

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"**  
**FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI**  
**CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA**

**PROGRAMMA DEL**  
**CORSO DI MATEMATICHE ELEMENTARI DA UN PUNTO DI VISTA**  
**SUPERIORE (II PARTE)**  
**SVOLTO DAL PROF. RENZO MAZZOCCO**  
**NELL'ANNO ACCADEMICO 2013-2014**

Definizione di numero complesso. Unità immaginaria. Parte reale, parte immaginaria e coefficiente dell'unità immaginaria di un numero complesso. Numeri complessi reali e numeri complessi puramente immaginari. Coniugato di un numero complesso. Caratterizzazione dei numeri complessi reali. Caratterizzazione dei numeri complessi puramente immaginari. Uguaglianza di due numeri complessi. Definizione di somma e prodotto di due numeri complessi. Struttura di campo dell'insieme  $C$  dei numeri complessi. Coniugato della somma, della differenza, del prodotto e del quoziente di due numeri complessi. Espressione della parte reale, della parte immaginaria e del coefficiente dell'unità immaginaria di un numero complesso in termini del numero stesso e del suo coniugato. Il campo reale  $R$  come sottocampo del campo  $C$ . Cenni sul corpo  $H$  dei quaternioni.

Digressione sulle relazioni d'ordine. Non esistenza di relazioni d'ordine nel campo complesso  $C$ . Risoluzione di equazioni lineari e di sistemi di equazioni lineari a coefficienti complessi. Radici quadrate di un numero complesso. Risoluzione delle equazioni algebriche di secondo grado a coefficienti complessi. Teorema fondamentale dell'algebra (soltanto enunciato). Molteplicità di una soluzione di un'equazione algebrica. Soluzioni di un'equazione algebrica a coefficienti complessi reali; il caso delle equazioni di grado dispari.

Il campo  $C$  dei numeri complessi come spazio vettoriale complesso di dimensione (complessa) 1 e sua base canonica. Il campo  $C$  dei numeri complessi come spazio vettoriale reale di dimensione (reale) 2 e sua base canonica. Digressione sui prodotti scalari di uno spazio vettoriale reale. Prodotto scalare standard dello spazio vettoriale reale  $C$  e sue espressioni. Modulo e norma di un numero complesso. Proprietà del modulo di un numero complesso. Modulo del coniugato di un numero complesso. Modulo dell'inverso di un numero complesso. Modulo del prodotto di due numeri complessi. Modulo del quoziente di due numeri complessi. Numeri complessi unitari. Gruppo unitario d'ordine 1. Disuguaglianza di Cauchy Schwarz e disuguaglianza triangolare per i numeri complessi.

Rappresentazione geometrica o di Argand Gauss dei numeri complessi. Affissa di un punto del piano. Punto immagine del coniugato di un numero complesso. Punto immagine dell'opposto di un numero complesso. Punto immagine dell'opposto del coniugato di un numero complesso. Significato geometrico della somma e della differenza di due numeri complessi. Significato geometrico del prodotto scalare di due numeri complessi. Significato geometrico del modulo di un numero complesso. Distanza di due punti del piano come modulo della differenza delle affisse. Circonferenza unitaria e sua equazione complessa.

Argomento o fase di un numero complesso non nullo. Argomento principale di un numero complesso. Forma trigonometrica o polare di un numero complesso non nullo. Uguaglianza di due numeri complessi in forma trigonometrica. Richiami sulle coordinate polari nel piano. Significato geometrico dell'argomento di un numero complesso. Argomento del coniugato di un numero complesso. Argomento dell'opposto del coniugato di un numero complesso. Argomento dell'inverso di un numero complesso non nullo. Forma trigonometrica

del prodotto e del quoziente di due numeri complessi non nulli. Formula di de Moivre. Formule di triplicazione. Significato geometrico del prodotto di due numeri complessi.

Radici  $n$ -esime dell'unità e loro proprietà. Equazione ciclotomica. Poligono regolare di  $n$  lati associato alle radici  $n$ -esime dell'unità. Struttura di gruppo ciclico d'ordine  $n$  dell'insieme delle radici  $n$ -esime dell'unità. Radici  $n$ -esime di un numero complesso non nullo e loro proprietà. Formula di Eulero. Relazione di Eulero tra i numeri fondamentali  $0, 1, e, \pi, i$ . Forma esponenziale di un numero complesso non nullo. Forma esponenziale delle radici  $n$ -esime di un numero complesso non nullo.

Digressione sul metodo sintetico e sul metodo delle coordinate nello studio della geometria. Introduzione allo studio della geometria del piano con l'uso dei numeri complessi. Affissa del punto medio di due punti. Affissa del baricentro geometrico, o centroide, di  $n$  punti. Equazione parametrica, in termini di numeri complessi, della retta passante per due punti e del segmento individuato da due punti. Digressione sulla risoluzione dei sistemi lineari omogenei di  $n$  equazioni in  $n-1$  incognite di rango massimo. Equazione parametrica, in termini di numeri complessi, dell'asse di un segmento individuato da due punti. Richiami sul significato geometrico dei coefficienti  $a$  e  $b$  delle incognite dell'equazione cartesiana  $ax+by+c=0$  di una retta. Equazione, in termini di numeri complessi, di una retta. Condizione affinché una retta, rappresentata da una equazione in termini di numeri complessi, sia perpendicolare all'asse  $x$ .

Richiami sul significato geometrico dei coefficienti  $a$  e  $b$  nell'equazione cartesiana  $x^2+y^2+ax+by+c=0$  di una circonferenza. Equazione, in termini di numeri complessi, di una circonferenza. Circonferenze generalizzate. Condizione affinché una circonferenza, rappresentata da una equazione in termini di numeri complessi, sia perpendicolare all'asse  $x$ .

