

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"**  
**FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI**  
**CORSI DI LAUREA DI AREA FISICA**

**PROGRAMMA DEL**  
**CORSO DI GEOMETRIA (CANALE B)**  
**SVOLTO DAL PROF. RENZO MAZZOCCO**  
**NELL'ANNO ACCADEMICO 2010-2011**

**Parte I**

Richiami sugli insiemi numerici  $N$ ,  $Z$ ,  $Q$ ,  $R$ . Struttura di anello commutativo di  $Z$ . Struttura di campo di  $Q$  e di  $R$ .

Definizione e generalità sui numeri complessi. Operazioni sui numeri complessi. Struttura di campo dell'insieme  $C$  dei numeri complessi. Cenni sul campo  $Q(\sqrt{2})$ , sul corpo  $H$  dei quaternioni e sui campi finiti.

Digressione sul prodotto cartesiano di insiemi. Insieme delle  $n$ -ple ordinate di elementi di un campo  $K$ . Somma di due  $n$ -ple ordinate e sue proprietà. Prodotto di un elemento di  $K$  per una  $n$ -pla ordinata e sue proprietà. Combinazioni lineari di  $n$ -ple ordinate.

Definizione assiomatica di spazio vettoriale su un campo  $K$ . Struttura di spazio vettoriale su un campo  $K$  dell'insieme delle  $n$ -ple ordinate di elementi di  $K$ .

Matrici a elementi in un campo  $K$ . Righe e colonne di una matrice. Matrici rettangolari e matrici quadrate. Matrici nulle. Matrice opposta di una matrice assegnata. Matrici a scala e loro pivots. Matrice trasposta di una matrice assegnata. Matrici simmetriche. Matrici antisimmetriche. Matrici triangolari. Matrici diagonali. Matrici scalari. Matrici unità.

Somma di due matrici aventi lo stesso numero  $m$  di righe ed  $n$  di colonne. Proprietà della somma di matrici. Prodotto di un elemento del campo  $K$  per una matrice ad elementi nel campo  $K$  e sue proprietà. Struttura di spazio vettoriale dell'insieme delle matrici con  $m$  righe ed  $n$  colonne ad elementi in un campo  $K$ . Matrice trasposta della somma di due matrici. Matrice trasposta del prodotto di un elemento del campo  $K$  per una matrice ad elementi nel campo  $K$ . Decomposizione di una matrice quadrata nella somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica. Prodotto di una matrice riga per una matrice colonna e sue proprietà. Prodotto (righe per colonne) di due matrici moltiplicabili. Proprietà del prodotto di matrici. Struttura di anello dell'insieme delle matrici quadrate d'ordine  $n$  ad elementi in un campo  $K$ . Struttura di algebra dell'insieme delle matrici quadrate d'ordine  $n$  ad elementi in un campo  $K$ .

Matrici invertibili. Unicità della matrice inversa di una matrice invertibile. Caratterizzazione delle matrici invertibili. Gruppo lineare d'ordine  $n$  su un campo  $K$ . Potenze ad esponente intero positivo di una matrice quadrata. Matrici nilpotenti. Espressioni polinomiali di una matrice quadrata. Potenze ad esponente intero negativo di una matrice invertibile. Matrici ortogonali. Gruppo ortogonale d'ordine  $n$ . Struttura del gruppo ortogonale per  $n=1$  e per  $n=2$ .

Segmenti orientati o vettori applicati. Segmenti orientati degeneri. Digressione sulle relazioni di equivalenza. Relazione di equipollenza tra segmenti orientati. Vettori geometrici o liberi. Vettore geometrico nullo. Vettore geometrico opposto di un vettore geometrico assegnato. Vettori geometrici paralleli. Vettori geometrici complanari. Proprietà dei vettori geometrici. Somma di due vettori geometrici. Proprietà della somma di vettori geometrici. Prodotto di uno scalare reale per un vettore geometrico. Proprietà del prodotto di uno scalare reale per un vettore geometrico. Differenza di due vettori geometrici. Struttura di spazio vettoriale reale dell'insieme dei vettori geometrici.

Digressione sui postulati euclidei di tipo affine. Geometria affine del piano e dello spazio ordinario. Assiomatica vettoriale del piano e dello spazio ordinario. Compatibilità dei postulati euclidei di tipo affine ricondotta alla compatibilità della teoria dei numeri naturali.

