RENZO MAZZOCCO

CORSO DI GEOMETRIA
(PER FISICI)

RACCOLTA DEGLI ESERCIZI D'ESONERO E D'ESAME DI GEOMETRIA
DELL'ANNO ACCADEMICO 2013-2014

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO"
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
Ottobre 2014

ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Co)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova Scritta del 21-11-2013

***Avvertenza:** Per la risoluzione dei sistemi lineari il candidato è tenuto ad usare il metodo di Gauss-Jordan oppure il metodo dei determinanti.*

1.1. Sia assegnato il sistema lineare, a coefficienti reali, nelle quattro incognite x_1, x_2, x_3, x_4

$$x_1 - x_2 + x_3 = h,\ x_1 + hx_3 = h,\ hx_1 - x_2 + x_3 = 1,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali il sistema sia compatibile.

(b) Determinare l'insieme S(h) delle soluzioni del sistema per i valori di h di cui al punto precedente.

(c) Per i valori di h di cui al punto (a) determinare anche una soluzione particolare del sistema e l'insieme $S_o(h)$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

Soluzione

(a) Applicando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan si ha che: per h=0 il sistema risulta equivalente al sistema lineare a scala incompatibile $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$, $0 = 1$; per h=1 il sistema risulta equivalente al sistema lineare a scala compatibile $x_1 - x_2 + x_3 = 1$, $x_2 = 0$; per $h \neq 0,1$ il sistema risulta equivalente al sistema lineare a scala compatibile $x_1 - x_2 + x_3 = h$, $x_2 + (h-1)x_3 = 0$, $(-h^2+h)x_3 = 1-h^2$. Pertanto il sistema risulta compatibile per ogni $h \neq 0$.

(b) <u>Caso h=1</u>. Risolvendo il sistema lineare a scala compatibile $x_1 - x_2 + x_3 = 1$, $x_2 = 0$ si ha $x_1 = 1-t_1$, $x_2 = 0$, $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, $t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}$ e quindi $S(1) = \{(1-t_1, 0, t_1, t_2) | t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}\}$.

<u>Caso h≠0.1</u>. Risolvendo il sistema lineare a scala compatibile $x_1 - x_2 + x_3 = h$, $x_2 + (h-1)x_3 = 0$, $(-h^2+h)x_3 = 1-h^2$ si ha $x_1 = -1$, $x_2 = (-h^2+1)/h$, $x_3 = (h+1)/h$, $x_4 = t$, $t \in \boldsymbol{R}$ e quindi $S(h) = \{(-1, (-h^2+1)/h, (h+1)/h, t) | t \in \boldsymbol{R}\}$.

<u>Caso h=1</u>. Risulta $S(1) = (1,0,0,0) + \{(-t_1, 0, t_1, t_2) | t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}\}$ e quindi una soluzione particolare del sistema è (1,0,0,0) mentre l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato è $S_o(1) = \{(-t_1, 0, t_1, t_2) | t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}\}$.

<u>Caso h≠0.1</u>. Risulta $S(h) = (-1, (-h^2+1)/h, (h+1)/h, 0) + \{(0,0,0,t) | t \in \boldsymbol{R}\}$ e quindi una soluzione particolare del sistema è $(-1, (-h^2+1)/h, (h+1)/h, 0)$ mentre l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato è $S_o(h) = \{(0,0,0,t) | t \in \boldsymbol{R}\}$.

1.2 Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Siano assegnati i vettori $u_1(h)=v_1-v_2+v_3$, $u_2(h)=-v_2+hv_4$, $u_3(h)=hv_1-v_3+hv_4$, essendo h un parametro reale, ed il sottospazio vettoriale $W: x_1+x_2+x_3=0,\ x_3+x_4=0$.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale i vettori $u_1(h)$, $u_2(h)$, $u_3(h)$ risultino linearmente dipendenti.

(b) Posto, per comodità, $u_1=u_1(h_0)$, $u_2=u_2(h_0)$, $u_3=u_3(h_0)$ ed $U=\mathrm{Span}(u_1,u_2,u_3)$, determinare una base e la dimensione di U.

(c) Determinare equazioni cartesiane di U.

(d) Determinare una base e la dimensione di W.

(e) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(f) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(g) Determinare un sottospazio vettoriale U′ supplementare di U entro U+W, ossia tale che risulti $U+W=U\oplus U'$.

Soluzione

(a) Imponendo che sia minore di 3 il rango della matrice che ha per colonne le colonne delle coordinate dei vettori $u_1(h)$, $u_2(h)$, $u_3(h)\}$, si ha che tali vettori risultano dipendenti se e soltanto se è $h=-1$, quindi il valore richiesto del parametro h è $h_0=-1$.

(b) Risulta anzitutto $u_1=u_1(-1)=v_1-v_2+v_3$, $u_2=u_2(-1)=-v_2-v_4$, $u_3=u_3(-1)=-v_1-v_3-v_4$. Una coppia di vettori linearmente indipendenti estratti dal sistema di generatori $\{u_1,u_2,u_3\}$ di U è, per esempio quella costituita dai vettori non proporzionali u_1, u_2. La coppia $B_U=(u_1,u_2)$ costituisce un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti estratti dal sistema di generatori $\{u_1,u_2,u_3\}$ e quindi è una base di U. Pertanto, essendo tale base costituita da due vettori, si ha che risulta $\dim(U)=2$.

(c) Imponendo che sia minore di 3 il rango della matrice che ha per colonne le colonne delle coordinate dei vettori u_1, u_2, e $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4$, si ha che equazioni cartesiane di U sono, per esempio, $x_1-x_3=0$, $x_1+x_2-x_4=0$.

(d) Il sistema di equazioni lineari omogenee che rappresenta W è a scala. Posto $x_2=t_1$, $x_4=t_2$, si ha subito $x_3=-t_2$, $x_1=-t_1+t_2$, essendo $t_1,t_2\in\boldsymbol{R}$. Allora l'insieme delle soluzioni di tale sistema è $S_o=\{(-t_1+t_2,t_1,-t_2,t_2)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}=\{t_1(-1,1,0,0)+t_2(1,0,-1,1))|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$ e quindi una base di W è $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=-v_1+v_2$, $w_2=v_1-v_3+v_4$, ed è $\dim(W)=2$.

(e) Un sistema di generatori di U+W è $\{u_1,u_2,w_1,w_2\}$. Applicando l'algoritmo di estrazione di una base da tale sistema di generatori si ha che una base di U+W è $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$ e quindi è $\dim(U+W)=3$.

(f) Equazioni cartesiane di $U\cap W$ sono $x_1-x_3=0$, $x_1+x_2-x_4=0$, $x_1+x_2+x_3=0$, $x_3+x_4=0$. Applicando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan, si ha che il sistema di equazioni lineari che rappresenta $U\cap W$ è equivalente al sistema lineare omogeneo a scala $x_1-x_3=0$, $x_2+x_3-x_4=0$, $x_3+x_4=0$. Posto $x_4=t$, tale sistema dà $x_3=-t$, $x_2=2t$, $x_1=-t$, $x_4=t$, essendo $t\in\boldsymbol{R}$. Risulta allora che l'insieme delle soluzioni del sistema è $S_o=\{(-t,2t,-t,t)|t\in\boldsymbol{R}\}=\{t(-1,2,-1,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$ e quindi una base di $U\cap W$ è, per esempio, $B_{U\cap W}=(z)$, essendo $z=-v_1+2v_2-v_3+v_4$, onde è $\dim(U\cap W)=1$.

(g) La base $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$ di U+W, di cui al punto (e), è un ampliamento della base $B_U=(u_1,u_2)$ di U, quindi un sottospazio vettoriale supplementare di U entro U+W è, per esempio, $U'=\mathrm{Span}(w_1)$.

2.1. Sia assegnato il sistema lineare, a coefficienti reali, nelle quattro incognite x_1, x_2, x_3, x_4

$$x_1- x_2-x_4=h,\ x_2-hx_4=-h,\ x_1+hx_2-x_4=-1,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali il sistema sia compatibile.

(b) Determinare l'insieme S(h) delle soluzioni del sistema per i valori di h di cui al punto precedente.

(c) Per i valori di h di cui al punto (a) determinare anche una soluzione particolare del sistema e l'insieme $S_o(h)$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

Soluzione

Procedendo come in 1.1 si ha:

(a) sistema risulta compatibile per $h\neq 0$;

(b) $S(-1)=\{(0,1-t_2,t_1,t_2)|t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$, $S(h)=\{((h^2-1)/h,-1,t,(h-1)/h)|t\in\boldsymbol{R}\}$ per $h\neq 0,-1$;

(c) caso h=-1, una soluzione particolare del sistema è (0,1,0,0,0) e risulta $S_o(-1)=\{(0,-t_2,t_1,t_2)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$;

caso $h\neq 0.-1$, una soluzione particolare del sistema è $((h^2-1)/h,-1,0,(h-1)/h)$ e risulta $S_o(h)=\{(0,0,t,0)|t\in\boldsymbol{R}\}$.

