

ESERCIZI DI GEOMETRIA (Per FISICI)
CORSO DEL PROF. RENZO MAZZOCCO
A.A. 2012-2013

Foglio N.1

1. Assegnate la matrice A, le cui righe sono

$$A^{(1)}=(1,-2,0,1), A^{(2)}=(0,1,-1,2), A^{(3)}=(3,-1,0,1),$$

e la matrice B, le cui colonne sono

$$B_{(1)}=^t(1,-1,2,0), B_{(2)}=^t(3,-1,0,1), B_{(3)}=^t(1,0,1,1),$$

calcolare i prodotti AB e BA.

2. Determinare la matrice

$$B = A^0 + A + A^2/2! + A^3/3! + A^4/4! + \dots + A^9/9!,$$

sapendo che le righe della matrice A sono

$$A^{(1)}=(0,0,0), A^{(2)}=(1,0,0), A^{(3)}=(3,-2,0).$$

3. Risolvere il sistema lineare, a coefficienti reali,

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, x_1 - x_3 + x_4 = 0, 2x_1 + x_2 - x_4 = 1,$$

usando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan.

4. Risolvere il sistema lineare omogeneo, a coefficienti reali,

$$x_1 - x_3 + x_5 = 0, 3x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0,$$

usando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan.

5. Discutere la compatibilità del sistema lineare

$$x_1 - x_2 + (k+1)x_3 - x_4 = k, x_1 + x_2 + x_4 = 1, 2x_1 + x_2 - kx_4 = 0,$$

dove k è un parametro reale, usando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan e determinare le soluzioni nei casi in cui esse esistano.

6. Sia V l'insieme dei numeri reali strettamente positivi. Posto $v+w=v \times w$, dove con $v \times w$ si indica il prodotto usuale di v e w, e posto $av=v^a$, dove con v^a si indica la potenza usuale di base v ed esponente reale a, verificare che V è uno spazio vettoriale reale.

7. Sia $V = M_2(\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali del secondo ordine. Verificare che il sottoinsieme U delle matrici X che hanno come elementi

$$x_{11}=0, x_{12}=a-b, x_{21}=a, x_{22}=b,$$

essendo $a, b \in \mathbf{R}$,

è un sottospazio vettoriale di V. Determinare una base di U.

8. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K.

i) Verificare che è generalmente falsa l'affermazione: "se n vettori v_1, v_2, \dots, v_n sono linearmente dipendenti, allora ciascuno di essi è combinazione lineare dei rimanenti".

ii) Verificare che: "se due vettori v_1, v_2 non nulli sono linearmente dipendenti, allora ciascuno di essi è multiplo dell'altro".

iii) Verificare che è generalmente falsa l'affermazione: "se tre vettori v_1, v_2, v_3 non nulli sono linearmente dipendenti, allora ciascuno di essi è combinazione lineare degli altri due".