Spazio vettoriale nullo. Spazio vettoriale  $K[x]$  dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in un campo  $K$ . Spazio vettoriale  $F(X,K)$  delle funzioni di un insieme  $X$  a valori in un campo  $K$ .

Sistemi di equazioni lineari a coefficienti in un campo  $K$ . Soluzioni di un sistema di equazioni lineari. Compatibilità di un sistema di equazioni lineari. Sistemi di equazioni lineari determinati. Sistemi di equazioni lineari indeterminati. Sistemi di equazioni lineari incompatibili o impossibili. Matrice dei coefficienti, o matrice incompleta, e matrice dei coefficienti e dei termini noti, o matrice completa, di un sistema di equazioni lineari. Scrittura matriciale di un sistema di equazioni lineari. Sistemi di equazioni lineari omogenei. Soluzione nulla o banale di un sistema di equazioni lineari omogeneo. Sistema di equazioni lineari omogeneo associato ad un sistema di equazioni lineari. Teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari.

Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari triangolari superiori. Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari a scala. Sistemi di equazioni lineari equivalenti. Operazioni elementari sui sistemi di equazioni lineari che permettono di ottenere sistemi di equazioni lineari equivalenti. Metodo o algoritmo di eliminazione di Gauss-Jordan per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.

Riduzione a scala di una matrice. Rango di una matrice come numero dei pivots di una sua riduzione a scala. Teorema di Rouché-Capelli. Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di equazioni lineari quadrato ammetta una sola soluzione. Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di equazioni lineari omogeneo ammetta soluzioni non banali.

Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari triangolari inferiori. Metodo di eliminazione di Gauss-Jordan all'indietro. Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari col doppio metodo di eliminazione di Gauss-Jordan. Matrici non singolari. Invertibilità delle matrici non singolari. Non singolarità della matrice trasposta e della matrice inversa di una matrice non singolare. Determinazione della matrice inversa di una matrice non singolare. Risoluzione dei sistemi lineari quadrati, con matrice dei coefficienti non singolare, con l'uso della matrice inversa. Rango delle matrici dipendenti da un parametro. Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari dipendenti da un parametro.

Alcune proprietà di uno spazio vettoriale su un campo  $K$  deducibili dagli assiomi. Prodotto cartesiano di due spazi vettoriali su uno stesso campo  $K$ .

Sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale. Proprietà dei sottospazi vettoriali. Sottospazi vettoriali impropri o banali. Esempi di sottospazi vettoriali di spazi vettoriali. Sottovarietà lineari affini di uno spazio vettoriale. Esempi notevoli di sottovarietà lineari affini di uno spazio vettoriale. Intersezione e somma di due sottospazi vettoriali di uno stesso spazio vettoriale. Somma diretta di due sottospazi vettoriali.

Proprietà della somma diretta di sottospazi vettoriali. Sottospazi vettoriali supplementari. Esempi di somme e di somme dirette di sottospazi vettoriali. Combinazioni lineari di vettori. Sottospazio vettoriale generato da un numero finito di vettori e proprietà relative. Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali finitamente generati. Esempi di spazi vettoriali finitamente generati e di spazi vettoriali non finitamente generati.

Vettori linearmente dipendenti. Vettori linearmente indipendenti. Proprietà dei vettori linearmente dipendenti. Esempi notevoli di vettori linearmente dipendenti. Proprietà dei vettori linearmente indipendenti. Basi (finite) di uno spazio vettoriale. Coordinate di un vettore rispetto ad una base assegnata. Traduzione scalare di una uguaglianza vettoriale. Coordinate della somma di due vettori e del prodotto di uno scalare per un vettore. Sistemi massimali di vettori linearmente indipendenti. Teorema dell'esistenza di basi di uno spazio vettoriale finitamente generato.

Coordinate di una combinazione lineare di vettori. Condizione analitica per la dipendenza lineare di un numero finito di vettori.

Massimo numero di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale avente una base finita. Dimensione di uno spazio vettoriale. La dimensione di uno spazio vettoriale come numero massimo di vettori linearmente indipendenti estraibili da un sistema di generatori. La dimensione di uno spazio vettoriale come numero massimo di vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale. Dimensione di alcuni esempi notevoli di spazi vettoriali.