2.2 Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Siano assegnati i vettori $u_1(h)=-v_1+v_2+v_3$, $u_2(h)=v_1+hv_4$, $u_3(h)=hv_2+v_3+hv_4$, essendo h un parametro reale, ed il sottospazio vettoriale $W{:}x_1+x_2+x_3=0,\ x_3+x_4=0$.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale i vettori $u_1(h)$, $u_2(h)$, $u_3(h)$ risultino linearmente dipendenti.

(b) Posto, per comodità, $u_1=u_1(h_0)$, $u_2=u_2(h_0)$, $u_3=u_3(h_0)$ ed $U=\mathrm{Span}(u_1,u_2,u_3)$, determinare una base e la dimensione di U.

(c) Determinare equazioni cartesiane di U.

(d) Determinare una base e la dimensione di W.

(e) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(f) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(g) Determinare un sottospazio vettoriale U´ supplementare di U entro U+W, ossia tale che risulti $U+W=U\oplus U'$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) $h_0=1$;

(b) $u_1=u_1(1)=-v_1+v_2+v_3$, $u_2=u_2(1)=v_1+v_4$, $u_3=u_3(1)=v_2+v_3+v_4$, $B_U=(u_1,u_2)$, $\dim(U)=2$;

(c) equazioni cartesiane di U sono, per esempio, $x_2-x_3=0$, $x_1+x_2-x_4=0$;

(d) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=-v_1+v_2$, $w_2=v_1-v_3+v_4$, $\dim(W)=2$;

(e) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$, $\dim(U+W)=3$;

(f) $B_{U\cap W}=(z)$, essendo $z=2v_1-v_2-v_3+v_4$, $\dim(U\cap W)=1$;

(g) $U'=\mathrm{Span}(w_1)$.

3.1. Sia assegnato il sistema, a coefficienti reali, nelle quattro incognite x_1, x_2, x_3, x_4

$$x_1 - x_3+x_4=h,\ hx_1+x_4=h,\ x_1-x_3+hx_4=1,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali il sistema sia compatibile.

(b) Determinare l'insieme S(h) delle soluzioni del sistema per i valori di h di cui al punto precedente.

(c) Per i valori di h di cui al punto (a) determinare anche una soluzione particolare del sistema e l'insieme $S_o(h)$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

(d) *Soluzione*

Procedendo come in 1.1 si ha:

(a) sistema risulta compatibile per $h \neq 0$;

(b) $S(1)=\{(1-t_2,t_1,0,t_2)|t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$, $S(h)=\{((h+1)/h,t,(-h^2+1)/h,-1)|t\in\boldsymbol{R}\}$ per $h\neq 0,1$;

(c) caso h=1, una soluzione particolare del sistema è (1,0,0,0,0) e risulta $S_o(1)=\{(-t_2,t_1,0,t_2)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$;

caso $h\neq 0.-1$, una soluzione particolare del sistema è $((h+1)/h,0,(-h^2+1)/h,-1)$ e risulta $S_o(h)=\{(0,t,0,0)|t\in\boldsymbol{R}\}$.

3.2 Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Siano assegnati i vettori $u_1(h)=v_1-v_2+v_3$, $u_2(h)=-v_2+hv_4$, $u_3(h)=-v_1+hv_3+hv_4$, essendo h un parametro reale, ed il sottospazio vettoriale $W{:}x_1+x_2+x_3=0,\ x_1+x_4=0$.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale i vettori $u_1(h)$, $u_2(h)$, $u_3(h)$ risultino linearmente dipendenti.

(b) Posto, per comodità, $u_1=u_1(h_0)$, $u_2=u_2(h_0)$, $u_3=u_3(h_0)$ ed $U=\mathrm{Span}(u_1,u_2,u_3)$, determinare una base e la dimensione di U.

(c) Determinare equazioni cartesiane di U.

(d) Determinare una base e la dimensione di W.

(e) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(f) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(g) Determinare un sottospazio vettoriale U′ supplementare di U entro U+W, ossia tale che risulti $U+W=U\oplus U'$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) $h_0=-1$;

(b) $u_1=u_1(1)=v_1-v_2+v_3$, $u_2=u_2(1)=-v_2-v_4$, $u_3=u_3(1)=-v_1-v_3-v_4$, $B_U=(u_1,u_2)$, dim(U)=2;

(c) equazioni cartesiane di U sono, per esempio, $x_1-x_3=0$, $x_1+x_2-x_4=0$;

(d) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=-v_2+v_3$, $w_2=-v_1+v_2+v_4$, dim(W)=2;

(e) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$, dim(U+W)=3;

(f) $B_{U\cap W}=(z)$, essendo $z=-v_1+2v_2-v_3+v_4$, $\dim(U\cap W)=1$;

(g) $U'=\mathrm{Span}(w_1)$.

4.1. Sia assegnato il sistema lineare, a coefficienti reali, nelle quattro incognite x_1, x_2, x_3, x_4

$$x_2+x_3-x_4=-h,\ x_2-hx_3=-h,\ hx_2-x_3+x_4=-1,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali il sistema sia compatibile.

(b) Determinare l'insieme S(h) delle soluzioni del sistema per i valori di h di cui al punto precedente.

(c) Per i valori di h di cui al punto (a) determinare anche una soluzione particolare del sistema e l'insieme $S_o(h)$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

Soluzione

Procedendo come in 1.1 si ha:

(a) il sistema risulta compatibile per $h\neq 0$;

(b) $S(-1)=\{(t_1,1-t_2,t_2,0)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$, $S(h)=\{(t,-1,(h-1)/h,(h^2-1)/h)|t\in\boldsymbol{R}\}$ per $h\neq 0,-1$;

(c) caso $h=-1$, una soluzione particolare del sistema è (0,1,0,0,0) e risulta $S_o(-1)=\{(t_1,-t_2,t_2,0)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$;

caso $h\neq 0,-1$, una soluzione particolare del sistema è $(0,-1,(h-1)/h,(h^2-1)/h)$ e risulta $S_o(h)=\{(t,0,0,0)|t\in\boldsymbol{R}\}$.

4.2 Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Siano assegnati i vettori $u_1(h)=-v_2+v_3+v_4$, $u_2(h)=hv_1+v_2$, $u_3(h)=hv_1+v_3+hv_4$, essendo h un parametro reale, ed il sottospazio vettoriale $W:x_2+x_3+x_4=0,\ x_1+x_3=0$.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale i vettori $u_1(h)$, $u_2(h)$, $u_3(h)$ risultino linearmente dipendenti.

per comodità, $u_1=u_1(h_0)$, $u_2=u_2(h_0)$, $u_3=u_3(h_0)$ ed $U=Span(u_1,u_2,u_3)$, determinare una base e la dimensione di U.

(c) Determinare equazioni cartesiane di U.

(d) Determinare una base e la dimensione di W.

(e) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(f) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(g) Determinare un sottospazio vettoriale U′ supplementare di U entro U+W, ossia tale che risulti $U+W=U\oplus U'$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) $h_0=1$;

(b) $u_1=u_1(1)=-v_2+v_3+v_4$, $u_2=u_2(1)=v_1+v_2$, $u_3=u_3(1)=v_1+v_3+v_4$, $B_U=(u_1,u_2)$, dim(U)=2;

(c) equazioni cartesiane di U sono, per esempio, $x_3-x_4=0$, $x_1-x_2-x_4=0$;

(d) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=-v_1-v_2+v_3$, $w_2=-v_2+v_4$, dim(W)=2;

(e) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$, dim(U+W)=3;

(f) $B_{U\cap W}=(z)$, essendo $z=-v_1-2v_2+v_3+v_4$, $\dim(U\cap W)=1$;

(g) $U'=Span(w_1)$.

ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Co)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 23–1-2014

1. Spazio euclideo ordinario. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $P_h(1,-1,h)$, $Q_h(0,h,1)$, $R_h(2,-h-2,1)$, essendo h un parametro reale, e le rette r_1:x+y-z-1=0, x-y-z+1=0, r_2:x-z-2=0, y-z=0.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale i punti P_h, Q_h, R_h risultino allineati.

(b) Indicati semplicemente con P, Q, R i punti che si ottengono in corrispondenza del valore h_0 del parametro h di cui al punto precedente, determinare equazioni cartesiane della retta r generata da tali punti.

(c) Verificare che le rette r_1 ed r_2 non sono parallele.

(d) Determinare l'equazione cartesiana del piano p passante per l'origine O e parallelo alle rette r_1 e r_2.

(e) Verificare che la retta r ed il piano p sono incidenti e determinare le coordinate cartesiane del punto S= $r\cap p$.

(f) Indicate con U e W rispettivamente la direzione della retta r e la giacitura del piano p, determinare, se esistono, due vettori $u\in U$ e $w\in W$ tali che risulti v=u+w, essendo v=2i-j+3k.

(g) Scrivere equazioni cartesiane del fascio *F* di rette, giacenti sul piano p, ed avente come centro il punto S.

(h) Determinare equazioni cartesiane della retta s, appartenente al fascio *F*, tale che s risulti perpendicolare all'asse x.

