

ESERCIZI DI GEOMETRIA (Per FISICI)
CORSO DEL PROF. RENZO MAZZOCCO
A.A. 2011-2012
Foglio N. 5

1. Spazio vettoriale numerico $V = \mathbf{R}^4$. Base canonica $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Verificare che la forma bilineare $b: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, definita da $b(v, w) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + 2x_4y_4$, essendo $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $w = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, è un prodotto scalare. Dotato V di tale prodotto scalare che, per comodità, denoteremo con \langle, \rangle , si chiede di:

- i) calcolare gli angoli convessi tra i vettori della base canonica;
- ii) determinare una base ortonormale di V applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base canonica;
- iii) posto $W = \text{Span}(e_1, e_2)$, determinare $P_W(e_1 - e_2 + e_3 - e_4)$ essendo $P_W: V \rightarrow W$ la proiezione ortogonale di V su W .

2. Spazio vettoriale reale V di dimensione 3, Base $B_V = (v_1, v_2, v_3)$ Sia assegnata la forma bilineare $b: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, definita da

$$b(v, w) = 2x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_3,$$

$$\text{essendo } v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3, w = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3.$$

- i) Verificare che b è un prodotto scalare.
- ii) Posto $b(v, w) = \langle v, w \rangle$, determinare $|v|^2$.
- iii) Determinare gli angoli convessi tra i vettori della base B_V .
- iv) Assegnato $W = \text{Span}(w_1, w_2)$, essendo $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2 + v_3$, verificare che $B_W = (w_1, w_2)$ è una base di W .
- v) Determinare la base B_W' di W , ortonormale rispetto al prodotto scalare \langle, \rangle' indotto da \langle, \rangle su W , ottenuta applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base B_W .
- vi) Determinare $P_W(v_3)$, essendo $P_W: V \rightarrow W$ la proiezione ortogonale di V su W .

3. Spazio vettoriale euclideo numerico $V = \mathbf{R}^4$, dotato del prodotto scalare standard. Base canonica $C = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Siano assegnati i vettori $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_2 - e_3$, $v_3 = e_1 + e_3$, $v_4 = e_4$.

- i) Verificare che i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 costituiscono una base B di V .
- ii) Determinare gli angoli convessi tra i vettori della base B .
- iii) Determinare una base ortonormale B' di V ottenuta applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base B .
- iv) Determinare la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base C alla base B' , precisandone il tipo.

4. Spazio vettoriale euclideo V di dimensione quattro. Base ortonormale $B_V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Sia assegnato il sottospazio vettoriale W di equazioni cartesiane $x_1 + x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

- i) Determinare una base ortonormale B_W di W .
- ii) Decomporre il vettore $v = 3v_1 - v_2 - v_3 + v_4$ nella somma di due vettori w e w' appartenenti rispettivamente a W ed al complemento ortogonale di W .

5. Piano vettoriale euclideo (V, \langle, \rangle) . Base ortonormale $B = (i, j)$. Sia assegnata la retta vettoriale $W: x + y = 0$.

- i) Determinare le equazioni della simmetria ortogonale $S_W: V \rightarrow V$ rispetto a W .
- ii) Determinare il vettore $S_W(u)$, essendo $u = i + j$.
- iii) Assegnata la retta vettoriale $U: x - y = 0$, scrivere l'equazione cartesiana della retta vettoriale $S_W(U)$, simmetrica di U rispetto a W .

6. Spazio vettoriale euclideo (V, \langle, \rangle) di dimensione 3. Base ortonormale $B = (v_1, v_2, v_3)$. Assegnato il piano vettoriale $W: x_1 - x_2 + x_3 = 0$, si richiede di:

- i) determinare un versore ortogonale a W ;
- ii) determinare le equazioni della simmetria ortogonale $S_W: V \rightarrow V$ di V rispetto a W ;
- iii) determinare il vettore $S_W(v')$, essendo $v' = -v_1 + v_2 - v_3$.