Sistemi infiniti di generatori di spazi vettoriali non finitamente generati. Sistemi liberi di vettori di spazi vettoriali non finitamente generati. Basi infinite di spazi vettoriali non

finitamente generati. Dimensione infinita degli spazi vettoriali non finitamente generati: il caso di  $K[x]$ .

Condizioni affinché  $n$  vettori di uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  costituiscano una base. Teorema del completamento della base.

Dimensione e codimensione dei sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Formula di Grassmann vettoriale.

Spazio delle righe di una matrice. Rango per righe di una matrice. Spazio delle colonne di una matrice. Rango per colonne di una matrice. Uguaglianza dei ranghi per riga e per colonna di una matrice. Rango di una matrice. Rango di una matrice trasposta di una matrice assegnata. Algoritmo di Gauss-Jordan per l'estrazione di una base da un sistema di generatori. Uso delle coordinate di vettore nell'algebra lineare.

Equazioni parametriche e cartesiane di un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale di dimensione finita; eliminazione dei parametri.

Basi di somme e di intersezioni di sottospazi vettoriali. Condizioni affinché una somma di sottospazi vettoriali sia diretta.

Esempi notevoli di sottovarietà lineari affini. Equazioni parametriche e cartesiane di una sottovarietà lineare affine di uno spazio vettoriale di dimensione finita; eliminazione dei parametri.

Definizione di determinante per le matrici quadrate del primo, del secondo e del terzo ordine. Digressione sulle permutazioni di  $n$  elementi. Segno di una permutazione. Sostituzione associata ad una permutazione. Cenni sui gruppi di sostituzioni. Definizione di determinante di una matrice quadrata d'ordine  $n$ . Complemento algebrico o cofattore di un elemento di una matrice quadrata. Formula o regola di Laplace per il calcolo del determinante di una matrice quadrata (senza dimostrazione). Determinante di una matrice trasposta di una matrice assegnata.

Teorema fondamentale sui determinanti e suo corollario.

Teorema di unicità della funzione determinante. Teorema di caratterizzazione delle matrici non singolari come matrici a determinante non nullo. Teorema di Binet (soltanto enunciato). Determinante della matrice inversa di una matrice invertibile assegnata. Invertibilità di una matrice ammettente un'inversa destra oppure sinistra.

Rango di una sottomatrice di una matrice. Teorema di caratterizzazione del rango di una matrice come ordine massimo delle sottomatrici quadrate a determinante non nullo e suo corollario (soltanto enunciati). Teorema di Kronecker o delle sottomatrici quadrate orlate per il calcolo del rango di una matrice (soltanto enunciato).

Uso dei determinanti nello studio di sottospazi vettoriali e di sottovarietà lineari affini di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Calcolo della matrice inversa di una matrice invertibile con l'uso dei determinanti. Formula di Cramer per la risoluzione dei sistemi quadrati di equazioni lineari con matrice dei coefficienti a determinante non nullo. Risoluzione dei sistemi di  $n-1$  equazioni lineari omogenee in  $n$  incognite con matrice dei coefficienti di rango massimo.

Risoluzione di un sistema qualunque di equazioni lineari con l'uso dei determinanti. Risoluzione dei sistemi di equazioni lineari dipendenti da un parametro con l'uso dei determinanti.

Definizione assiomatica di spazio affine associato ad uno spazio vettoriale. Dimensione di uno spazio affine, rette e piani affini. Prime proprietà degli spazi affini. Esempi notevoli di spazi affini: spazio affine ordinario; spazi affini vettoriali; spazi affini numerici su un campo  $K$ . Riferimenti affini di uno spazio affine di dimensione finita. Coordinate affini di punto. Coordinate di un vettore individuato da due punti. Significato delle coordinate affini di punto nel caso dello spazio affine ordinario, nel caso di uno spazio affine vettoriale e nel caso di uno spazio affine numerico.

Sottospazi affini di uno spazio affine. Giacitura e dimensione di un sottospazio affine. Il caso dei sottospazi affini di dimensione due, uno e zero. Direzione e vettori direttori di un sottospazio affine di dimensione uno o retta. Sottospazi affini dello spazio affine ordinario. Sottospazi affini di uno spazio affine vettoriale. Prime proprietà dei sottospazi affini. Sottospazio affine generato da  $m+1$  punti. Punti indipendenti. Punti dipendenti. Punti

allineati. Punti complanari. Esempi di punti dipendenti e di punti indipendenti. Massimo numero di punti indipendenti in uno spazio affine di dimensione finita. Teorema di esistenza e unicità della retta passante per due punti distinti. Teorema di esistenza ed unicità del piano passante per tre punti non allineati.

