

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

PROGRAMMA DEL
CORSO DI MATEMATICHE ELEMENTARI DA UN PUNTO DI VISTA SUPERIORE (II
PARTE)
SVOLTO DAL PROF. RENZO MAZZOCCO
NELL'ANNO ACCADEMICO 2014-2015

Definizione di numero complesso. Unità immaginaria. Parte reale, parte immaginaria e coefficiente dell'unità immaginaria di un numero complesso. Numeri complessi reali e numeri complessi puramente immaginari. Coniugato di un numero complesso. Caratterizzazione dei numeri complessi reali. Caratterizzazione dei numeri complessi puramente immaginari. Uguaglianza di due numeri complessi. Definizione di somma e prodotto di due numeri complessi. Struttura di campo dell'insieme C dei numeri complessi. Coniugato della somma, della differenza, del prodotto e del quoziente di due numeri complessi. Espressione della parte reale, della parte immaginaria e del coefficiente dell'unità immaginaria di un numero complesso in termini del numero stesso e del suo coniugato. Il campo reale R come sottocampo del campo C . Cenni sul corpo H dei quaternioni.

Digressione sulle relazioni d'ordine. Campi ordinati. Non esistenza di strutture di campo ordinato nel campo complesso C . Risoluzione di equazioni lineari e di sistemi di equazioni lineari a coefficienti complessi. Radici quadrate di un numero complesso. Risoluzione delle equazioni algebriche di secondo grado a coefficienti complessi. Teorema fondamentale dell'algebra (soltanto enunciato). Molteplicità di una soluzione di un'equazione algebrica. Soluzioni di un'equazione algebrica a coefficienti complessi reali; il caso delle equazioni di grado dispari.

Il campo C dei numeri complessi come spazio vettoriale complesso di dimensione (complessa) 1 e sua base canonica. Il campo C dei numeri complessi come spazio vettoriale reale di dimensione (reale) 2 e sua base canonica. Digressione sui prodotti scalari di uno spazio vettoriale reale. Prodotto scalare su C pensato come spazio vettoriale reale. Modulo e norma di un numero complesso. Proprietà del modulo di un numero complesso. Modulo del coniugato di un numero complesso. Modulo dell'inverso di un numero complesso. Modulo del prodotto di due numeri complessi. Modulo del quoziente di due numeri complessi. Numeri complessi unitari. Gruppo unitario d'ordine 1. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e disuguaglianza triangolare per i numeri complessi.

Rappresentazione geometrica o di Argand-Gauss dei numeri complessi. Affissa di un punto del piano. Punto immagine del coniugato di un numero complesso. Punto immagine dell'opposto di un numero complesso. Punto immagine dell'opposto del coniugato di un numero complesso. Significato geometrico della somma e della differenza di due numeri complessi. Significato geometrico del prodotto scalare di due numeri complessi. Significato geometrico del modulo di un numero complesso. Significato geometrico del modulo della differenza di due numeri complessi. Circonferenza unitaria e sua equazione complessa.

Argomento o fase di un numero complesso non nullo. Argomento principale di un numero complesso. Forma trigonometrica o polare di un numero complesso non nullo. Uguaglianza di due numeri complessi in forma trigonometrica. Richiami sulle coordinate polari nel piano. Significato geometrico dell'argomento di un numero complesso. Argomento del coniugato di un numero complesso. Argomento dell'opposto del coniugato di un numero complesso. Argomento dell'inverso di un numero complesso non nullo. Forma trigonometrica del prodotto e del quoziente di due numeri complessi non nulli. Formula di de Moivre. Formule di triplicazione. Significato geometrico del prodotto di due numeri complessi.

Radici n -esime dell'unità e loro proprietà. Equazione ciclotomica. Poligono regolare di n lati associato alle radici n -esime dell'unità. Struttura di gruppo ciclico d'ordine n dell'insieme delle radici n -esime dell'unità. Radici n -esime di un numero complesso non nullo e loro proprietà.

Formula di Eulero. Relazione di Eulero tra i numeri fondamentali 0, 1, e , π , i . Forma esponenziale di un numero complesso non nullo. Forma esponenziale delle radici n -esime di un numero complesso non nullo.