Soluzione

(a) I vettori (geometrici) aventi come rappresentanti i segmenti orientati P_hQ_h e P_hR_h hanno come coordinate, rispettivamente, (-1,h+1,-h+1) e (1,-h-1,-h+1). Tali vettori risultano linearmente dipendenti se e soltanto se è h=1. Pertanto i punti P_h, Q_h e R_h risultano allineati se e soltanto se è h=1. Allora il valore richiesto del parametro è h_0=1.

(b) Ponendo $h=h_0=1$ nelle coordinate di P_h, Q_h e R_h, si ha P(1,-1,1), Q(0,1,1) ed R(2,-3,1). Essendo distinti i punti P e Q, si ha che la retta r, generata dai punti P, Q, R, coincide con la retta passante per i punti P e Q. Pertanto la retta r ha equazioni, in forma di rapporti uguali, (x-1)/(-1)=(y+1)/2=(z-1)/0 e quindi equazioni cartesiane, per esempio, 2x+y-1=0, z-1=0.

(c) Parametri direttori delle rette r_1 ed r_2 sono, per esempio, rispettivamente $(l_1,m_1,n_1)=(1,0,1)$ e $(l_2,m_2,n_2)=(1,1,1)$. Dalla non proporzionalità di tali terne di parametri direttori si trae che le rette r_1 ed r_2 non sono parallele.

(d) L'equazione cartesiana del piano p può essere ottenuta uguagliando a zero il determinante della matrice quadrata che ha come righe, rispettivamente, (x,y,z), (1,0,1), (1,1,1). Pertanto risulta p:x-z=0.

(e) La retta r ed il piano p non sono paralleli perché risulta $1\cdot(-1)+0\cdot 2+(-1)\cdot 0=-1\neq 0$ e quindi, essendo 3 la dimensione dello spazio vettoriale dei vettori geometrici, sono incidenti. Risolvendo il sistema costituito dall'equazione cartesiana di p e dalle equazioni cartesiane di r, si ha che il punto S= $r\cap p$ ha coordinate cartesiane (1,-1,1) e quindi coincide con il punto P.

(f) Intanto i vettori richiesti esistono perché la retta r ed il piano p sono incidenti. Essendo (-1,2,0) parametri direttori della retta r, si ha che la direzione U della retta r ammette come base il vettore di coordinate (-1,2,0), quindi sarà $u=-\rho i+2\rho j$, dove ρ è un opportuno numero reale da determinare. Essendo W:x-z=0, dette (λ,μ,ν) le coordinate del vettore w, la condizione $w\in W$

dà λ-ν=0. Traducendo scalarmente l'uguaglianza vettoriale v=u+w, si hanno allora le uguaglianze $2=-\rho+\lambda$, $-1=2\rho+\mu$, $3=\nu$ che, insieme all'uguaglianza $\lambda-\nu=0$, danno $\rho=1$, $\lambda=3$, $\mu=-3$, $\nu=3$. Pertanto i vettori richiesti sono u=-i+2j e w=3i-3j+3k.

(g) Essendo r e p incidenti nel punto S, il fascio *F* di rette, giacenti sul piano p, ed avente come centro il punto S può essere ottenuto intersecando il fascio di piani, avente come asse la retta r, con il piano p. Allora equazioni cartesiane di *F* sono, per esempio, $\sigma(2x+y-1)+\tau(z-1)=0$, $x-z=0$, ossia $2\sigma x+\sigma y+\tau z-\sigma-\tau=0$, $x-z=0$, $(\sigma,\tau)\in \mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

(e) Parametri direttori della retta generica del fascio *F* sono $(-\sigma,2\sigma+\tau,-\sigma)$, La condizione di perpendicolarità con l'asse x, che ha parametri direttori (1,0,0), dà $-\sigma=0$, da cui si trae, per esempio, $\sigma=0$, $\tau=1$. Allora equazioni cartesiane della retta s sono, per esempio, z-1=0, x-z=0.

2. Siano assegnate la matrice quadrata A_h, avente come righe $A_h^{(1)}=(-2,0,0,0)$, $A_h^{(2)}=(0,-3,0,1)$, $A_h^{(3)}=(0,0,-h,0)$, $A_h^{(4)}=(0,-2h,0,0)$, essendo h un parametro reale, e la matrice quadrata B, avente come righe $B^{(1)}=(-1,0,0,0)$, $B^{(2)}=(1,-1,0,0)$, $B^{(3)}=(0,0,-2,0)$, $B^{(4)}=(0,0,0,-2)$.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale la matrice A_h ammetta lo scalare -1 come autovalore.

(b) Indicata semplicemente con A la matrice corrispondente al valore h_0 del parametro h di cui al punto precedente, determinare gli autovalori della matrice A, indicando per ciascuno di essi la rispettiva molteplicità algebrica.

(c) Dire se la matrice A è o non è diagonalizzabile, giustificando la risposta.

(d) Nel caso in cui la matrice A fosse diagonalizzabile, determinare una matrice diagonale A´ ed una matrice invertibile C tale che risulti $A'=C^{-1}AC$.

(e) Verificare che le matrici A e B sono invertibili.

(f) Dire se le matrici B, $A^{-1}BA$ e $B^{-1}AB$ sono o non sono diagonalizzabili, giustificando la risposta.

Soluzione

(a) L'equazione caratteristica della matrice A_h è $\det(A_h-\lambda I)=0$, ossia $(\lambda+2)(\lambda+h)(\lambda^2+3\lambda+2h)=0$. Tale equazione ammette come soluzione $\lambda=-1$ se e soltanto se risulta h=1. Pertanto è $h_0=1$.

(b) Ponendo $h=h_0$ nell'equazione caratteristica della matrice A_h,, si ha che l'equazione caratteristica della matrice A è $(\lambda+2)^2(\lambda+1)^2=0$. Pertanto gli autovalori di A sono $\lambda_1=-2$, con molteplicità algebrica $a_1=2$, e $\lambda_2=-1$, con molteplicità algebrica $a_2=2$.

(c) Essendo 4 l'ordine di A e risultando $a_1+a_2=4$, si ha che la matrice A è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica g_1 dell'autovalore λ_1 è uguale ad a_1 e la molteplicità geometrica g_2 dell'autovalore λ_2 è uguale ad a_2. Sia V_{-2} l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1=-2$. Equazioni cartesiane di V_{-2} sono 0=0, $-x_2+x_4=0$, $x_3=0$, $-2x_2+2x_4=0$ e quindi risulta $V_{-2}=\{t_1(1,0,0,0)+t_2(0,1,0,1)|t_1,t_2\in \mathbf{R}\}$. Una base di V_{-2} è costituita dagli autovettori $v_1'=(1,0,0,0)$, $v_2'=(0,1,0,1)$ onde risulta $g_1=\dim(V_{-2})=2=a_1$. Si ha poi V_{-1}:$-x_1=0$, $-2x_2+x_4=0$, 0=0, $-2x_2+x_4=0$ e quindi è $V_{-1}=\{t_1(0,1,0,2)+t_2(0,0,1,0)|t_1,t_2\in \mathbf{R}\}$. Una base di V_{-1} è costituita dagli autovettori $v_3'=(0,1,0,2)$, $v_4'=(0,1,0,0)$ e quindi è $g_2=\dim(V_{-1})=2=a_2$. Pertanto la matrice A è diagonalizzabile.

(d) Una base di $V=\mathbb{R}^4$, costituita da autovettori rispetto alla matrice A, è, per esempio, $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$, essendo v_1' ,v_2', v_3', v_4' gli autovettori di cui al punto precedente. Allora una matrice diagonale A' ed una matrice invertibile C tale che risulti $A'=C^{-1}AC$ sono, per esempio, rispettivamente la matrice diagonale avente $a_{11}'= a_{22}'=\lambda_1=-2$ e $a_{33}'= a_{44}'=\lambda_2= -1$ e la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ alla base $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$, ossia la matrice avente come righe $C^{(1)}=(1,0,0,0)$, $C^2=(0,1,1,0)$, $C^3=0,0,0,1)$, $C^4=(0,1,2,0)$.
(e) Risulta $\det(A)=4\neq 0$ e $\det(B)=4\neq 0$, onde le matrici A e B sono invertibili.
(f) Intanto la matrice $B^{-1}AB$ è diagonalizzabile perché tale è la matrice simile A. Le matrici B e $A^{-1}BA$, essendo simili, sono entrambe diagonalizzabili o entrambe non diagonalizzabili, onde è sufficiente esaminare soltanto il caso della matrice B. L'equazione caratteristica della matrice B è $(\lambda+2)^2(\lambda+1)^2=0$, ossia coincide con l'equazione caratteristica della matrice A. Allora gli autovalori di B sono $\lambda_1=-2$, con molteplicità algebrica $a_1=2$, e $\lambda_2=-1$, con molteplicità algebrica $a_2=2$. Ebbene la matrice B, e quindi anche la matrice $A^{-1}BA$, non è diagonalizzabile perché la molteplicità geometrica g_2 dell'autovalore λ_2 vale 1 e quindi non uguaglia la molteplicità geometrica a_2 dello stesso autovalore. Infatti, in questo caso risulta V_{-1} :$0=0$, $x_1=0$, $-x_3=0$, $-x_4=0$ e quindi $V_{-1}=\{t(0,1,0,0)|t\in\mathbb{R}\}$, da cui si trae $g_2=\dim(V_{-1})=1$.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Co)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova scritta del 29–1-2014

1. Spazio euclideo ordinario. Riferimento cartesiano RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti A(-1,0,1) e B(0,1,1), la retta r:x-y+2z-1=0, x+2y-z+2=0 ed il piano p:x-z+1=0.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano q passante per il punto A e perpendicolare alla retta r.

