RENZO MAZZOCCO

CORSO DI GEOMETRIA
(PER FISICI)

RACCOLTA DEGLI ESERCIZI D'ESONERO E D'ESAME DI GEOMETRIA
DELL'ANNO ACCADEMICO 2012-2013

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO"
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
Ottobre 2013

ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere Pf-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova Scritta del 23–11-2012

1.1. Spazio vettoriale numerico reale $V=\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U=\mathrm{Span}((u_1,u_2)$, essendo $u_1=(0,1,1,0)$, $u_2=(-1,1,0,1)$, e $W(h)$: $x_1+x_2+hx_3=0$, $h(x_1-x_2+x_3)=0$, dove h è un parametro reale.

(a) Determinare una base B_U e la dimensione di U.

(b) Determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.

(c) Determinare la dimensione di W(h).

(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W(h)$.

(e) Determinare la dimensione di U+W(h).

(f) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali V è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W(h).

Soluzione

(a) I vettori u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti perché non sono proporzionali. Allora essi essendo un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti estratto dal sistema di generatori $\{u_1,u_2\}$ di U, costituiscono una base B_U di U e quindi risulta dim(U)=2.
(b) Imponendo alla matrice che ha come colonne rispettivamente le colonne delle coordinate dei vettori u_1, u_2 e v, essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ un vettore generico di V, si ha che equazioni cartesiane di U sono, per esempio, $x_1+x_2-x_3=0$, $x_1+x_4=0$.
(c) La matrice incompleta A(h) associata al sistema lineare omogeneo che rappresenta W(h), essendo costituita da due righe non proporzionali, e quindi linearmente indipendenti, se è $h\neq0$ ed avendo una riga non nulla ed una riga nulla se è h=0, ha rango 2 se è $h\neq0$ e rango 1 se è h=0. Allora risulta dim(W(h))=dim(V)-rg(A(h))=4-2=2 se è $h\neq0$ e dim(W(0))=dim(V)-rg(A(0))=4-1=3.
(d) Equazioni cartesiane di $U\cap W$ sono, per esempio, $x_1+x_2-x_3=0$, $x_1+x_4=0$, $x_1+x_2+hx_3=0$, $h(x_1-x_2+x_3)=0$.
Utilizzando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan, si ha che il sistema costituito da tali equazioni risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare omogeneo a scala $x_1+x_2-x_3=0$, $-x_2+x_3+x_4=0$, $(h+1)x_3=0$, $-2hx_4=0$ se è $h\neq-1,0$, risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare omogeneo a scala $x_1+x_2-x_3=0$, $-x_2+x_3+x_4=0$, $2x_4=0$ se è h=-1 e risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare omogeneo a scala $x_1+x_2-x_3=0$, $-x_2+x_3+x_4=0$, $x_3=0$ se è h=0. Risolvendo tali sistemi lineari omogenei si ha rispettivamente: $U\cap W(h)=\{(0,0,0,0)\}$, onde $U\cap W(h)$ non ha basi ed è $\dim(U\cap W(h))=0$ se è $h\neq-1,0$; $U\cap W(-1)=\{(0,t,t,0)|t\in\boldsymbol{R}\}=\{t(0,1,1,0)|t\in\boldsymbol{R}\}$ con base, per esempio, $B_{U\cap W(-1)}=(a_1)$, essendo $a_1=(0,1,1,0)$, e $\dim(U\cap W(-1)=1$; $U\cap W(0)=\{(-t,t,0,t)|t\in\boldsymbol{R}\}=\{t(-1,1,0,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$ con base, per esempio, $B_{U\cap W(0)}=(b_1)$, essendo $b_1=(-1,1,0,1)$, e $\dim(U\cap W(0)=1$.
(e) Tenuti presenti i risultati ottenuti nei quesiti precedenti, per la formula di Grassmann vettoriale si ha: $\dim(U+W(h))=\dim(U)+\dim(W(h))-\dim(U\cap W(h))=2+2-0=4$ se è $h\neq-1,0$; $\dim(U+W(-1))=\dim(U)+\dim(W(-1))-\dim(U\cap W(-1))=2+2-1=3$;
$\dim(U+W(0))=\dim(U)+\dim(W(0))-\dim(U\cap W(0))=2+3-1=4$.
(f) Le condizioni che devono essere soddisfatte affinché lo spazio vettoriale V sia somma diretta di U e W(h) sono V=U+W(h) e $U\cap W(h)=\{(0,0,0,0)\}$. Ebbene, tenuti presenti i risultati ottenuti nel quesito (d), si ha che la seconda condizione è soddisfatta soltanto per $h\neq-1,0$. Per $h\neq-1,0$ risulta, come stabilito nel quesito (e), dim(U+W(h)=4 e quindi, essendo dim(V)=4, è anche U+W(h) =V. In definitiva V è somma diretta di U e W(h) per $h\neq-1,0$.

