Geometria (Laurea Triennale in Fisica).
Anno Accedemico 2020-21. Prof. P. Piazza.
Gruppi, anelli, campi.

Definizione 1. Un gruppo $(G, \cdot)$ è un insieme dotato[1] di un'operazione $\cdot$ verificante le seguenti proprietà:
(1) l'operazione è associativa: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$, si ha $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
(2) esiste un elemento $e \in G$ tale che $g \cdot e = g = e \cdot g$ $\forall g \in G$
(3) $\forall g \in G$ $\exists g' \in G$ tale che $g \cdot g' = e = g' \cdot g$.

Se accade che
(4) $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$ $\forall g_1, g_2 \in G$, il gruppo è detto *commutativo* o anche *abeliano.*

Esercizio 1. Verificare che l'elemento e di cui in (2) è unico. Tale elemento è detto *elemento neutro* e viene anche denotato con il simbolo 1.

Esercizio 2. Verificare che dato $g \in G$, l'elemento g' di cui in (3) è unico. Esso è detto *inverso di* g ed è denotato g^{-1}.

In un gruppo commutativo si utilizza usualmente la notazione $+$ per denotare l'operazione; inoltre l'elemento neutro è spesso denotato con il simbolo 0 mentre l'inverso è denotato con il simbolo $-a$.

Definizione 2. Un anello $(A, +, \cdot)$ è un insieme dotato di due operazioni con le seguenti proprietà:
(1) $(A, +)$ è un gruppo commutativo;
denotiamo con 0 l'elemento neutro rispetto a $+$.
(2) l'operazione $\cdot$ gode della proprietà associativa.
(3) valgono le proprietà distributive:

$$(a + a') \cdot b = a \cdot b + a' \cdot b\,, \quad a \cdot (b + b') = a \cdot b + a \cdot b'\,. \quad \forall a, a', b, b' \in A$$

Se vale la proprietà commutativa per l'operazione $\cdot$ allora $(A, +, \cdot)$ è detto un *anello commutativo.* Se esiste un elemento neutro rispetto all'operazione $\cdot$, denotato usualmente con il simbolo 1, allora A è un anello *unitario.*

Definizione 3. Un campo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è un anello commutativo unitario verificante la seguente ulteriore proprietà:

$$\forall \kappa \in \mathbb{K}, \kappa \neq 0, \;\; \exists \kappa' \in \mathbb{K} \mid \kappa \cdot \kappa' = 1\,.$$

dove i simboli 0 ed 1 denotano rispettivamente l'elemento neutro rispetto all'operazione $+$ e l'elemento netro rispetto all'operazione $\cdot$.

Esercizio 3. Consideriamo il campo dei numeri reali $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Consideriamo il sottoinsieme

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{\alpha + \sqrt{2}\beta\,, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}.$$

Verificare che le due operazioni di $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ inducono in questo insieme una struttura di campo. [2]

[1] Un'operazione è una legge che associa ad ogni coppia ordinata di elementi di G, siano essi g_1, g_2, uno ed un solo elemento di G, denotato $g_1 \cdot g_2$

[2] Quindi, più precisamente, la somma di due elementi di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, visti come elementi di $\mathbb{R}$, è ancora un elemento di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ e lo stesso è vero per il prodotto; inoltre $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ con queste due operazioni (ed avete appena verificato che sono ben definite) è un campo.