Codimensione di un sottospazio affine di uno spazio affine di dimensione finita. Iperpiani. Equazioni parametriche di un sottospazio affine. Parametri direttori di una retta. Equazioni parametriche di una retta.

Equazioni cartesiane di un sottospazio affine. Eliminazione dei parametri. Il caso delle rette, dei piani e degli iperpiani. Stella di iperpiani con vertice in un punto assegnato. Iperpiani ed assi coordinati. Punti unità degli assi coordinati. Intersezione di sottospazi affini. Equazioni in forma di rapporti uguali di una retta. Stella di rette con vertice in un punto assegnato.

Parallelismo di due sottospazi affini. Condizione di parallelismo di due rette. Proprietà dei sottospazi affini paralleli. Cenni sugli spazi vettoriali quozienti. Teorema di esistenza ed unicità di un sottospazio affine passante per un punto e parallelo ad un sottospazio affine della stessa dimensione.

Coefficienti di giacitura di un iperpiano. Condizione di parallelismo di due iperpiani. Condizione di parallelismo di una retta ed un iperpiano. Sottospazi affini incidenti. Sottospazi affini sghembi.

Semirette, segmenti, triangoli, parallelogrammi, tetraedri, parallelepipedi, m-simplessi e m-parallelepipedi di uno spazio affine reale di dimensione qualunque. Figure convesse. Involucro o involucro convesso di una figura. Punto medio di due punti. Punto simmetrico di un punto rispetto ad un punto assegnato. Baricentro (geometrico) di  $m$  punti. Semispazi individuati da un iperpiano.

Condizione di allineamento di tre punti e rappresentazione parametrica e cartesiana di una retta di un piano affine. Parametri direttori e coefficiente direttore di una retta assegnata mediante un'equazione cartesiana. Parallelismo ed intersezione di rette di un piano affine. Equazioni cartesiane di un punto in un piano affine. Casi particolari dell'equazione cartesiana di una retta. Fasci propri di rette. Fasci impropri di rette. La direzione di una retta vista come punto improprio della retta. Cenni sulla retta impropria di un piano affine. Il fascio improprio di rette visto come fascio di rette passanti per il punto improprio delle rette.

Condizione di complanarità di quattro punti e rappresentazione parametrica e cartesiana di un piano di uno spazio affine tridimensionale. Equazione cartesiana della stella di piani di vertice un punto. Condizioni di allineamento di tre punti e rappresentazione parametrica e cartesiana di una retta di uno spazio affine tridimensionale. Parametri direttori di una retta assegnata mediante equazioni cartesiane. Parallelismo ed intersezione di piani. Parallelismo ed intersezione di rette e piani. Piano per un punto parallelo a due rette non parallele. Equazioni cartesiane di un punto in uno spazio affine tridimensionale. Casi particolari dell'equazione cartesiana di un piano. Complanarità di due rette. Condizione di complanarità di due rette (senza dimostrazione).

Fasci propri di piani. Fasci impropri di piani. Interpretazione della giacitura di un piano come retta impropria del piano. Cenni sul piano improprio di uno spazio affine tridimensionale. Interpretazione del fascio improprio di piani come fascio di piani avente come asse la retta impropria dei piani. Fasci di rette su un piano di uno spazio affine tridimensionale. Retta per un punto complanare con due rette sghembe. Retta per un punto parallela a due piani non paralleli.

Cambiamento di basi di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Matrice associata ad un cambiamento di basi. Formule di trasformazione di coordinate di vettore. Basi equiverse di uno spazio vettoriale reale. Orientazioni di uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Il caso degli spazi vettoriali geometrici di una retta, di un piano e dello spazio affine ordinario.

Cambiamento di riferimenti affini di uno spazio affine. Formule di trasformazione di coordinate affini di punto. Casi particolari di cambiamenti di riferimenti affini. Riferimenti affini equiversi di uno spazio affine reale. Orientazioni di uno spazio affine reale.