Trasformazioni di un insieme qualunque. Sostituzioni di un insieme finito. Gruppo delle trasformazioni di un insieme qualunque. Gruppo delle sostituzioni di un insieme finito. Gruppo alterno. Trasformazioni geometriche del piano. Trasformazioni affini o affinità del piano. Equazioni cartesiane di un'affinità. Gruppo  $\text{Aff}(E)$  delle affinità del piano. Affinità dirette e affinità inverse. Gruppo  $\text{Aff}^+(E)$  delle affinità dirette del piano. Traslazioni del piano e loro equazioni cartesiane e proprietà. Omotetie del piano e loro equazioni cartesiane e proprietà. Omotetie dirette ed omotetie inverse. Simmetria rispetto ad un punto. Figure affinemente equivalenti. Invarianti affini di una figura. La geometria affine come studio degli invarianti affini delle figure. La geometria di Klein di un insieme rispetto ad un gruppo di trasformazioni dell'insieme.

Similitudini del piano. Similitudini dirette e similitudini inverse. Equazioni cartesiane di una similitudine. Esempi notevoli di similitudini. Gruppo  $\text{Simil}(E)$  delle similitudini del piano. Gruppo  $\text{Simil}^+(E)$  delle similitudini dirette del piano. Isometrie del piano. Isometrie dirette o congruenze dirette o movimenti del piano. Isometrie inverse o congruenze inverse del piano. Equazioni cartesiane di una isometria. Rotazione attorno ad un punto e sue equazioni cartesiane. Simmetria ortogonale rispetto ad una retta. Simmetria ortogonale rispetto ad una retta con scorrimento o glissoriflessione. Gruppo  $\text{Isom}(E)$  delle isometrie del piano. Gruppo  $\text{Isom}^+(E)$  delle isometrie dirette del piano. La geometria euclidea del piano come geometria di Klein del piano rispetto al gruppo  $\text{Isom}(E)$ .

Descrizione complessa delle similitudini dirette del piano. Digressione sugli spazi affini associati a spazi vettoriali. Spazi affini vettoriali. Spazi affini numerici. Affinità di uno spazio affine. Identificazione di  $\text{Simil}^+(E)$  con il gruppo  $\text{Aff}_1(C)$  delle affinità della retta affine numerica complessa  $C$ . Studio delle similitudini dirette del piano a partire dalla loro equazione complessa. Descrizione complessa delle similitudini inverse del piano. Cenni sullo studio delle similitudini inverse a partire dalla loro equazione complessa.

Rapporto semplice di tre punti del piano. Significato geometrico del modulo di un rapporto semplice. Condizione necessaria e sufficiente, in termini di rapporto semplice, affinché un triangolo sia isoscele. Significato geometrico dell'argomento di un rapporto semplice. Condizione necessaria e sufficiente, in termini di rapporto semplice, affinché tre punti siano allineati. Condizione necessaria e sufficiente, in termini di rapporto semplice, affinché un triangolo sia rettangolo. Triangoli simili. Triangoli direttamente simili. Triangoli inversamente simili. Condizione necessaria e sufficiente, in termini di rapporti semplici, affinché due triangoli siano direttamente simili. Forma di un triangolo. Condizioni necessarie e sufficienti affinché un triangolo sia equilatero. Teorema di Napoleone. Teorema di Tolomeo-Eulero e suo corollario (teorema di Pitagora).

Inversione (circolare) o simmetria rispetto ad una circonferenza. Proprietà immediate dell'inversione circolare. Costruzione geometrica del corrispondente di un punto nell'inversione rispetto ad una circonferenza. Equazioni cartesiane dell'inversione rispetto ad una circonferenza. Equazione complessa dell'inversione rispetto ad una circonferenza. Immagine di una retta passante per il centro d'inversione. Immagine di una retta non passante per il centro d'inversione. Immagine di una circonferenza passante per il centro d'inversione. Immagine di una circonferenza non passante per il centro d'inversione. Principio di simmetria per la simmetria ortogonale rispetto ad una retta. Principio di simmetria per l'inversione rispetto ad una circonferenza (soltanto enunciato). Circonferenza generalizzata passante per tre punti distinti. Circonferenza generalizzata passante per due punti distinti e perpendicolare ad una circonferenza assegnata.

Digressione sui postulati di Euclide e sulle geometrie non euclidee. Modello conforme di piano iperbolico del disco (aperto) di Poincaré. Punti all'infinito di una retta nel modello del disco di Poincaré. Rette ultraparallele. Modello di piano ellittico della sfera con i punti diametralmente opposti identificati. Somma degli angoli interni dei triangoli del piano euclideo, dei triangoli del piano iperbolico e dei triangoli del piano ellittico. Modello conforme di piano iperbolico del semipiano (aperto) di Poincaré.

Cenni sulla proiezione stereografica di una sfera. Cenni sulla rappresentazione dei numeri complessi sulla sfera unitaria privata del polo Nord.

## **N. B.**

Le indicazioni particolareggiate si riferiscono essenzialmente alle dispense:

- S. MARCHIAFAVA, *Appunti di mepvs dell'anno accademico 2012/13 – Secondo Semestre*.

Testi a cui si può fare riferimento sono:

- I. AGRICOLA and T. FRIEDRICH, *Elementary Geometry*, American Mathematical Society, 2008.

- L. HAHN, *Complex numbers and geometry*, The Mathematical Association of America, 1994.

- E. SERNESI, *Geometria I*, Bollati Boringhieri, Torino, 2000.