Digressione sul metodo sintetico e sul metodo delle coordinate nello studio della geometria. Introduzione allo studio della geometria del piano con l'uso dei numeri complessi. Affissa del punto medio di due punti. Affissa del baricentro geometrico, o centroide, di n punti. Equazione parametrica, in termini di numeri complessi, della retta passante per due punti e del segmento individuato da due punti. Equazione parametrica, in termini di numeri complessi, dell'asse di un segmento individuato da due punti.

Richiami sul significato geometrico dei coefficienti a e b delle incognite dell'equazione cartesiana $ax+by+c=0$ di una retta. Equazione, in termini di numeri complessi, di una retta. Condizione affinché una retta, rappresentata da una equazione in termini di numeri complessi, sia perpendicolare all'asse x .

Richiami sul significato geometrico dei coefficienti a e b nell'equazione cartesiana $x^2+y^2+ax+by+c=0$ di una circonferenza. Equazione, in termini di numeri complessi, di una circonferenza. Circonferenze generalizzate. Condizione affinché una circonferenza, rappresentata da una equazione in termini di numeri complessi, sia perpendicolare all'asse x .

Trasformazioni di un insieme qualunque. Sostituzioni di un insieme finito. Gruppo delle trasformazioni di un insieme qualunque. Gruppo delle sostituzioni di un insieme finito. Gruppo alterno. Trasformazioni geometriche del piano. Trasformazioni affini o affinità del piano. Equazioni cartesiane di un'affinità. Affinità dirette e affinità inverse o indirette. Traslazioni del piano e loro equazioni cartesiane e proprietà. Omotetie del piano e loro equazioni cartesiane e proprietà. Omotetie dirette ed omotetie inverse. Simmetria rispetto ad un punto. Gruppo $\text{Aff}(E)$ delle affinità del piano. Gruppo $\text{Aff}^+(E)$ delle affinità dirette del piano. Figure affinementemente equivalenti. Invarianti affini di una figura. La geometria affine come studio degli invarianti affini delle figure. La geometria di Klein di un insieme rispetto ad un gruppo di trasformazioni dell'insieme.

Similitudini del piano. Equazioni cartesiane di una similitudine. Similitudini dirette e similitudini inverse o indirette. Esempi notevoli di similitudini. Gruppo $\text{Simil}(E)$ delle similitudini del piano. Gruppo $\text{Simil}^+(E)$ delle similitudini dirette del piano. Isometrie del piano. Equazioni cartesiane di una isometria. Isometrie dirette o congruenze dirette o movimenti del piano. Isometrie inverse o isometrie indirette o congruenze inverse o congruenze indirette del piano. Rotazione attorno ad un punto e sue equazioni cartesiane. Simmetria ortogonale rispetto ad una retta. Simmetria ortogonale, con scorrimento, rispetto ad una retta o glissoriflessione. Gruppo $\text{Isom}(E)$ delle isometrie del piano. Gruppo $\text{Isom}^+(E)$ delle isometrie dirette o dei movimenti del piano. La geometria euclidea del piano come geometria di Klein del piano rispetto al gruppo $\text{Isom}(E)$.

Descrizione complessa delle similitudini dirette del piano. Digressione sugli spazi affini associati a spazi vettoriali. Spazi affini vettoriali. Spazi affini numerici. Coordinate affini di punto. Affinità di uno spazio affine. Identificazione di $\text{Simil}^+(E)$ con il gruppo $\text{Aff}_1(C)$ delle affinità della retta affine numerica complessa C . Studio delle similitudini dirette del piano a partire dalla loro equazione complessa. Descrizione complessa delle similitudini inverse o indirette del piano. Cenni sullo studio delle similitudini inverse o indirette a partire dalla loro equazione complessa.