## Parte II

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali. Caratterizzazione delle applicazioni lineari. Proprietà delle applicazioni lineari. Applicazioni lineari surgettive, applicazioni lineari iniettive, isomorfismi tra spazi vettoriali. Esempi notevoli di applicazioni lineari. Forme e funzionali lineari. Esempi notevoli di forme lineari e di funzionali lineari. Restrizione di un'applicazione lineare ad un sottospazio vettoriale. Applicazione d'inclusione. Endomorfismi o operatori lineari di uno spazio vettoriale. Esempi notevoli di endomorfismi di uno spazio vettoriale. Struttura di spazio vettoriale dell'insieme  $\text{Hom}(V,W)$  delle applicazioni lineari di  $V$  in  $W$ . Spazio vettoriale duale di uno spazio vettoriale assegnato.

Prodotto operatorio di applicazioni lineari. Struttura di algebra dell'insieme  $\text{End}(V)$  degli endomorfismi di uno spazio vettoriale  $V$ . Isomorfismo inverso di un isomorfismo assegnato. Automorfismi o trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale  $V$ . Gruppo lineare  $\text{GL}(V)$  degli automorfismi di uno spazio vettoriale  $V$ . Teorema fondamentale sulle applicazioni lineari.

Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Teorema sulle dimensioni del nucleo e dell'immagine di un'applicazione lineare avente come dominio uno spazio vettoriale di dimensione finita. Condizioni necessarie e sufficienti affinché un'applicazione lineare tra spazi vettoriali aventi la stessa dimensione finita sia un isomorfismo. Condizione necessaria e sufficiente affinché due spazi vettoriali di dimensione finita siano isomorfi.

Matrice associata ad un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali  $V$  e  $W$ , di dimensioni finite  $n$  ed  $m$ , rispetto a due basi assegnate. Equazione matriciale di un'applicazione lineare. Equazioni cartesiane di un'applicazione lineare. Uso della matrice associata ad un'applicazione lineare per lo studio della iniettività e della surgettività dell'applicazione. Caratterizzazione di un isomorfismo tra spazi vettoriali in termini della matrice associata. Cenni sull'isomorfismo tra lo spazio vettoriale  $\text{Hom}(V,W)$  e lo spazio vettoriale delle matrici ad elementi in  $K$  con  $m$  righe ed  $n$  colonne. Dimensione dello spazio vettoriale duale di uno spazio vettoriale assegnato di dimensione finita. Matrice associata al prodotto operatorio di due applicazioni lineari. Matrice associata all'isomorfismo inverso di un isomorfismo assegnato.

Formula di trasformazione della matrice associata ad un'applicazione lineare. Matrici simili e loro rango. Invarianti di una matrice per coniugazione. Matrici congruenti e loro rango. Matrice associata ad un endomorfismo di uno spazio vettoriale rispetto ad una base assegnata. Formula di trasformazione della matrice associata ad un endomorfismo di uno spazio vettoriale. Determinante di un endomorfismo. Endomorfismi diagonalizzabili. Matrici diagonalizzabili. Cenni sull'isomorfismo tra l'algebra  $\text{End}(V)$  e l'algebra delle matrici quadrate d'ordine  $n$  ad elementi in  $K$ .

Autovettori ed autovalori di un endomorfismo di uno spazio vettoriale. Autovettori ed autovalori di una matrice quadrata. Diagonalizzabilità e basi di autovettori di un endomorfismo e di una matrice quadrata. Spettro di un endomorfismo e di una matrice quadrata. Autospatio associato ad un autovalore. Proprietà degli autovettori e degli autovalori. Esempi notevoli di endomorfismi diagonalizzabili e di endomorfismi non diagonalizzabili. Proprietà di autovettori associati ad autovalori distinti. Criterio di diagonalizzabilità degli endomorfismi e delle matrici.

Equazioni cartesiane di un autospatio. Polinomio caratteristico di una matrice quadrata. Invarianza per coniugazione del polinomio caratteristico di una matrice quadrata e dei suoi coefficienti. Polinomio caratteristico di un endomorfismo. Equazione caratteristica. Calcolo degli autovalori di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Digressione sulla molteplicità delle soluzioni di un'equazione algebrica e sul teorema fondamentale dell'algebra; campi algebricamente chiusi. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Proprietà delle molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori. Condizione necessaria e sufficiente affinché un endomorfismo o una matrice quadrata sia diagonalizzabile. Autovalori di una matrice simmetrica reale.