(b) Detta r_1 la retta passante per i punti A e B, verificare che essa è contenuta nel piano q.

(c) Determinare equazioni parametriche della retta r_2 passante per il punto B, contenuta nel piano q e perpendicolare alla retta r_1.

(d) Determinare equazioni cartesiane della retta r_3 passante per il punto A, incidente la retta r_2 e parallela al piano p.

(e) Determinare le coordinate del punto d'incidenza $C=r_2\cap r_3$.

(f) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r_4 passante per l'origine O e parallela ai piani p e q.

(g) Detto D il punto il punto generico della retta r_4, calcolare il volume V del tetraedro ABCD al variare del punto D sulla retta r_4.

(h) Giustificare geometricamente il risultato ottenuto nel quesito (g).

Soluzione

(a) Si ha facilmente che parametri direttori della retta r sono, per esempio, (1,-1,-1). Allora il piano q passante per il punto A(-1,0,1) e perpendicolare alla retta r ha equazione cartesiana x+1-y-(z-1)=0, ossia x-y-z+2=0.

(b) Il punto A appartiene al piano q per costruzione ed il punto B appartiene al piano q perché le sue coordinate cartesiane soddisfano l'equazione cartesiana di tale piano. Allora la retta r_1 è contenuta nel piano q in quanto *una qualunque retta avente in comune con un piano due punti distinti è contenuta nel piano.*

(c) Parametri direttori della retta r_1 sono, per esempio, le coordinate (1,1,0) del vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato AB. Allora imponendo alla retta generica passante per il punto B, avente equazioni in forma di rapporti uguali $x/l_2=(y-1)/m_2=(z-1)/n_2$, di essere contenuta nel piano q e di essere perpendicolare alla retta r_1, si hanno le due condizioni $l_2-m_2-n_2=0$, $l_2+m_2=0$, che danno, per esempio, $(l_2,m_2,n_2)=(1,-1,2)$. Pertanto equazioni parametriche di r_2 sono, per esempio, $x=t_2$, $y=1-t_2$, $z=1+2t_2$, $t_2\in\boldsymbol{R}$.

(d) Una retta generica passante per il punto A(-1,0,1) ed incidente la retta r_2 ha equazioni in forma di rapporti uguali $(x+1)/(t_2+1)=y/(1-t_2)=(z-1)/(2t_2)$. Imponendo a tale retta di essere parallela al piano p:x-z+1=0, si ha la condizione t_2+1-2t_2, ossia $-t_2+1=0$, che dà $t_2=1$ e quindi equazioni cartesiane della retta r_3 sono x-z+2=0, y=0.

(e) Il punto d'incidenza $C=r_2\cap r_3$ è ovviamente il punto della retta r_2 che si ottiene per $t_2=1$ e quindi ha coordinate cartesiane (1,0,3).

(f) La retta r_4 può essere ottenuta come intersezione dei piani p´ e q´ passanti per l'origine O e paralleli rispettivamente ai piani p e q. Essendo p´:x-z=0 e q´:x-y-z=0, si ha che equazioni cartesiane di r_4 sono, per esempio, x-z=0, x-y-z=0, ovvero x-z=0, y=0. Allora equazioni parametriche di r_4 sono, per esempio, $x=t_4$, $y=0$, $z=t_4$, $t_4\in\boldsymbol{R}$.

(g) Un punto generico D della retta r_4 ha coordinate $(t_4,0,t_4)$, $t_4\in\boldsymbol{R}$. Essendo (1,1,0), (2,0,2), $(t_4+1,0,t_4-1)$, $t_4\in\boldsymbol{R}$, le coordinate dei vettori geometrici rappresentati rispettivamente dai segmenti orientati AB, AC, AD, il volume V del tetraedro ABCD, essendo uguale ad un sesto del modulo del prodotto misto di tali vettori, risulta essere uguale ad un sesto del modulo del determinante della matrice quadrata che ha come righe (1,1,0), (2,0,2), $(t_4+1,0,t_4-1)$. Eseguendo i calcoli si ha allora $V=|4|/6=2/3$ e quindi tale volume è costante.

(h) Il volume V risulta costante al variare del punto E sulla retta r_4 perché tale retta è parallela, per costruzione, al piano q che contiene la base ABC del tetraedro.

2. <u>Spazi vettoriali euclidei numerici</u> $V=\boldsymbol{R}^4$ e $W=\boldsymbol{R}^3$. Sia F_h:V→W l'applicazione lineare tale che $F_h(v)=(x_1-hx_3+x_4,x_1+x_2-x_4,hx_1+x_2-2x_3)$, essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ed h un parametro reale.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'applicazione lineare F_h non sia surgettiva.

(b) Indicata semplicemente con F l'applicazione lineare associata al valore h_0 del parametro di cui al quesito precedente, determinare la dimensione ed una base del nucleo Ker(F) dell'applicazione lineare F.

(c) Determinare la dimensione ed una base dell'immagine Im(F) dell'applicazione lineare F.

(d) Determinare equazioni cartesiane dell'immagine Im(F).

(e) Posto per semplicità U=Ker(F), determinare la dimensione ed una base ortonormale del sottospazio vettoriale $U^\perp$ ortogonale ad U.

Soluzione

(a) La matrice A_h associata all'applicazione lineare F_h, rispetto alle basi canoniche di V e W ha come righe $A_h^{(1)}=(1,0,-h,1)$, $A_h^{(2)}=(1,1,0,-1)$, $A_h^{(3)}=(h,1,-2,0)$. E' noto che un'applicazione lineare non è surgettiva se e soltanto se il suo rango è minore della dimensione del codominio, che nel nostro caso è 3. Calcoliamo dunque il rango $rg(A_h)$ al variare del parametro h. Considerato il minore B, del secondo ordine, costituito dagli elementi d'incontro delle prime due righe con le prime due colonne della matrice A_h, si ha subito che è $\det(B)=1\neq0$ indipendentemente dal valore di h. Allora per ogni valore di h è $2\leq rg(A_h)\leq3$. Orlando il minore B con la terza riga e la terza colonna di A_h, si ha un minore il cui determinante è h^2-h-2 che si annulla per h=-1 e per h=2. Orlando il minore B con la terza riga e la quarta colonna di A_h, si ha un minore il cui determinante vale 2-h e che quindi si annulla per h=2. Allora per il Teorema di Kronecker risulta $rg(A_h)=2$ per h=2 e $rg(A_h)=3$ per $h\neq2$. Pertanto il valore richiesto h_0 del parametro è h=2.

(b) Per $h=h_0=2$ risulta $F(v)=(x_1-2x_3+x_4,x_1+x_2-x_4,2x_1+x_2-2x_3)$. Equazioni cartesiane del nucleo Ker(F) sono $x_1-2x_3+x_4=0$, $x_1+x_2-x_4=0$, $2x_1+x_2-2x_3=0$. Il sistema costituito da tali equazioni lineari omogenee ha come matrice associata la matrice A, che si ottiene ponendo $h=h_0=2$ nella matrice A_h considerata nello svolgimento del quesito precedente. Allora, essendo rg(A)=2, si ha anzitutto dim(Ker(F))=dim(V)-rg(A)= 4-2=2. Fissata l'attenzione sul minore B di A, si ha che il sistema lineare omogeneo lineare che rappresenta Ker(F) risulta equivalente al sistema lineare omogeneo $x_1-2x_3+x_4=0$, $x_1+x_2-x_4=0$. Tale sistema, posto $x_3=t_1$, $x_4=t_2$, dà immediatamente $x_1=2t_1-t_2$, $x_2=-2t_1+2t_2$ e quindi $Ker(F)=\{(2t_1-t_2,-2t_1+2t_2,t_1,t_2)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}=\{(t_1(2,-2,1,0)+t_2(-1,2,0,1)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Allora una base di Ker(F) è costituita dai vettori $u_1=(2,-2,1,0)$ e $u_2=(-1,2,0,1)$.

(c) Essendo rg(A)=2, si ha anzitutto che è dim(Im(F))=2. Una base di Im(F) può essere ottenuta estraendo due vettori indipendenti dal sistema di generatori di Im(F) costituito dai vettori di W che hanno come colonne delle coordinate le colonne della matrice A. Allora, essendo indipendenti le prime due colonne di A, si ha che una base di Im(F) è costituita dai due vettori $w_1=(1,1,2)$ e $w_2=(0,1,1)$.

(d) Im(F) ha codimensione 1, quindi può essere rappresentato da una sola equazione cartesiana. Considerata la matrice quadrata che ha come righe (y_1,y_2,y_3), (1,1,2), (0,1,1), essendo y_1, y_2, y_3 tre incognite, e imponendo che il suo determinante sia nullo si ha Im(F):$y_1+y_2-y_3=0$.