1.2. <u>Spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario.</u> Base $B_V=(i,j,k)$. Siano assegnati i vettori $v_0(h)=-j+hk$, $w_1(h)=i+j+(h+1)k$, $w_2(h)=(h+1)j+(h+1)k$, $w_3(h)=2i+(-h+1)j+(h+1)k$, essendo h un parametro reale. Posto $W=Span(w_1(h),w_2(h),w_3(h))$, si indichi con $W'(h)$ la sottovarietà lineare affine di V contenente il vettore $v_0(h)$ e parallela al sottospazio vettoriale W(h).

(a) Determinare una base e la dimensione di W(h).

(b) Determinare equazioni parametriche di $W'(h)$.

(c) Determinare equazioni cartesiane di $W'(h)$.

(d) Determinare la dimensione di $W'(h)$.

(e) Determinare l'intersezione $W'(h)\cap W(h)$.

Soluzione

(a) Applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan di estrazione di una base al sistema di generatori $\{w_1(h),w_2(h),w_3(h)\}$ di W(h) si ha che per $h\neq-1$ una base di W(h) è $B_{W(h)}=(w_1(h),w_2(h))$ mentre una base di W(-1) è $B_{W(-1)}=(w_1(-1))$. Pertanto risulta dim(W(h)=2 se è $h\neq-1$ e dim(W(-1)=1.

(b) <u>Caso $h\neq-1$</u>. Equazioni parametriche di $W'(h)$ sono $x=t_1$, $y=-1+t_1+(h+1)t_2$, $z=h+(h+1)t_1+(h+1)$, $t_1,t_2\in \boldsymbol{R}$.

<u>Caso h=-1</u>. Equazioni parametriche di $W'(-1)$ sono $x=t$, $y=-1+t$, $z=-1$, $t\in \boldsymbol{R}$.

(c) <u>Caso $h\neq-1$</u>. Imponendo di avere rango minore di 3 alla matrice che ha come colonne rispettivamente le colonne delle coordinate dei vettori $w_1(h)$, $w_2(h)$ e $v-v_0$, essendo $v=xi+yj+zk$ un vettore variabile in V, si ottiene che un'equazioni cartesiana di $W'(h)$ è $hx+y-z+h+1=0$.

<u>Caso h=-1</u>. Eliminando il parametro t dalle equazioni parametriche di $W'(-1)$ oppure imponendo di avere rango minore di 2 alla matrice che ha come colonne rispettivamente le colonne delle coordinate dei vettori $w_1(-1)=i+j$ e $v-v_0$, essendo $v=xi+yj+zk$ un vettore variabile in V, si ottiene che equazioni cartesiane di $W'(-1)$ sono, per esempio, $x-y-1=0$, $z+1=0$.

(d) La dimensione di una sottovarietà lineare affine è uguale, per definizione, alla dimensione del sottospazio vettoriale ad essa parallelo quindi si ha $dim(W'(h))=dim(W(h))=2$ per $h\neq-1$ e $dim(W'(-1))=dim(W(-1))=1$.

(e) <u>Caso $h\neq-1$.</u> W(h) è rappresentato dall'equazione cartesiana omogenea associata all'equazione cartesiana di $W'(h)$. Si ha pertanto W(h): $hx+y-z=0$. Allora equazioni cartesiane di $W'(h)\cap W(h)$ sono $hx+y-z+h+1=0$, $hx+y-z=0$. Ma il sistema formato da tali equazioni, essendo equivalente al sistema $h+1=0$, $hx+y-z=0$, è incompatibile per $h\neq-1$. Allora $W'(h)\cap W(h)$ coincide con l'insieme vuoto.