Applicazioni bilineari. Applicazioni bilineari simmetriche. Applicazioni bilineari antisimmetriche. Cenni sulle applicazioni multilineari. Forme bilineari. Forme bilineari

simmetriche, forme bilineari antisimmetriche e forme bilineari alterne. Esempi notevoli di forme bilineari simmetriche e di forme bilineari antisimmetriche.

Matrice associata ad una forma bilineare rispetto ad una base; il caso delle forme bilineari simmetriche e di quelle antisimmetriche. Formula di trasformazione della matrice associata ad una forma bilineare. Rango di una forma bilineare di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Forme bilineari non degeneri. Condizione necessaria e sufficiente affinché una forma bilineare di uno spazio vettoriale di dimensione finita sia non degenera (soltanto enunciato). Esempi notevoli di forme bilineari non degeneri e di forme bilineari degeneri.

Forma quadratica associata ad una forma bilineare. Proprietà delle forme quadratiche. Matrice associata ad una forma quadratica. Forma bilineare simmetrica polare di una forma quadratica. Identità di polarizzazione. Teorema di Carnot. Teorema di Pitagora.

Vettori ortogonali o perpendicolari rispetto ad una forma bilineare simmetrica. Sottospazio vettoriale ortogonale ad un sottoinsieme di vettori. Sottospazi vettoriali ortogonali. Vettori isotropi. Coefficiente di Fourier di un vettore rispetto ad un vettore non isotropo. Decomposizione di un vettore nella somma di due vettori ortogonali. Basi ortogonali rispetto ad una forma bilineare simmetrica. Cenni sulla diagonalizzabilità delle forme bilineari simmetriche.

Forme bilineari simmetriche reali definite positive, semidefinite positive, definite negative, semidefinite negative e non definite. Criterio di positività di una forma bilineare simmetrica reale.

Prodotti scalari, Esempi notevoli di prodotti scalari. Pseudoprodotti scalari. Esempi notevoli di pseudoprodotti scalari. Pseudoprodotto scalare di Minkowski: vettori tipo spazio, vettori tipo luce e vettori tipo tempo. Spazi vettoriali euclidei ovvero spazi vettoriali reali dotati di prodotto scalare. Esempi notevoli di spazi vettoriali euclidei. Modulo di un vettore. Proprietà del modulo di un vettore. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (dimostrazione facoltativa). Alcune applicazioni della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in Analisi Matematica. Disuguaglianza triangolare. Angolo convesso di due vettori.

Indipendenza lineare di vettori ortogonali. Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Polinomi di Legendre. Vettori unitari. Basi ortonormali e loro uso. Significato delle coordinate di un vettore rispetto ad una base ortonormale. Significato dei coefficienti dell'equazione cartesiana di un iperpiano vettoriale rispetto ad una base ortonormale. Cambiamento di basi ortonormali e matrici ortogonali.

Decomposizione di uno spazio vettoriale euclideo nella somma diretta di due sottospazi vettoriali ortogonali. Proiezione ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo su un sottospazio vettoriale. Simmetria ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo rispetto ad un sottospazio vettoriale; il caso particolare in cui il sottospazio sia una retta o un iperpiano vettoriale.

Prodotto vettoriale di due vettori di uno spazio vettoriale euclideo tridimensionale. Proprietà del prodotto vettoriale. Significato geometrico del modulo del prodotto vettoriale di due vettori indipendenti. Prodotto misto di tre vettori di uno spazio vettoriale euclideo tridimensionale. Proprietà del prodotto misto. Significato geometrico del segno del prodotto misto di tre vettori indipendenti. Significato geometrico del modulo del prodotto misto di tre vettori indipendenti.