(e) Posto U=Ker(F), si ha anzitutto che risulta $\dim(U^\perp)=\dim(V)-\dim(U)=4-2=2$. Per ottenere una base di $U^\perp$, ricordiamo che, come visto nel corso dello svolgimento del quesito (a), U può essere rappresentato dal sistema lineare omogeneo $x_1-2x_3+x_4=0$, $x_1+x_2-x_4=0$. Allora, stante il significato dei coefficienti delle incognite di una equazione lineare omogena, si ha che una base di $U^\perp$ è costituita dai due vettori $v_1=(1,0,-2,1)$ e $v_2=(1,1,0,-1)$. Tali vettori sono ortogonali rispetto al prodotto scalare standard perché il loro prodotto scalare standard è nullo. Allora (v_1,v_2) è una base ortogonale di $U^\perp$. Normalizzando tale base, si ha la base ortonormale (v_1',v_2') di $U^\perp$, essendo $v_1'=(1/6^{1/2},0,-2/6^{1/2},1/6^{1/2})$, $v_2'=(1/3^{1/2},1/3^{1/2},0,-1/3^{1/2})$.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Co)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 12-2-2014

1.1 Spazio euclideo numerico E^4. Riferimento cartesiano canonico $RC(0;e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i punti $P=(0,0,-1,0)$, $Q_k=(k+1,-k+1,2k-1,-2)$, $R=(0,-1,0,0)$ ed $R'=(1,-1,1,1)$, essendo k un parametro reale, e gli iperpiani $h:2x_2+x_3+x_4+1=0$, $h_1:x_1+x_2+x_3+2=0$, $h_2:x_1+x_2+x_4-1=0$.
(a) Determinare equazioni cartesiane della retta r_k passante per i punti P e Q_k.
(b) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per il punto R e perpendicolare all'iperpiano h.
(c) Determinare equazioni cartesiane della retta s´ passante per il punto R´, parallela agli iperpiani h_1 e h_2 e perpendicolare alla retta s.
(d) Determinare il valore k_0 del parametro k in corrispondenza del quale la retta r_k risulti parallela alla retta s´.
(e) Indicata semplicemente con r la retta r_k corrispondente al valore k_0 del parametro k, di cui al quesito precedente, determinare equazioni cartesiane del piano p contenente le rette parallele r ed s´.
(f) Determinare i versori delle rette parallele r ed s´ entrambe orientate secondo le x_4 crescenti.

Soluzione

(a) Equazioni della retta r_k, in forma di rapporti uguali, sono $x_1/(k+1)=x_2/(-k+1)=(x_3+1)/(2k)=x_4/(-2)$. Allora equazioni cartesiane di r_k sono, per esempio, $2x_1+(k+1)x_4=0$, $2x_2-(k-1)x_4=0$, $x_3+kx_4+1=0$.
(b) Essendo (0,2,1,1) coefficienti di giacitura dell'iperpiano h e tenuto presente del passaggio per il punto $R=(0,-1,0,0)$, si ha che equazioni della retta s, in forma di rapporti uguali, sono, per esempio, $x_1/0=(x_2+1)/2=x_3/1=x_4/1$. Pertanto equazioni cartesiane della retta s sono, per esempio, $x_1=0$, $x_2-2x_4+1=0$, $x_3-x_4=0$.
(c) Essendo (1,1,1,0) e (1,1,0,1) coefficienti di giacitura rispettivamente dell'iperpiano h_1 e dell'iperpiano h_2, si ha che, detti (l_1',l_2',l_3',l_4') i parametri direttori della retta s´, le condizioni di parallelismo della retta s´ con gli iperpiani h_1 e h_2 danno $l_1'+l_2'+l_3'=0$ e $l_1'+l_2'+l_4'=0$. Essendo (0,2,1,1) parametri direttori della retta s, la condizione di perpendicolarità della retta s´ con la retta s dà $2l_2'+l_3'+l_4'=0$. Si ha allora, per esempio, $(l_1',l_2',l_3',l_4')=(0,1,-1,-1)$. Tenuto presente che la retta s´ passa per il punto $R'=(1,-1,1,1)$, si ha che equazioni della retta s´ sono, per esempio, $(x_1-1)/0=(x_2+1)/1=(x_3-1)/(-1)=(x_4-1/(-1)$. Pertanto equazioni cartesiane della retta s´ sono, per esempio, $x_1-1=0$, $x_2+x_4=0$, $x_3-x_4=0$.
(d) Essendo $(k+1,-k+1,2k,-2)$ una quaterna di parametri direttori della retta r_k e (0,1.-1,-1) una quaterna di parametri direttori della retta s´, si ha che la condizione di parallelismo tra le rette r_k ed s´ è espressa da $rg(A_k)<2$, essendo A_k la matrice avente come righe tali quaterne di parametri direttori. Risulta facilmente $rg(A_k)<2$ se e soltanto se è $k=-1$ e quindi il valore richiesto del parametro k è $k_0=-1$.
(e) Il piano p contenente le rette parallele r ed s´ può essere ottenuto come piano passante per il punto $P=(0,0,-1,0)$ ed avente come giacitura $W=Span(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(0,1,-1,-1)$ vettore direttore della rette parallele r ed s´ e $w_2=R'-P=(1,-1,1,1)-(0,0,-1,1)=(1,-1,2,1)$. Si ha allora che equazioni cartesiane del piano p possono essere ottenute imponendo che sia minore di tre il rango della matrice che ha come righe $(x_1,x_2,x_3,,x_4)$, (0,1,-1,-1) e (1,-1,2,1). Imponendo tale condizione, si ha che equazioni cartesiane del piano p sono, per esempio, $x_1-x_2-x_3-1=0$, $x_2+x_4=0$.

(f) Rette parallele orientate concordemente hanno lo stesso versore. Essendo $w_1=(0,1,-1,-1)$ un vettore direttore delle rette parallele r ed s´, si ha che i versori di tali rette sono i vettori unitari $\pm w_1/|w_1|=\pm(0,1,-1,-1)/3^{½}$. L'orientazione delle rette parallele r ed s´ secondo le x_4 crescenti implica che sia positivo il coseno direttore $\cos x_4$^$r=\cos x_4$^$s´$; ciò avviene scegliendo tra i due versori $\pm w_1/|w_1|=\pm(0,1,-1,-1)/3^{½}$ quello che ha positiva la quarta coordinata e quindi è vers(r)=vers(s´)=$(0,-1,1,1)/3^{½}$.

1.2 <u>Spazio vettoriale euclideo</u> V <u>dei vettori geometrici.</u> <u>Base ortonormale</u> $B_V=(i,j,k)$. Siano assegnati i vettori $v_1=-i+j$, $v_2=i+k$, $v_3=-k$.
(a) Verificare che i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base dello spazio vettoriale euclideo V.
(b) Determinare gli angoli convessi formati dalle coppie di vettori della base (v_1,v_2,v_3).
(c) Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt alla base (v_1,v_2,v_3) e normalizzando, determinare una base ortonormale $B_V´=(i´,j´,k´)$ dello spazio vettoriale euclideo V.
(d) Determinare la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base B_V alla base $B_V´$ e dire di che tipo è tale matrice.
(e) Determinare il vettore $S_W(v)$ immagine del vettore v=3k nella simmetria ortogonale di V rispetto al piano vettoriale $W=\mathrm{Span}(v_1,v_2)$.

Soluzione

(a) La matrice quadrata che ha come colonne le colonne delle coordinate dei tre vettori v_1, v_2, v_3 ha determinante uguale ad $1\neq0$ e quindi tali vettori sono linearmente indipendenti. Essendo tre la dimensione di V, si ha allora che (v_1,v_2,v_3) è una base di V.
(b) Risulta $\cos v_1$^$v_2=v_1\times v_2/(|v_1||v_2|)=-1/2$ implicante v_1^$v_2=(2/3)\pi$, $\cos v_1$^$v_3=v_1\times v_3/(|v_1||v_3|)=0$ implicante v_1^$v_3=\pi/2$, $\cos v_2$^$v_3=<v_2\times v_3>/(|v_2||v_3|)=-1/2^{½}$ implicante v_2^$v_3=(3/4)\pi$.
(c) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt applicato alla base (v_1,v_2,v_3) dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3), essendo
$w_1=v_1=-i+j$,
$w_2=v_2-(v_2\times w_1/w_1\times w_1)w_1=i+k+(1/2)(-i+j)=(1/2)i+(1/2)j+k$,
$w_3=v_3-(v_3\times w_1/w_1\times w_1)w_1-(v_3\times w_2/w_2\times w_2)w_2=-k+(2/3)((1/2)i+(1/2)j+k)=$
$-k+(1/3)i+(1/3)j+(2/3)k=1/3)i+(1/3)j-(1/3)k$. Normalizzando la base ortogonale (w_1,w_2,w_3), si ha la base ortonormale $B_V'=(i',j',k')$, essendo $i'=w_1/|w_1|=-(1/\sqrt{2})i+(1/\sqrt{2})j$,
$j'=w_2/|w_2|=(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))i+(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))j+(\sqrt{2}/\sqrt{3})k$, $k'=w_3/|w_3|=(\sqrt{3}/3)i+(\sqrt{3}/3)j-(\sqrt{3}/3)k$.
(d) La matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base B_V alla base B_V' è la matrice quadrata A avente come colonne le colonne delle coordinate dei vettori unitari i′, j′, k′. Tale matrice è ortogonale perché le basi B_V e B_V' sono ortonormali.
(e) Osserviamo anzitutto che per il teorema di Gram Schmidt risulta $W=\mathrm{Span}(v_1,v_2)=\mathrm{Span}(w_1,w_2)$ e quindi $W=\mathrm{Span}(i',j')$. Allora, essendo k′ ortogonale a j′ e j′, si ha che $k'\in W^{\perp}$. Essendo poi $\dim(W^{\perp})=\dim(V)-\dim(W)=3-2=1$, si ha che $W^{\perp}$ ha una base ortonormale costituita dal solo vettore unitario k′. Pertanto risulta $S_W(v)=v-2(v\times k')k'=$ $3k-2((3k)\times k')\,k'=3k+2\sqrt{3}((\sqrt{3}/3)i+(\sqrt{3}/3)j-(\sqrt{3}/3)k)=3k+2i+2j-2k=2i+2j+k$.