<u>Caso h=-1.</u> W(-1) è rappresentato dal sistema lineare omogeneo associato al sistema lineare che rappresenta $W'(-1)$. Si ha pertanto W(-1): $x-y=0$, $z=0$. Allora equazioni cartesiane di $W'(-1)\cap W(-1)$ sono $x-y-1=0$, $z+1=0$ $x-y=0$, $z=0$. Ma il sistema formato da tali equazioni, essendo equivalente al sistema $-1=0$, $1=0$, $x-y=0$, $z=0$, è incompatibile. Allora $W'(-1)\cap W(-1)$ coincide con l'insieme vuoto.

2.1. Spazio vettoriale numerico reale $V=\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U=Span((u_1,u_2)$, essendo $u_1=(1,1,0,0)$, $u_2=(1,0,1,-1)$, e $W(h)$: $h(x_1+x_2+x_4)=0$, $x_1-x_2+hx_4=0$, dove h è un parametro reale.

(a) Determinare una base B_U e la dimensione di U.

(b) Determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.

(c) Determinare la dimensione di W(h).

(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W(h)$.

(e) Determinare la dimensione di U+W(h).

(f) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali V è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W(h).

Soluzione

Procedendo come in 1.1 si ha:

(a) $B_U=(u_1,u_2)$ e $\dim(U)=2$;

(b) U: $x_1-x_2-x_3=0$, $x_1-x_2+x_4=0$;

(c) $\dim(W(h))=2$ se è $h\neq 0$ e $\dim(W(0)=3$;

(d) $U\cap W(h)$ non ha basi ed è $\dim(U\cap W(h))=0$ se è $h\neq 0,1$, $B_{U\cap W(0)}=(a_1)$, essendo $a_1=(1,1,0,0)$, e $\dim(U\cap W(0)=1$, $B_{U\cap W(1)}=(b_1)$, essendo $b_1=(-1,0,-1,1)$, e $\dim(U\cap W(1))=1$;

(e) $\dim(U+W(h))=4$ se è $h\neq 1$ e $\dim(U+W(1))=3$;

(f) V è somma diretta di U e W(h) per $h\neq 0,1$.

2.2. Spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario. Base $B_V=(i,j,k)$. Siano assegnati i vettori $v_0(h)=i-j+(h+3)k$, $w_1(h)=i+2k$, $w_2(h)=i+hj+(-h+2)k$, $w_3(h)=hi+hj+hk$, essendo h un parametro reale. Posto $W=Span(w_1(h),w_2(h),w_3(h))$, si indichi con $W'(h)$ la sottovarietà lineare affine di V contenente il vettore $v_0(h)$ e parallela al sottospazio vettoriale W(h).

(a) Determinare una base e la dimensione di W(h).

(b) Determinare equazioni parametriche di $W'(h)$.

(c) Determinare equazioni cartesiane di $W'(h)$.

(d) Determinare la dimensione di $W'(h)$.

(e) Determinare l'intersezione $W'(h)\cap W(h)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) $B_{W(h)}=(w_1(h),w_2(h))$, $\dim(W(h)=2$ per $h\neq 0$ e $B_{W(0)}=(w_1(0))$, $\dim(W(0)=1$;

(b) equazioni parametriche di $W'(h)$ sono $x=1+t_1+t_2$, $y=-1+ht_2$, $z=h+3+2t_1+(-h+2)t_2$, $t_1,t_2\in\boldsymbol{R}$, se è $h\neq 0$, equazioni parametriche di $W'(0)$ sono $x=1+t$, $y=-1$, $z=h+3+2t$, $t\in\boldsymbol{R}$;

(c)) un'equazioni cartesiana di $W'(h)$ per $h\neq 1$ è $2x-y-z-h=0$, equazioni cartesiane di $W'(0)$ sono, per esempio, $y+1=0$, $2x-z+1=0$;

(d) $\dim(W'(h))=\dim(W(h))=2$ per $h\neq 0$ e $\dim(W'(0))=\dim(W(0))=1$;

(e) $W'(h)\cap W(h)$ è l'insieme vuoto $\forall h\in\boldsymbol{R}$.

3.1. <u>Spazio vettoriale numerico reale</u> $V=\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U=Span((u_1,u_2)$, essendo $u_1=(1,0,0,1)$, $u_2=(1,-1,1,0)$, e $W(h)$: $hx_1+x_3+x_4=0$, $h(x_1+x_3-x_4)=0$, dove h è un parametro reale.

(a) Determinare una base B_U e la dimensione di U.

(b) Determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.

(c) Determinare la dimensione di W(h).

(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W(h)$.

(e) Determinare la dimensione di U+W(h).

(f) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali V è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W(h).