Spazio euclideo associato ad uno spazio vettoriale euclideo. Esempi notevoli di spazi euclidei. Riferimenti cartesiani di uno spazio euclideo. Cambiamenti di riferimenti cartesiani e matrici ortogonali. Distanza di due punti di uno spazio euclideo. Proprietà della distanza. Digressione sugli spazi metrici. Uso delle coordinate cartesiane di punto per il calcolo della distanza di due punti. Sfere e dischi di uno spazio euclideo n-dimensionale. Versore di una retta orientata. Angolo convesso di due rette orientate. Condizione di perpendicolarità di due rette. Coseni direttori di una retta orientata. Vettori normali ad un iperpiano. Condizione di perpendicolarità tra retta e iperpiano. Versori normali ad un iperpiano. Distanza di un punto da un iperpiano. Distanza di un punto da una retta. Angoli tra iperpiani. Condizione di perpendicolarità di due iperpiani. Angoli tra rette e iperpiani.

Geometria di un piano euclideo: distanze, angoli, perpendicolarità, area di parallelogrammi e di triangoli. Geometria di uno spazio euclideo tridimensionale: distanze,

angoli, perpendicolarità, retta incidente e perpendicolare a due rette sghembe. area di parallelogrammi e di triangoli, volume di parallelepipedi e di tetraedri. Cenni sul volume di un n-parallelepipedo in uno spazio euclideo di dimensione n.

Digressione sulle applicazioni ortogonali tra spazi vettoriali euclidei. Endomorfismi ortogonali o unitari reali di uno spazio vettoriale euclideo. Gruppo ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo. Proprietà degli endomorfismi ortogonali. Automorfismi o trasformazioni ortogonali di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita e matrici ortogonali associate. Gruppo ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Rotazioni di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Cenni sulle trasformazioni di Lorentz.

Endomorfismi simmetrici o autoaggiunti reali di uno spazio vettoriale euclideo. Esempi notevoli di endomorfismi simmetrici. Proprietà degli autovalori e degli autovettori di un endomorfismo simmetrico. Sistema ortogonale. Teorema spettrale per gli endomorfismi simmetrici.

Forme bilineari simmetriche reali ed endomorfismi simmetrici associati. Forma canonica metrica di una forma bilineare simmetrica reale e della forma quadratica reale ad essa associata. Criterio di positività di una forma bilineare simmetrica reale in termini di autovalori. Forma canonica affine di una forma bilineare simmetrica reale e della forma quadratica reale ad essa associata.

Cenni sulle affinità di uno spazio affine associato ad uno spazio vettoriale. Cenni sulle isometrie di uno spazio euclideo e loro proprietà.

### **N.B.**

Le indicazioni particolareggiate si riferiscono essenzialmente al testo:

E. SERNESI, Geometria 1, Bollati Boringhieri, Torino, 2000.

Altri testi a cui si può fare riferimento sono:

M. ABATE e C. de FABRITIIS, Geometria analitica con elementi di algebra lineare, McGraw-Hill, Milano, 2010;

S. ABEASIS, Elementi di algebra lineare e geometria, Zanichelli, Bologna, 1993;

S. ABEASIS, Complementi di algebra lineare e geometria, Zanichelli, Bologna, 1993;

D. GHINELLI e R. MAZZOCCO, Quattrocento esercizi svolti di geometria, Mediterranean press, Commenda di Rende (CS), 1989;

E. MARTINELLI, Il metodo delle coordinate, Veschi, Roma, 1984.

### **Norme d'esame**

- (1) L'esame comprende una prova scritta ed una prova orale. E' ammesso alla prova orale soltanto chi sia in possesso di prova scritta valida sostenuta nella corrispondente sessione d'esami ovvero, limitatamente alla sessione estiva anticipata, abbia conseguito l'esonero dalla prova scritta.
- (2) Per ogni appello di esami, i candidati sono tenuti a prenotarsi su infoStud.
- (3) Alla prova scritta non è consentito avere con sé testi o appunti. Il candidato svolgerà l'elaborato su appositi fogli che gli saranno consegnati al momento: egli dovrà avere con sé soltanto l'occorrente per scrivere ed un documento di riconoscimento valido.
- (4) L'elaborato dovrà contenere concisa ma chiara illustrazione degli sviluppi eseguiti, senza riferimento ai fogli di minuta dei quali non sarà tenuto conto. Nel giudizio sarà tenuto conto della chiarezza espositiva. Al termine della prova scritta verrà pubblicata la soluzione.
- (5) I risultati delle prove scritte saranno resi noti prima dell'inizio delle prove orali. Prima dell'inizio di tali prove, nell'ora che sarà indicata, i candidati che lo desiderano potranno prendere visione del loro elaborato con la Commissione Esami.