ESERCIZI DI GEOMETRIA (Per FISICI)
CORSO DEL PROF. RENZO MAZZOCCO
A.A. 2009-2010
Foglio N. 6-bis

1. Spazio vettoriale euclideo numerico $V=R^3$. Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\to V$ definito da

$$F(v)=(x_1-x_2-x_3,-x_1+x_2-x_3,-x_1-x_2+x_3),$$

essendo $v=(x_1,x_2,x_3)$.

(a) Determinare la matrice A associata ad F rispetto alla base canonica di V.
(b) Verificare che F è simmetrico.
(c) Determinare una base ortonormale B′ di V costituita da autovettori rispetto ad F.
(d) Detta A′ la matrice associata ad F rispetto alla base B′, determinare una matrice ortogonale C tale che $A'=C^{-1}AC$.
(e) Scrivere l'espressione di F(v) rispetto alla base B′.

2. Spazio vettoriale euclideo numerico $V=R^4$. Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\to V$ definito da

$$F(v)=(x_2-x_4,x_1-x_3,-x_2-x_4,-x_1-x_3),$$

essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

(a) Determinare la matrice A associata ad F rispetto alla base canonica di V.
(b) Verificare che F è simmetrico.
(c) Determinare una base ortonormale B′ di V costituita da autovettori rispetto ad F.
(d) Detta A′ la matrice associata ad F rispetto alla base B′,determinare una matrice ortogonale C tale che $A'=C^{-1}AC$.
(e) Scrivere l'espressione di F(v) rispetto alla base B′.

3. Spazio vettoriale euclideo (V, < , >) di dimensione tre. Base ortonormale $B=(v_1,v_2,v_3)$. Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\to V$, definito da

$$F(v)=v-<v,u>u,$$

essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$, $u=v_1+v_2+v_3$.

(a) Verificare che l'endomorfismo F è simmetrico.
(b) Determinare una base ortonormale B′ di V, costituita da autovettori rispetto ad F.
(c) Scrivere l'espressione di F(v) rispetto a B′.

4. Spazio vettoriale euclideo numerico $V=\boldsymbol{R}^3$. Sia assegnata la forma quadratica reale $q:V\blacklozenge\boldsymbol{R}$, definita da

$$q(v)=-x_1^2-4x_1x_2-4x_1x_3-x_2^2-4x_2x_3-x_3^2,$$

essendo $v=(x_1,x_2,x_3)$.

(a) Determinare l'endomorfismo simmetrico $F:V\blacklozenge V$ associato a q.
(b) Determinare una base ortonormale opportuna di V rispetto alla quale q assume forma canonica metrica e scrivere tale forma canonica.
(c) Determinare una base opportuna di V rispetto alla quale q assume forma canonica affine e scrivere tale forma canonica.
(d) Determinare la segnatura e l'indice di nullità di q.
(e) Dire di che tipo è q.
(f) Determinare, se esiste, una base di V costituita da vettori isotropi rispetto a q.

5. Piano vettoriale numerico reale $V=\mathbf{R}^2$ dotato dello pseudo-prododotto scalare $<\ ,\ >$ definito da $<v,w>=x_1y_1-x_2y_2$, essendo $v=(x_1,x_2)$, $w=(y_1,y_2)$. Verificare che l'endomorfismo $F:V\to V$, definito da

$$F(v)=((5/4)x_1+(3/4)x_2,(3/4)x_1+(5/4)x_2),$$

è una trasformazione di Lorentz.