Rapporto semplice di tre punti del piano. Significato geometrico del modulo di un rapporto semplice. Condizione necessaria e sufficiente, in termini di rapporti semplici, affinché un triangolo sia isoscele. Significato geometrico dell'argomento di un rapporto semplice. Condizione necessaria e sufficiente, in termini di rapporti semplici, affinché tre punti siano allineati. Condizione necessaria e sufficiente, in termini di rapporti semplici, affinché un triangolo sia rettangolo. Triangoli simili. Triangoli direttamente simili. Triangoli inversamente simili. Condizione necessaria e sufficiente, in termini di rapporti semplici, affinché due triangoli siano direttamente simili. Forma di un triangolo. Forma dei triangoli equilateri. Condizioni necessarie e sufficienti affinché un triangolo sia equilatero. Teorema di Napoleone.

Teorema di Tolomeo-Eulero e suo corollario (Teorema di Pitagora). Considerazioni di tipo storico sul Teorema di Tolomeo-Eulero. Il numero aureo, o numero di Fidia, ϕ come rapporto della diagonale e del lato di un pentagono regolare. Calcolo del numero aureo ϕ con l'uso del Teorema di Tolomeo-Eulero. Sezione aurea di un segmento. Uso del Teorema di Tolomeo-Eulero per verificare che il lato di un decagono regolare coincide con la sezione aurea del raggio della circonferenza in cui il decagono regolare è inscritto.

Inversione (circolare) o simmetria rispetto ad una circonferenza o inversione per raggi vettori reciproci di polo un punto assegnato e di fattore k . Centro d'inversione. Digressione sulle trasformazioni involutorie e sui punti fissi o uniti di una trasformazione di un insieme. Proprietà immediate dell'inversione circolare. Costruzione geometrica del corrispondente di un punto nell'inversione rispetto ad una circonferenza. Equazioni cartesiane dell'inversione rispetto ad una circonferenza. Equazione complessa dell'inversione rispetto ad una circonferenza. Immagine di una retta passante per il centro d'inversione. Immagine di una retta non passante per il centro d'inversione. Immagine di una circonferenza passante per il centro d'inversione. Immagine di una circonferenza non passante per il centro d'inversione.

Condizione necessaria e sufficiente affinché una retta passante per un punto sia perpendicolare ad un'altra retta non passante per il punto. Circonferenze perpendicolari. Condizione necessaria e sufficiente affinché una circonferenza passante per un punto sia perpendicolare ad un'altra circonferenza non passante per il punto (facoltativa la dimostrazione della condizione sufficiente). Circonferenza generalizzata passante per tre punti di cui almeno due distinti. Circonferenza generalizzata passante per due punti distinti e perpendicolare ad una circonferenza assegnata.

Digressione sui postulati di Euclide. Formulazione di Playfair del V postulato di Euclide. Geometria assoluta. Geometria euclidea. Geometria ellittica. Geometria iperbolica. Modello di piano ellittico della sfera con i punti diametralmente opposti identificati. Rette e angoli di due curve nel modello di piano ellittico della sfera con i punti diametralmente opposti identificati. Modello di piano iperbolico del disco (aperto) di Klein. Rette nel modello del disco di Klein. Punti all'infinito di una retta e rette parallele nel modello del disco di Klein. Modello conforme di piano iperbolico del disco (aperto) di Poincaré. Rette nel modello del disco di Poincaré. Punti all'infinito di una retta nel modello del disco di Poincaré. Rette parallele nel modello del disco di Poincaré. Rette asintoticamente equivalenti e rette ultraparallele o iperparallele nel modello del disco di Poincaré. Distanza di due punti e sue proprietà nel modello del disco di Poincaré. Angolo di due curve nel modello del disco di Poincaré. Triangoli nel piano euclideo, nel piano ellittico e nel piano iperbolico. Triangoli asintotici. Somma degli angoli interni dei triangoli nel piano euclideo, nel piano ellittico nel piano iperbolico.

N. B.

Le indicazioni particolareggiate si riferiscono essenzialmente alle dispense:

- S. MARCHIAFAVA, *Appunti di mepvs dell'anno accademico 2012/13 – Secondo Semestre*.

Testi a cui si può fare riferimento sono:

- I. AGRICOLA and T. FRIEDRICH, *Elementary Geometry*, American Mathematical Society, 2008.

- L. HAHN, *Complex numbers and geometry*, The Mathematical Association of America, 1994.

- E. SERNESI, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 2000.