2.1 Spazio euclideo numerico E^4. Riferimento cartesiano canonico RC(0;e_1,e_2,e_3,e_4). Siano assegnati i punti P=(0,-1,0,0), Q_k=(-2,1-2k,k,2-k), R=(0,0,-1,0) ed R´=(1,1,-1,1), essendo k un parametro reale, e gli iperpiani h:$x_1+x_2+2x_3+1=0$, h_1:$x_2+x_3+x_4+2=0$, h_2:$x_1+x_3+x_4-1=0$.

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta r_k passante per i punti P e Q_k.
(b) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per il punto R e perpendicolare all'iperpiano h.
(c) Determinare equazioni cartesiane della retta s´ passante per il punto R´, parallela agli iperpiani h_1 e h_2 e perpendicolare alla retta s.
(d) Determinare il valore k_0 del parametro k in corrispondenza del quale la retta r_k risulti parallela alla retta s´.
(e) Indicata semplicemente con r la retta r_k corrispondente al valore k_0 del parametro k, di cui al quesito precedente, determinare equazioni cartesiane del piano p contenente le rette parallele r ed s´.
(f) Determinare i versori delle rette parallele r ed s´ entrambe orientate secondo le x_1 decrescenti.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.1 si ha:
(a) equazioni cartesiane di r_k sono, per esempio, $(k-1)x_1-x_2-1=0$, $kx_1+2x_3=0$, $(k-2)x_1-2x_4=0$;
(b) equazioni cartesiane di s sono, per esempio, $x_1-x_2=0$, $2x_1-x_3-1=0$, $x_4=0$;
(c) equazioni cartesiane di s´ sono, per esempio, $x_1-x_2=0$, $x_1+x_3=0$, $x_4-1=0$;
(d) le rette r_k ed s´ risultano parallele per k= k_0=2;
(e) equazioni cartesiane di p sono, per esempio, $x_1+x_3=0$; $x_2+x_3-x_4+1=0$;
(f) vers(r)=vers(s´)=$(-1,-1,1,0)/3^{1/2}$.

2.2 Spazio vettoriale euclideo V dei vettori geometrici. Base ortonormale B_V=(i,j,k). Siano assegnati i vettori v_1=j-k, v_2=i+k, v_3=-i.
(a) Verificare che i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base dello spazio vettoriale euclideo V.
(b) Determinare gli angoli convessi formati dalle coppie di vettori della base (v_1,v_2,v_3).
(c) Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt alla base (v_1,v_2,v_3) e normalizzando, determinare una base ortonormale B_V´=(i´,j´,k´) dello spazio vettoriale euclideo V.
(d) Determinare la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base B_V alla base B_V´ e dire di che tipo è tale matrice.
(e) Determinare il vettore $S_W(v)$ immagine del vettore v=3i nella simmetria ortogonale di V rispetto al piano vettoriale W=Span(v_1,v_2).

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.2 si ha:

(a) i tre vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base perché risultano linearmente indipendenti ed è dim(V)=3;

(b) risulta v_1^v_2=(2/3)π, v_1^v_3=π/2, v_2^v_3=(3/4)π;

(c) risulta B_V´=(i´,j´,k´), essendo i´=w_1/|w_1|=(1/√2)i-(1/√2)j,
j´=w_2/|w_2|=(√2/(√3))i+(√2/(2√3))j+(√2/(2√3)k, k´=w_3/|w_3|=-(√3/3)i+(√3/3)j+(√3/3)k;

(d) la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base B_V alla base B_V' è la matrice che ha come colonne le colonne delle coordinate dei vettori unitari i′, j′, k′, tale matrice è ortogonale perché le basi B_V e B_V' sono ortonormali;

(e) si ha che W=Span(i′,j′) e che $W^{\perp}$ ha una base ortonormale costituita dal solo vettore unitario k′, pertanto risulta $S_W(v)=v-2(v\times k')k'=3i-2((3i)\times k')k'=3i+2\sqrt{3}(-(\sqrt{3}/3)i+(\sqrt{3}/3)j+(\sqrt{3}/3)k)=i+2j+2k$.

ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Co)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 20-6-2014

1. Spazio euclideo ordinario E. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $P_h(1,-1,h)$, $Q_h(h,1,1)$, $R_h(-1,-h,1)$, A(1,1,1), B(1,-1,1), i piani p_1:x-z=0, p_2:x-y+z-1=0 e le rette r_1: (x-1)/2=y/1=z/(-1), r_2: x/l=(y-1)/(-1)=(z-1)/2, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale i punti $P_h(1,-1,h)$, $Q_h(h,1,1)$, $R_h(-1,-h,1)$ risultino allineati e, indicati semplicemente con P, Q, R i punti corrispondenti a tale valore del parametro, determinare equazioni cartesiane della retta s_1 individuata dai punti P, Q, R.

(b) Determinare equazioni cartesiane della retta s_2 asse del segmento AB sul piano p_1.

(c) Determinare equazioni parametriche delle rette r_1 e r_2.

(d) Determinare equazioni cartesiane della retta s_3 incidente le rette r_1 e r_2 e perpendicolare al piano p_2.

(e) Decomporre il vettore v(1,1,1) nella somma di tre vettori v_1, v_2 e v_3 appartenenti rispettivamente alle direzioni W_1, W_2 e W_3 delle rette s_1, s_2 ed s_3.

Soluzione

(a) I punti $P_h(1,-1,h)$, $Q_h(h,1,1)$, $R_h(-1,-h,1)$ risultano allineati se e soltanto se i vettori geometrici rappresentati rispettivamente dai segmenti orientati P_hQ_h e P_hR_h sono linearmente dipendenti. Tali vettori, aventi rispettivamente coordinate (h-1,2,1-h) e (-2,1-h,1-h), risultano linearmente dipendenti se e soltanto se è h=-1, quindi è h_0=-1. Allora i punti che corrispondono a tale valore del parametro sono P((1,-1,-1), Q(-1,1,1) ed R(-1,1,1). Equazioni, in forma di rapporti uguali, della retta s_1 sono, per esempio, (x-1)/(-2)=(y+1)/2=(z+1)/2 e quindi equazioni cartesiane di s_1 sono, per esempio, x+z=0, y-z=0. Osserviamo esplicitamente che, stante il significato geometrico dei denominatori nelle equazioni di una retta in forma di rapporti uguali, parametri direttori della retta s_1 sono, per esempio, (l_1,m_1,n_1)=(1,-1,-1).

(b) La retta s_2, asse del segmento AB sul piano p_1, può essere ottenuta come retta passante per il punto medio M(1,0,1) del segmento AB, giacente sul piano p_1 e perpendicolare al vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato AB. Essendo (1,0,-1) coefficienti di giacitura del piano p_1 e (0,-2,0) le coordinate del vettore geometrico rappresentato da AB, detti (l_2,m_2,n_2) i parametri direttori della retta s_2, le condizioni assegnate sulla retta s_2 danno l_2-n_2=0, -2m_2=0 e quindi, per esempio, (l_2,m_2,n_2)=(1,0,1). Allora equazioni, in forma di rapporti uguali, della retta s_2 sono, per esempio, (x-1)/l=y/0=(z-1)/1. Pertanto, equazioni cartesiane di s_2 sono, per esempio, x-z=0, y=0.

(c) Dalle equazioni delle rette r_1 e r_2, che sono in forma di rapporti uguali, si trae immediatamente che equazioni parametriche di tali rette sono, rispettivamente, x=1+2t_1, y=t_1, z=-t_1, $t_1\epsilon \boldsymbol{R}$, e x=$t_2$, y=1-$t_2$, z=1+2$t_2$, $t_2\epsilon \boldsymbol{R}$.