Soluzione

Procedendo come in 1.1 si ha:

(a) $B_U=\{u_1,u_2\}$ e $\dim(U)=2$;

(b) U: $x_1+x_2-x_4=0$, $x_2+x_3=0$;

(c) $\dim(W(h))=2$ se è $h\neq 0$ e $\dim(W(0)=3$;

(d) $U\cap W(h)$ non ha basi ed è $\dim(U\cap W(h))=0$ se è $h\neq -1,0$, $B_{U\cap W(-1)}=(a_1)$, essendo $a_1=(1,0,0,1)$, e $\dim(U\cap W(-1)=1$, $B_{U\cap W(0)}=(b_1)$, essendo $b_1=(0,1,-1,1)$, e $\dim(U\cap W(0)=1$;

(e) $\dim(U+W(h))=4$ se è $h\neq -1$ e $\dim(U+W(-1))=3$;

(f) V è somma diretta di U e W(h) per $h\neq -1,0$.

3.2. <u>Spazio vettoriale</u> V <u>dei vettori geometrici dello spazio ordinario.</u> Base $B_V=(i,j,k)$. Siano assegnati i vettori $v_0(h)=-i+j+2k$, $w_1(h)=i+j+(-h+2)k$, $w_2(h)=2i+hj+(-h+2)k$, $w_3(h)=(-h+2)j+(-h+2)k$, essendo h un parametro reale. Posto $W=Span(w_1(h),w_2(h),w_3(h))$, si indichi con $W'(h)$ la sottovarietà lineare affine di V contenente il vettore $v_0(h)$ e parallela al sottospazio vettoriale W(h).

(a) Determinare una base e la dimensione di W(h).

(b) Determinare equazioni parametriche di $W'(h)$.

(c) Determinare equazioni cartesiane di $W'(h)$.

(d) Determinare la dimensione di $W'(h)$.

(e) Determinare l'intersezione $W'(h)\cap W(h)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) $B_{W(h)}=(w_1(h),w_2(h))$, $\dim(W(h)=2$ per $h\neq 2$ e $B_{W(2)}=(w_1(2))$, $\dim(W(2)=1$;

(b) per $h\neq 2$ equazioni parametriche di $W'(h)$ sono $x=-1+t_1+2t_2$, $y=1+t_1+ht_2$, $z=2+(-h+2)t_1+(-h+2)t_2$, $t_1,t_2\in\boldsymbol{R}$, equazioni parametriche di $W'(2)$ sono $x=-1+t$, $y=1$, $z=2+2t$, $t\in\boldsymbol{R}$;

(c)) per $h\neq 2$ un'equazioni cartesiana di $W'(h)$ è $(h-1)x-y+z+h-2=0$, equazioni cartesiane di $W'(2)$ sono, per esempio, $x-y+2=0$, $z-2=0$;

(d) $\dim(W'(h))=\dim(W(h))=2$ per $h\neq 2$ e $\dim(W'(2))=\dim(W(2))=1$;

(e) $W'(h)\cap W(h)$ è l'insieme vuoto $\forall h\in\boldsymbol{R}$.

4.1. <u>Spazio vettoriale numerico reale $V=\boldsymbol{R}^4$</u>. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U=Span((u_1,u_2)$, essendo $u_1=(1,-1,1,0)$, $u_2=(1,-1,0,-1)$, e $W(h)$: $h(x_2+x_3+x_4)=0$, $hx_2-x_3+x_4=0$, dove h è un parametro reale.

(a) Determinare una base B_U e la dimensione di U.
(b) Determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.
(c) Determinare la dimensione di W(h).
(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W(h)$.
(e) Determinare la dimensione di U+W(h).
(f) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali V è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W(h).

Soluzione

Procedendo come in 1.1 si ha:
(a) $B_U=\{u_1,u_2\}$ e dim(U)=2;
(b) U: $x_1-x_3+x_4=0$, $x_1+x_2=0$;
(c) dim(W(h))=2 se è $h\neq 0$ e dim(W(0)=3;
(d) $U\cap W(h)$ non ha basi ed è $\dim(U\cap W(h))=0$ se è $h\neq -1,0$, $B_{U\cap W(-1)}=(a_1)$, essendo $a_1=(1,-1,1,0)$, e $\dim(U\cap W(-1)=1$, $B_{U\cap W(0)}=(b_1)$, essendo $b_1=(0,0,1,1)$, e $\dim(U\cap W(0)=1$;
(e) dim(U+W(h))=4 se è $h\neq -1$ e dim(U+W(-1))=3;
(f) V è somma diretta di U e W(h) per $h\neq -1,0$.

