Geometria. Corso di Laurea in Fisica.
Proff. P. Piazza e V.F. Zenobi. a.a. 2023-24.

Alcuni preliminari.

In Matematica è molto frequente l'uso dei seguenti simboli:

$\Rightarrow$: Implica $\Leftrightarrow$: Equivalente

$\forall$: Per ogni $\exists$: Esiste $\exists!$: Esiste Unico $\in$: appartiene

Il simbolo $|$ è utilizzato a volte al posto di *tale che*

IMPLICAZIONI. Cominciamo con le implicazioni ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) e le loro interpretazioni come condizioni necessarie e/o sufficienti.

Abbiamo già detto che $A \Rightarrow B$ vuol dire che "A implica B" oppure "da A segue B" o anche "accade che se A è vera allora è vera anche B".
La negazione di $A \Rightarrow B$ è "A non implica B" e cioè, "accade che A sia vera ma che B sia falsa".

La proposizione $A \Rightarrow B$ si può anche tradurre indifferentemente con una delle seguenti proposizioni

1) Condizione necessaria affinché A sia vero è che sia verificato B.
2) Condizione sufficiente affinché B sia vero è che sia verificato A.
3) Se A è vero allora B è vero.
4) A è vero solo se B è vero.

Osserviamo che una condizione sufficiente "implica" mentre una condizione necessaria "è implicata".

Esercizio 1 "Condizione sufficiente affinché la strada sia bagnata [1] è che stia piovendo"
Come si scrive questa proposizione con il simbolo $\Rightarrow$?

Esercizio 2 "Condizione necessaria affinché stia piovendo è che la strada sia bagnata"
Che differenza c'è fra questa proposizione e quella dell'esercizio 1 ?

Esercizio 3 "Condizione necessaria affinché la strada sia bagnata è che stia piovendo"
Come si scrive questa proposizione con il simbolo $\Rightarrow$? È vera ?

Soluzioni

1. "Sta piovendo" $\Rightarrow$ "la strada è bagnata".
2. Non c'è alcuna differenza. Anche questa proposizione si traduce in : "Sta piovendo" $\Rightarrow$ "la strada è bagnata".
3. La proposizione si può scrivere "la strada è bagnata" $\Rightarrow$ "sta piovendo". È chiaramente falsa (perché la strada davanti al portone di casa potrebbe essere bagnata per altri motivi).

In generale la veridicità di $A \Rightarrow B$ non fornisce alcuna informazione circa la veridicità della proposizione $B \Rightarrow A$.

Domanda 1 Se la strada è asciutta che cosa se ne può dedurre?
Risposta 1 "se la strada è asciutta" ne segue che "non sta piovendo".

Questo è un esempio della regola di contrapposizione:

$$A \Rightarrow B \quad \text{è equivalente a} \quad (\text{negazione di } B) \Rightarrow (\text{negazione di } A).$$

[1] La strada è per definizione la strada davanti al portone di casa

Giustifichiamo la regola di contrapposizione. Supponiamo vera $A \Rightarrow B$ e facciamo vedere che (negazione di B) $\Rightarrow$ (negazione di A). Partiamo da (negazione di B), accettiamo quindi che la negazione di B sia vera. Ricordiamo ora la regola del terzo escluso: una proposizione o è vera oppure è falsa (*tertium non datur*). Quindi, o A è vera, oppure è falsa. Ci domandiamo: può essere vera A ? La risposta è no, perché da A seguirebbe B, in contrasto col fatto che abbiamo accettato, per ipotesi, che sia vera la negazione di B. La conclusione è che se supponiamo vera $A \Rightarrow B$ allora è anche vera (negazione di B) $\Rightarrow$ (negazione di A). L'implicazione inversa, e cioè

$$\text{(negazione di } B) \Rightarrow \text{(negazione di } A) \quad \text{implica} \quad A \Rightarrow B$$

si dimostra allo stesso modo, utilizzando in aggiunta che

$$\text{(negazione di(negazione di } A)) \quad \text{è} \quad A$$

(due negazioni danno un'affermazione).
Domanda 2 Sia $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la seguente proposizione :
"Condizione necessaria e sufficiente affinché n^2 sia pari è che n sia pari."
1) Quali sono le due implicazioni che esprimono questa proposizione ?
2) Come si traduce questa proposizione con il simbolo $\Leftrightarrow$?
3) Qual è la condizione necessaria e quella sufficiente ?

Risposta 2
1) Le implicazioni sono : "n^2 *pari* $\Rightarrow$ n *pari*" e " n *pari* $\Rightarrow$ n^2 *pari*".
2) n^2*pari* $\Leftrightarrow$ n *pari*.
Osservazione. Vi ricordo che "$A \Leftrightarrow B$" si esprime dicendo che "(A vera) è equivalente a (B vera)" o, più semplicemente, "A è equivalente a B"
3) "n è pari" è sia condizione necessaria che condizione sufficiente. Se si volesse dimostrare la veridicità della condizione necessaria si dovrebbe dimostrare che n^2 *pari* $\Rightarrow$ n *pari*. Se si volesse invece dimostrare la veridicità della condizione sufficiente allora si dovrebbe far vedere che n *pari* $\Rightarrow$ n^2 *pari*.

