “Paola è in Italia” \Rightarrow “Paola è a Roma” (la condizione sufficiente).

Esercizio 4. Dimostrare che n^2 pari $\Leftrightarrow n$ pari, $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione esercizio 4. n pari vuol dire, per definizione, che $n = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Ma allora $n^2 = 2(2k^2)$ e quindi n^2 è pari. Viceversa, sia n^2 pari. Dimostrare l’implicazione n^2 pari $\Rightarrow n$ pari è equivalente a dimostrare la contrapposta e cioè che n dispari $\Rightarrow n^2$ dispari. Ma n dispari $\Rightarrow n = 2h + 1$ per qualche $h \in \mathbb{N}$. Ne segue che $n^2 = 2(2h^2 + 2h) + 1$ e quindi che n^2 è dispari.

Quod Erat Demonstrandum.

QUANTIFICATORI Passiamo ad illustrare l’uso dei simboli \forall e \exists .

Domanda 4

1) Come si traduce con i simboli elencati la seguente proposizione?:

“ $\mathcal{P}1$: Si può trovare un numero razionale diverso da zero il cui prodotto con un qualsiasi altro numero razionale diverso da zero è uguale a 1”.

2) La proposizione $\mathcal{P}1$ è vera o falsa?

Risposta 4.

1) $\mathcal{P}1$: $\exists x \in \mathbb{Q} \ x \neq 0 \mid \forall y \in \mathbb{Q} \ y \neq 0, \ xy = 1$

2) La proposizione è falsa. Per dimostrarlo bisogna far vedere che non esiste $x \in \mathbb{Q} \ x \neq 0$ con la proprietà enunciata. In altre parole, scelto comunque un numero razionale $x \neq 0$ basterà far vedere che esiste un y' tale che $xy' \neq 1$. Dato che $x \neq 0$ si può scegliere per esempio $y' = \frac{1}{2x}$ in modo tale che $xy' = \frac{1}{2} \neq 1$.

Osservazione. Abbiamo dimostrato: $\forall x \in \mathbb{Q} \ x \neq 0 \ \exists y' \in \mathbb{Q} \ y' \neq 0, \mid xy' \neq 1$ cioè la negazione di $\mathcal{P}1$.

È importante capire questo punto:

Negare : $\forall x$ è valida la proposizione \mathcal{P} è equivalente a affermare : $\exists x$ per cui non è valida la proposizione \mathcal{P} .

Negare : $\exists x$ per cui è valida la proposizione \mathcal{P} è equivalente a affermare : $\forall x$ non è valida la proposizione \mathcal{P} .

Esercizio 5 Consideriamo la proposizione: $\mathcal{P}2 : \forall x \in \mathbb{Q}, \ x \neq 0 \ \exists y \in \mathbb{Q} \mid xy = 1$. Questa proposizione è vera o falsa? Scrivetela per esteso e confrontatela con la proposizione $\mathcal{P}1$.

Soluzione Es. 5.

Per ogni numero razionale x diverso da 0 esiste un numero razionale y tale che $xy = 1$.

La proposizione è vera; i numeri razionali \mathbb{Q} sono costruiti precisamente per soddisfare questa proprietà, esistenza dell’elemento inverso per i numeri razionali non nulli.

Esercizio 6.

1) Negare : $\forall x \ \exists y \mid$ è valida la proposizione \mathcal{P}

2) Negare : $\exists x \mid \forall y$ è valida la proposizione \mathcal{P}

Soluzione esercizio 6.

1) $\exists x \mid \forall y$ non è valida \mathcal{P} .

2) $\forall x \ \exists y \mid$ non è valida \mathcal{P} .