ESERCIZI DI GEOMETRIA (Per FISICI)
CORSO DEL PROF. RENZO MAZZOCCO
A.A. 2012-2013
Foglio N. 5

1.Spazio vettoriale numerico $V=\mathbf{R}^4$. Base canonica $B=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Verificare che la forma bilineare $b:V\times V\to\mathbf{R}$, definita da $b(v,w)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2+2x_3y_3+x_3y_4+x_4y_3+2x_4y_4$,
essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ e $w=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, è un prodotto scalare. Dotato V di tale prodotto scalare che, per comodità, denoteremo con $<\,,\,>$, si chiede di:

i) calcolare gli angoli convessi tra i vettori della base canonica;
ii) determinare una base ortonormale di V applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base canonica;
iii) posto $W=\mathrm{Span}(e_1,e_2)$, determinare $P_W(e_1-e_2+e_3-e_4)$ essendo $P_W : V\to W$ la proiezione ortogonale di V su W.

2.Spazio vettoriale reale V di dimensione 3, Base $B_V=(v_1,v_2,v_3)$ Sia assegnata la forma bilineare $b:V\times V\to\mathbf{R}$, definita da $b(v,w)=2x_1y_1+x_1y_3+2x_2y_2+x_3y_1+x_3y_3$,
essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$, $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3$.

i) Verificare che b è un prodotto scalare.
ii) Posto $b(v,w)=<\,,\,>$, determinare $|v|^2$.
iii) Determinare gli angoli convessi tra i vettori della base B_V.
iv) Assegnato $W=\mathrm{Span}(w_1,w_2)$, essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2+v_3$, verificare che $B_W=(w_1,w_2)$ è una base di W.
v) Determinare la base B_W' di W, ortonormale rispetto al prodotto scalare $<\,,\,>'$ indotto da $<\,,\,>$ su W, ottenuta applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base B_W.
vi) Determinare $P_W(v_3)$, essendo $P_W:V\to W$ la proiezione ortogonale di V su W.

3. Spazio vettoriale euclideo numerico $V=\mathbf{R}^4$, dotato del prodotto scalare standard. Base canonica $C=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i vettori $v_1=e_1-e_2$, $v_2=e_2-e_3$, $v_3=e_1+e_3$, $v_4=e_4$.

i) Verificare che i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 costituiscono una base B di V.
ii) Determinare gli angoli convessi tra i vettori della base B.
iii) Determinare una base ortonormale B' di V ottenuta applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base B.
iv) Determinare la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base C alla base B', precisandone il tipo.

4. Spazio vettoriale euclideo V di dimensione quattro, Base ortonormale $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sottospazio vettoriale W di equazioni cartesiane $x_1+x_3=0$, $x_4=0$.

i) Determinare una base ortonormale B_W di W.
ii) Decomporre il vettore $v=3v_1-v_2-v_3+v_4$ nella somma di due vettori w e w' appartenenti rispettivamente a W ed al complemento ortogonale di W.

5. Piano vettoriale euclideo $(V, <\,,\,>)$. Base ortonormale $B=(i,j)$. Sia assegnata la retta vettoriale $W:x+y=0$.

i) Determinare le equazioni della simmetria ortogonale $S_W:V\to V$ rispetto a W.
ii) Determinare il vettore $S_W(u)$, essendo $u=i+j$.
iii) Assegnata la retta vettoriale $U:x-y=0$, scrivere l'equazione cartesiana della retta vettoriale $S_W(U)$, simmetrica di U rispetto a W.

6. Spazio vettoriale euclideo $(V, <\,,\,>)$ di dimensione 3. Base ortonormale $B=(v_1,v_2,v_3)$. Assegnato il piano vettoriale $W:x_1-x_2+x_3=0$, si richiede di:

i) determinare un versore ortogonale a W;
ii) determinare le equazioni della simmetria ortogonale $S_W:V\to V$ di V rispetto a W;
iii) determinare il vettore $S_w(v')$, essendo $v'=-v_1+v_2-v_3$.