La proposizione n^2*pari* $\Leftrightarrow$ n *pari* viene anche espressa nel seguente modo:
n^2 è pari se e solo se n è pari.
(Riandate a 3) e 4) nella pagina precedente.)
Quindi, se si volesse dimostrare la parte " se " dell'implicazione allora si dovrebbe dimostrare che n *pari* $\Rightarrow$ n^2 *pari*. Se si volesse dimostrare la parte " solo se " dell'implicazione allora si dovrebbe dimostrare che n^2 *pari* $\Rightarrow$ n *pari*.

In generale la proposizione "$A \Leftrightarrow B$" si può anche esprimere dicendo che "A è vera se e solo se B è vera".

Riassumendo: "$A \Leftrightarrow B$" si esprime con una delle tre proposizioni:

- (A vera) è equivalente a (B vera)
- A è vera se e solo se B è vera
- Condizione necessaria e sufficiente affinché A sia vera è che sia vera B

Domanda 3 Si consideri ora la proposizione :
"Condizione necessaria e sufficiente affinché Paola sia a Roma è che Paola sia in Italia."
1) Questa proposizione è vera o falsa ?
2) Se è falsa, quale fra le due condizioni (necessaria e sufficiente) è vera ?

Risposta 3
1) La proposizione è ovviamente falsa perché se Paola è in Italia non è detto che sia

a Roma. 2) “Paola è a Roma”$\Rightarrow$ “Paola è in Italia” (e cioè la condizione necessaria) è vera. Mentre è falso che “Paola è in Italia”$\Rightarrow$ “Paola è a Roma” (la condizione sufficiente).
Esercizio 4. Dimostrare che n^2 *pari* $\Leftrightarrow n$ *pari*, $n \in \mathbb{N}$.
Soluzione esercizio 4. n *pari* vuol dire, per definizione, che $n = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Ma allora $n^2 = 2(2k^2)$ e quindi n^2 è pari. Viceversa, sia n^2 *pari*. Dimostrare l'implicazione n^2 *pari* $\Rightarrow n$ *pari* è equivalente a dimostrare la contrapposta e cioè che n *dispari* $\Rightarrow n^2$ *dispari*. Ma n *dispari* $\Rightarrow n = 2h + 1$ per qualche $h \in \mathbb{N}$. Ne segue che $n^2 = 2(2h^2 + 2h) + 1$ e quindi che n^2 è dispari.
Quod **E**rat **D**emonstrandum.

QUANTIFICATORI Passiamo ad illustrare l'uso dei simboli $\forall$ e $\exists$.
Domanda 4
1) Come si traduce con i simboli elencati la seguente proposizione?:
“$\mathcal{P}1$: Si puó trovare un numero razionale diverso da zero il cui prodotto con un qualsiasi altro numero razionale diverso da zero è uguale a 1”.
2) La proposizione $\mathcal{P}1$ é vera o falsa?
Risposta 4.
1) $\mathcal{P}1$: $\exists x \in \mathbb{Q}\ \ x \neq 0\ \mid\ \forall y \in \mathbb{Q}\ \ y \neq 0,\ \ xy = 1$
2) La proposizione è falsa. Per dimostrarlo bisogna far vedere che non esiste $x \in \mathbb{Q}\ \ x \neq 0$ con la proprietà enunciata. In altre parole, scelto comunque un numero razionale $x \neq 0$ basterà far vedere che esiste un y' tale che $xy' \neq 1$. Dato che $x \neq 0$ si può scegliere per esempio $y' = \frac{1}{2x}$ in modo tale che $xy' = \frac{1}{2} \neq 1$.
Osservazione. Abbiamo dimostrato: $\forall x \in \mathbb{Q}\ \ x \neq 0\ \ \exists y' \in \mathbb{Q}\ \ y \neq 0,\ \mid\ xy' \neq 1$ *cioè la negazione di* $\mathcal{P}1$*.*
È importante capire questo punto:
$\underline{Negare}$ *:* $\forall x$ *è valida la proposizione* $\mathcal{P}$ *è equivalente a* $\underline{affermare}$ *:* $\exists x$ *per cui non è valida la proposizione* $\mathcal{P}$*.*
$\underline{Negare}$ *:* $\exists x$ *per cui è valida la proposizione* $\mathcal{P}$ *è equivalente a* $\underline{affermare}$ *:* $\forall x$ *non è valida la proposizione* $\mathcal{P}$*.*
Esercizio 5 Consideriamo la proposizione: $\mathcal{P}2 : \forall x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{Q}\ \mid\ xy = 1$. Questa proposizione è vera o falsa? Scrivetela per esteso e confrontatela con la proposizione $\mathcal{P}1$.
Soluzione Es. 5.
Per ogni numero razionale x *diverso da* 0 *esiste un numero razionale* y *tale che* $xy = 1$*.*
La proposizione è vera; i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono costruiti precisamente per soddisfare questa proprietà, esistenza dell'elemento inverso per i numeri razionali non nulli.
Esercizio 6.
1) Negare : $\forall x\ \exists y\ \mid$ è valida la proposizione $\mathcal{P}$
2) Negare : $\exists x\ \mid\ \forall y$ è valida la proposizione $\mathcal{P}$
Soluzione esercizio 6.
1) $\exists x\ \mid\ \forall y$ non è valida $\mathcal{P}$.
2) $\forall x\ \exists y\ \mid$ non è valida $\mathcal{P}$.