4.2. <u>Spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario.</u> Base $B_V=(i,j,k)$. Siano assegnati i vettori $v_0(h)=-i-j-hk$, $w_1(h)=i+(-h+1)j+(h+1)k$, $w_2(h)=i+2k$, $w_3(h)=(-h+1)i+(-h+1)j+(-h+1)k$, essendo h un parametro reale. Posto $W=Span(w_1(h),w_2(h),w_3(h))$, si indichi con W´(h) la sottovarietà lineare affine di V contenente il vettore $v_0(h)$ e parallela al sottospazio vettoriale W(h).

(a) Determinare una base e la dimensione di W(h).
(b) Determinare equazioni parametriche di W´(h).
(c) Determinare equazioni cartesiane di W´(h).
(d) Determinare la dimensione di W´(h).
(e) Determinare l'intersezione $W'(h)\cap W(h)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:
(a) $B_{W(h)}=(w_1(h),w_2(h))$, dim(W(h)=2 per $h\neq 1$ e $B_{W(1)}=(w_1(1))$, dim(W(1)=1;
(b) per $h\neq 1$ equazioni parametriche di W´(h) sono $x=-1+t_1+t_2$, $y=-1+(-h+1)t_1$, $z=-h+(h+1)t_1+2t_2$, $t_1,t_2\in\boldsymbol{R}$, equazioni parametriche di W´(1) sono $x=-1+t$, $y=-1$, $z=-1+2t$, $t\in\boldsymbol{R}$;
(c)) per $h\neq 1$ un'equazioni cartesiana di W´(h) è $2x-y-z-h+1=0$, equazioni cartesiane di W´(1) sono, per esempio, $y+1=0$, $2x-z+1=0$;
(d) dim(W´(h))=dim(W(h))=2 per $h\neq 1$ e dim(W´(1))=dim(W(1))=1;
(e) $W'(h)\cap W(h)$ è l'insieme vuoto $\forall h\in\boldsymbol{R}$.

ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere Pf-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 25–1-2013

1.1. Spazio euclideo ordinario *E*. RC(O;i,j,k). Siano assegnati il punto $P_0(0,1,0)$, le rette r_1:x+y-2=0, x-z=0, r_2:x+z-1=0, y+z-1=0 ed il piano p:x-y+z+1=0.

(a) Dire se le rette r_1 ed r_2 sono o non sono sghembe, giustificando la risposta.

(b) Determinare equazioni cartesiane della retta r incidente le rette r_1 ed r_2 e parallela all'asse z.

(c) Detti P_1 e P_2 i punti d'intersezione della retta r rispettivamente con la retta r_1 e con la retta r_2, calcolare il volume *V* del tetraedro $OP_0P_1P_2$.

(d) Scrivere equazioni cartesiane della retta s passante per il punto P_0, contenuta nel piano p e perpendicolare alla retta r.

(e) Calcolare la distanza d(r,s) delle rette r ed s.

Soluzione

(a) La matrice completa, quadrata di ordine quattro, associata alle equazioni delle rette r_1 ed r_2 ha determinante uguale a -2. Essendo tale determinante non nullo, si ha che le rette r_1 ed r_2 sono sghembe.

(b) Equazioni parametriche di r_1 sono, per esempio, $x=t_1$, $y=2-t_1$, $z=t_1$, t_1□$\boldsymbol{R}$; allora coordinate cartesiane del punto generico $P_1(t_1)$ di r_1 sono $(t_1,2-t_1,t_1)$. Equazioni parametriche di r_2 sono, per esempio, $x=1-t_2$, $y=1-t_2$, $z=t_2$, t_2□$\boldsymbol{R}$ e quindi coordinate cartesiane del punto generico $P_2(t_2)$ di r_2 sono $(1-t_2,1-t_2,t_2)$. La condizione d'incidenza con le rette r_1 ed r_2 è soddisfatta dalla retta passante per i punti $P_1(t_1)$ e $P_2(t_2)$ e quindi di equazioni in forma di rapporti uguali $(x-t_1)/(1-t_2-t_1)=(y-2+t_1)/(-1-t_2+t_1)=(z-t_1)/(t_2-t_1)$, dove i denominatori hanno il significato di parametri direttori della retta. Essendo (0,0,1) parametri direttori dell'asse z, la condizione di parallelismo della suddetta retta con l'asse z può essere espressa imponendo che sia minore di 2 il rango della matrice avente come righe $(1-t_2-t_1,-1-t_2+t_1,t_2-t_1)$ e (0,0,1). Tale condizione dà $-1-t_2+t_1=0$, $1-t_2-t_1=0$ e quindi $t_1=1$, $t_2=0$. Si ha allora r:(x-1)/0=(y-1)/0=(z-1)/(-1) onde equazioni cartesiane di r sono x-1=0, y-1=0.