(d) La retta s_3 può essere ottenuta imponendo alla retta generica passante per un punto di r_1 e per un punto di r_2 la condizione di perpendicolarità col piano p_2. Tenute presenti le equazioni parametriche delle rette r_1 e r_2 di cui al punto precedente, si ha che equazioni, in forma di rapporti uguali, di una retta generica incidente le rette r_1 ed r_2 sono, per esempio, (x-1-2t_1)/(t_2-1-2t_1)=(y-t_1)/(1-t_2-t_1)=(z+t_1)/(1+2t_2+t_1). Parametri direttori di tale retta sono, per esempio, (t_2-1-2t_1,1-t_2-t_1,1+2t_2+t_1). Imponendo che tali parametri direttori siano proporzionali ai coefficienti di giacitura (1,-1,1) del piano p_2, si ha il sistema 3t_1=0, -t_2-3t_1-2=0 che dà t_1=0, t_2=-2. Andando a sostituire tali valori nelle equazioni di tale retta generica, si ha che equazioni, in forma di rapporti uguali, della retta s_3 sono: (x-1)/(-3)=y/3=z/(-3) e quindi equazioni cartesiane, per esempio, x-z-1=0, y+z=0. Osserviamo esplicitamente che parametri direttori della retta s_3 sono, per esempio, $(l_3,m_3,n_3)=(1,-1,1)$.

(e) Dai punti (a), (b), (d) si evince immediatamente che vettori direttori delle rette s_1, s_2 ed s_3 sono, rispettivamente, $w_1(1,-1,-1)$, $w_2(1,0,1)$ e $w_3(1,-1,1)$. Allora i vettori v_1, v_2, v_3, tali che $v=v_1+v_2+v_3$, dovendo appartenere, rispettivamente, alle direzioni di s_1, s_2 e s_3 sono tali che $v_1=\rho_1 w_1$, $v_2=\rho_2 w_2$, $v_3=\rho_3 w_3$, essendo ρ_1, ρ_2, ρ_3 tre opportuni numeri reali da determinare. Traducendo scalarmente l'uguaglianza vettoriale $v=\rho_1 w_1+\rho_2 w_2+\rho_3 w_3$, si ha il sistema lineare $1=\rho_1+\rho_2+\rho_3$, $1=-\rho_1-\rho_3$, $1=-\rho_1+\rho_2+\rho_3$ che dà $\rho_1=0$, $\rho_2=2$, $\rho_3=-1$. Pertanto risulta $v_1(0,0,0)$, $v_2(2,0,2)$, $v_3(-1,1,-1)$.

2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnata la funzione reale $b : V\times V\rightarrow R$, definita da

$$b(v,w)=2x_1y_1+x_1y_4+x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+2x_3y_3+x_4y_1+x_4y_4,$$

essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4$ e $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3+y_4v_4$.

(a) Verificare che b è una forma bilineare simmetrica reale definita positiva ossia che è un prodotto scalare.

(b) Posto $b(v,w)=\langle v,w\rangle$, scrivere l'espressione di $|v|^2$. rispetto alla base B_V.

(c) Determinare gli angoli convessi formati dalle coppie di vettori della base B_V.

(d) Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt alla base B_V e normalizzando, determinare una base di V ortonormale rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$.

(e) Determinare il vettore $S_W(-v_4)$, immagine del vettore $-v_4$ nella simmetria ortogonale rispetto a W, essendo $W=\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)$.

Soluzione

(a) Risulta $b(v,w)={}^tXAY$, essendo ${}^tX=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, A la matrice quadrata avente come righe $A^{(1)}=(2,0,0,1)$, $A^{(2)}=(0,1,-1,0)$, $A^{(3)}=(0,-1,2,0)$, $A^{(4)}=(1,0,0,1)$ e ${}^tY=(y_1,y_2,y_3,y_4)$. Pertanto la funzione reale b è una forma bilineare reale. Essendo A una matrice simmetrica, la forma bilineare reale b è simmetrica. Risulta infine $\det(A_{(1,1)})=2>0$, $\det(A_{(2,2)})=2>0$, $\det(A_{(3,3)})=2>0$, $\det(A_{(4,4)})=1>0$ e quindi, per il criterio di positività di Hurewicz, la forma bilineare simmetrica reale b è definita positiva ossia è un prodotto scalare.

(b) Da $\langle v,w\rangle=2x_1y_1+x_1y_4+x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+2x_3y_3+x_4y_1+x_4y_4$ si trae $|v|^2=\langle v,v\rangle=2x_1^2+2x_1x_4+x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2+x_4^2$.

(c) Si ha $\cos v_1\hat{}v_2=\langle v_1,v_2\rangle/(|v_1||v_2|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_2=\pi/2$, $\cos v_1\hat{}v_3=\langle v_1,v_3\rangle/(|v_1||v_3|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_1\hat{}v_4=\langle v_1,v_4\rangle/(|v_1||v_4|)=1/2^{1/2}\Rightarrow v_1\hat{}v_4=\pi/4$, $\cos v_2\hat{}v_3=\langle v_2,v_3\rangle/(|v_2||v_3|)=-1/2^{1/2}\Rightarrow v_2\hat{}v_3=(3/4)\pi$, . $\cos v_2\hat{}v_4=\langle v_2,v_4\rangle/(|v_2||v_4|)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_3\hat{}v_4=\langle v_3,v_4\rangle/(|v_3||v_4|)=0\Rightarrow v_3\hat{}v_4=\pi/2$.

(d). Il procedimento di Gram Schmidt, applicato alla base B_V dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3,w_4), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=$
$v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,v_2\rangle/\langle v_2,v_2\rangle)v_2=v_2+v_3$,
$w_4=v_4-(\langle v_4,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_4,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2-(\langle v_4,w_3\rangle/\langle w_3,w_3\rangle)w_3=v_4-(\langle v_4,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_4,v_2\rangle/\langle v_2,v_2\rangle)v_2-(\langle v_4,v_2+v_3\rangle/\langle v_2+v_3,v_2+v_3\rangle)(v_2+v_3)=-(1/2)v_1+v_4$.
Essendo $|w_1|^2=2$, $|w_2|^2=1$, $|w_3|^2=1$, $|w_4|^2=1/2$, si ha che i vettori $u_1=w_1/|w_1|=(1/2^{1/2})v_1$, $u_2=w_2/|w_2|=v_2$, $u_3=w_3/|w_3|=v_2+v_3$ e $u_4=w_4/|w_4|=-(2^{1/2}/2)v_1+2^{1/2}v_4$ costituiscono una base ortonormale di V.

(e) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt è tale che $\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)=\mathrm{Span}(w_1,w_2,w_3)$. Ovviamente è anche $\mathrm{Span}(u_1,u_2,u_3)=\mathrm{Span}(w_1,w_2,w_3)$ e quindi

(u_1,u_2,u_3) è una base ortonormale di $W=\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)$. Allora W è un iperpiano di V e $W^{\perp}=\mathrm{Span}(u_4)$. Si ha pertanto $S_W(-v_4)=-v_4-2P_{W^{\perp}}(-v_4)=$
$-v_4-2(\langle -v_4,u_4\rangle u_4=-v_4-2\langle -v_4,-(2^{1/2}/2)v_1+2^{1/2}v_4\rangle(-(2^{1/2}/2)v_1+2^{1/2}v_4)=-v_4-2(2^{1/2}/2)(-(\sqrt{2}^{1/2}/2)v_1+2^{1/2}v_4)=$
$-v_4-v_1+2v_4=-v_1+v_4$.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Co)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 23-9-2014

1. Spazio euclideo numerico E^4. Riferimento euclideo canonico RC(0;e_1,e_2,e_3,e_4). Siano assegnati i punti $P=(0,1,1,0)$, $P_1=(1,1,1,1)$, $P_2=(1,0,0,1)$, gli iperpiani $h:x_1-x_2+x_3-x_4+1=0$, $h':x_1+x_3+x_4-1=0$ e le rette $r:x_1+x_2=0$, $x_3=0$, $x_1-x_4+1=0$, $r_1:(x_1-1)/0=x_2/1=x_3/(-1)=x_4/1$, $r_2:x_1=1+t_2$, $x_2=-t_2$, $x_3=2+t_2$, $x_4=3$, $t_2\in\boldsymbol{R}$.

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta r´ passante per il punto P, parallela agli iperpiani h ed h´ e perpendicolare alla retta r.

(b) Determinare equazioni cartesiane dell'iperpiano h_1 passante per il punto P_1 e perpendicolare alla retta r_1.

(c) Determinare equazioni cartesiane dell'iperpiano h_2 passante per il punto P_2 e perpendicolare alla retta r_2.

(d) Verificare che il sottoinsieme $S=h_1\cap h_2$ è un sottospazio affine di E^4 e determinarne la dimensione.

(e) Determinare la mutua posizione della retta r´ e del sottospazio affine S.

Soluzione

(a) Coefficienti di giacitura degli iperpiani h ed h´ sono, rispettivamente, $(a_1,a_2,a_3,a_4)=(1,-1,1,-1)$ e $(a_1',a_2',a_3',a_4')=(1,0,1,1)$. Posto $x_1=t$ nelle equazioni cartesiane della retta r, si ha che equazioni parametriche di r sono $x_1=t$, $x_2=-t$, $x_3=0$, $x_4=1+t$, $t\in\boldsymbol{R}$ e quindi parametri direttori di r sono $(l_1,l_2,l_3,l_4)=(1,-1,0,1)$. La retta r´ appartiene alla stella di rette di vertice il punto P e quindi ha equazioni, in forma di rapporti uguali, del tipo $x_1/l_1'=(x_2-1)/l_2'=(x_3-1)/l_3'=x_4/l_4'$, con (l_1',l_2',l_3',l_4') parametri direttori da determinare. La condizione di parallelismo di r´ con l'iperpiano h, la condizione di parallelismo di r´ con l'iperpiano h´ e la condizione di perpendicolarità di r´ con la retta r danno rispettivamente $l_1'-l_2'+l_3'-l_4'=0$, $l_1'+l_3'+l_4'=0$ e $l_1'-l_2'+l_4'=0$. Pertanto parametri direttori di r´ sono, per esempio, $(l_1',l_2',l_3',l_4')=(3,2,-2,-1)$. Allora equazioni, in forma di rapporti uguali, di r´ sono, per esempio, $x_1/3=(x_2-1)/2=(x_3-1)/(-2)=x_4/(-1)$ e quindi equazioni cartesiane di r´ sono, per esempio, $x_1/3=x_4/(-1)$, $(x_2-1)/2=x_4/(-1)$, $(x_3-1)/(-2)=x_4/(-1)$, ossia $x_1+3x_4=0$, $x_2+2x_4-1=0$, $x_3-2x_4-1=0$.

(b) La retta r_1 è assegnata mediante equazioni in forma di rapporti uguali. Stante il significato geometrico dei denominatori in tali equazioni, si ha che parametri direttori di tale retta sono, per esempio, (0,1,-1,1). Allora l'iperpiano h_1 passante per P_1 e perpendicolare alla retta r_1, dovendo avere i coefficienti di giacitura proporzionali a tali parametri direttori, ha come equazione cartesiana, per esempio, $x_2-1-(x_3-1)+x_4-1=0$, ossia $x_2-x_3+x_4-1=0$.

(c) La retta r_2 è assegnata mediante equazioni parametriche nel parametro t_2. Stante il significato geometrico dei coefficienti del parametro t_2 in tali equazioni, si ha che parametri direttori di tale retta sono, per esempio, (1,-1,1,0). Allora l'iperpiano h_2 passante per P_2 e perpendicolare alla retta r_2, dovendo avere i coefficienti di giacitura proporzionali a tali parametri direttori, ha come equazione cartesiana, per esempio, $x_1-1-x_2+x_3=0$, ossia $x_1-x_2+x_3-1=0$.

(d) Equazioni cartesiane di $S=h_1\cap h_2$ sono $x_2-x_3+x_4-1=0$, $x_1-x_2+x_3-1=0$. Il sistema lineare che rappresenta S è equivalente al sistema lineare a scala di due equazioni in quattro incognite $x_1-x_2+x_3-1=0$ $x_2-x_3+x_4-1=0$, il quale è compatibile. Pertanto S è un sottospazio affine di $\boldsymbol{R}^4$ con giacitura W: $x_2-x_3+x_4=0$, $x_1-x_2+x_3=0$ e quindi di dimensione 2, ossia S è un piano.

(e) Andando a sostituire i parametri direttori 3, 2, -2, -1 della retta r´ rispettivamente al posto di x_1, x_2, x_3, x_4 nelle equazioni cartesiane della giacitura W di S, si ha 3=0, -1=0, onde la retta r' ed il piano S non sono paralleli. Dalle equazioni in forma di rapporti uguali della retta r' si trae immediatamente che equazioni parametriche di r' sono $x_1=3t'$, $x_2=1+2t'$, $x_3=1-2t'$, $x_4=-t'$, $t'\in\mathbb{R}$. Il punto generico variabile sulla retta r' ha allora coordinate cartesiane $(3t',1+2t',1-2t',-t')$. Andando a sostituire tali coordinate rispettivamente al posto di x_1, x_2, x_3, x_4 nelle equazioni cartesiane di S si ha $1+2t'-(1-2t')-t'-1=0$, $3t'-(1+2t')+(1-2t')-1=0$, ossia $3t'-1=0$, $-t'-1=0$. Allora nessun punto di r' appartiene a S, ossia r' ed S sono disgiunti. Pertanto r' ed S non essendo paralleli ed essendo disgiunti sono sghembi.

2. Spazio vettoriale euclideo V dei vettori geometrici dello spazio euclideo ordinario. Base ortonormale $B_V=(i,j,k)$. Siano assegnati i vettori $v_1=(h-1)i+(1-h)j+(1-h)k$, $v_2=(1-h)i+(h-1)j-hk$, $v_3=(h-1)i+(h-1)j$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro reale h in corrispondenza del quale (v_1,v_2,v_3) sia una base ortogonale di V e determinare esplicitamente tale base.

(b) Determinare la base ortonormale $B_V'=(i',j',k')$ che si ottiene normalizzando la base ortogonale (v_1,v_2,v_3).

(c) Determinare la matrice C del cambiamento di base nel passaggio dalla base ortonormale B_V alla base ortonormale B_V' e dire di che tipo è tale matrice.

(d) Assegnato il sottospazio vettoriale $U:x+y+2z=0,\ 2x-y+z=0$, determinare una base ortonormale di U ed una base ortonormale del sottospazio vettoriale $W=U^\perp$.

(e) Determinare la proiezione ortogonale $P_W(v)$ del vettore $v=3i$ su W.

Soluzione

(a) Indicato con $\times$ il prodotto scalare ordinario, si ha che i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base ortogonale se e soltanto se $v_1\times v_2=0$, $v_1\times v_3=0$, $v_2\times v_3=0$ e nessuno di loro è il vettore nullo. Ma è $v_1\times v_2=(h-1)(1-h)+(1-h)(h-1)-(1-h)h=-2h^2+4h-2-h+h^2=-h^2+3h-2$, $v_1\times v_3=(h-1)^2+(1-h)(h-1)=0$, $v_2\times v_3=(1-h))(h-1)+(h-1)^2=0$. Allora i vettori i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base ortogonale se e soltanto se risulta $-h^2+3h-2=0$ e nessuno di loro è il vettore nullo. Soluzioni dell'equazione di secondo grado sono h=1 ed h=2. Per h=1 si ha che i vettori v_1 e v_3 sono nulli, quindi tale valore del parametro è da scartare. Per h=2 nessuno dei tre vettori coincide con il vettore nullo quindi il valore h_0 richiesto è 2. I vettori richiesti sono allora $v_1=i-j-k$, $v_2=-i+j-2k$, $v_3=i+j$.

(b) Risulta $|v_1|=3^{1/2}$, $|v_2|=6^{1/2}$, $|v_3|=2^{1/2}$. Pertanto la base ortonormale $B_V'=(i',j',k')$ richiesta è tale che $i'=v_1/|v_1|=3^{-1/2}(i-j-k)$, $j'=6^{-1/2}(-i+j-2k)$, $k'=2^{-1/2}(i+j)$.

(c) La matrice C del cambiamento di base, nel passaggio dalla base ortonormale B_V alla base ortonormale B_V' ha come righe $C^{(1)}=(3^{-1/2},-6^{-1/2},2^{-1/2})$, $C^{(2)}=(-3^{-1/2},6^{-1/2},2^{-1/2})$, $C^{(3)}=(-3^{-1/2},(-2)6^{-1/2},0)$. Tale matrice è ortogonale perché esprime il cambiamento tra due basi ortonormali.

(d) Risulta immediatamente $U=\{t(i+j-k)|t\in\mathbb{R}\}$, quindi U è una retta vettoriale ed una sua base è costituita, per esempio, dal solo vettore $u=i+j-k$. Una base ortonormale di U è allora costituita dal solo vettore unitario $u'=3^{-1/2}(i+j-k)$. Stante il significato geometrico dei coefficienti delle incognite nelle equazioni cartesiane omogenee di un sottospazio vettoriale, si ha che una base di $W=U^\perp$ è costituita dai vettori $w_1=i+j+2k$, $w_2=2i-j+k$. Tali vettori non sono ortogonali perché risulta $w_1\times w_2=3\neq0$. Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt ai vettori w_1, w_2 si ha la base ortogonale (w_1',w_2'), essendo $w_1'= w_1=i+j+2k$, $w_2'=w_2-((w_2\times w_1)/(w_1\times w_1))w_1=2i-j+k-(3/6)(i+j+2k)=(3/2)i-(3/2)j$. Essendo $|w_1'|=6^{1/2}$, $|w_2'|=3/2^{1/2}$, si ha che una base ortonormale di W è costituita dai vettori unitari $w_1''= w_1'/|w_1'|=6^{-1/2}(i+j+2k)$, $w_2''= w_2'/|w_2'|=(2^{1/2}/3)((3/2)i-(3/2)j)=2^{-1/2}(i-j)$.

(e) Essendo $W=U^\perp$, risulta $P_W(v)=v-P_U(v)=v-(v\times u')u'=3i-(3i\times3^{-1/2}(i+j-k))3^{-1/2}(i+j-k)=3i-i-j+k=2i-j+k$.