(c) La retta generica passante per il punto P_0 ha equazioni in forma di rapporti uguali x/l=(y-1)/m=z/l. La condizione che tale retta sia contenuta nel piano p, essendo P_0 un punto di p, può essere espressa imponendo che essa sia parallela a p quindi che sia l-m+n=0. La condizione di perpendicolarità con la retta r dà n=0. Si ha allora che parametri direttori della retta s sono (l,m,n)=(1,1,0) onde è s: x/l=(y-1)/1=z/0. Pertanto equazioni cartesiane di s sono x-y+1=0, z=0.

(d) I punti P_1 e P_2 si ottengono, rispettivamente, ponendo $t_1=1$ e $t_2=0$ in $P_1(t_1)$ e $P_2(t_2)$. Si ha allora che coordinate cartesiane di P_1 sono (1,1,1) e coordinate cartesiane di P_2 sono (1,1,0). Il volume *V* del tetraedro $OP_0P_1P_2$ è uguale ad 1/6 del modulo del prodotto misto dei tre vettori geometrici rappresentati rispettivamente dai segmenti orientati OP_0, OP_1, OP_2. Ma tali vettori geometrici hanno, rispettivamente, coordinate (0,1,0), (1,1,1), (1,1,0) e quindi risulta *V*=1/6.

(e) La distanza d(r,s) delle due rette r ed s uguaglia la distanza di un punto qualsiasi della retta s dal piano q contenente la retta r e parallelo alla retta s. Un punto della retta s è P_0 ed equazione cartesiana del piano q è x-y=0. Si ha allora $d(r,s)=d(P_0,q)=|-1|/2^{1/2}= 1/2^{1/2}$.

1.2. <u>Spazi vettoriali numerici reali</u> $V=\boldsymbol{R}^3$ <u>e</u> $W=\boldsymbol{R}^4$. Siano assegnate le applicazioni lineari $F_h:V\rightarrow W$, tale che $F_h(v)=(x_1+2x_3,-x_1+x_2,x_2+2x_3,hx_1+hx_3)$, essendo $v=(x_1,x_2,x_3)$ ed h un parametro reale, e $G:W\rightarrow V$, tale che $G(w)=(y_1,y_2+y_3,y_3+y_4)$, essendo $w=(y_1,y_2,y_3,y_4)$.

(a) Determinare la matrice A_h associata all'applicazione lineare F_h rispetto alle basi canoniche di V e W, la matrice B associata all'applicazione lineare G rispetto alle basi canoniche di W e V e la matrice C_h associata all'endomorfismo G□F_h:V→V rispetto alla base canonica di V.

(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'endomorfismo G□F_h non sia surgettivo.

(c) Indicato semplicemente con G□F l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 di cui al punto precedente e indicata semplicemente con C la matrice ad esso associata, verificare che G□F è diagonalizzabile.

(d) Determinare una base $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3)$ di V rispetto alla quale la matrice C′ associata a G□F sia diagonale.

(e) Determinare una matrice quadrata non singolare D tale che risulti $C'=D^{-1}CD$.

(f) Scrivere l'espressione di G□F(v) rispetto alla base B'_V.

Soluzione

(a) La matrice A_h richiesta ha come righe $A_h^{(1)}=(1,0,2)$, $A_h^{(2)}=(-1,1,0)$, $A_h^{(3)}=(0,1,2)$, $A_h^{(4)}=(h,0,h)$. La matrice B richiesta ha come righe $B^{(1)}=(1,0,0,0)$, $B^{(2)}=(0,1,1,0)$, $B^{(3)}=(0,0,1,1)$. La matrice C_h richiesta uguaglia il prodotto della matrice B e della matrice A_h. Si ha allora che la matrice C_h ha come righe $C_h^{(1)}=(1,0,2)$, $C_h^{(2)}=(-1,2,2)$, $C_h^{(3)}=(h,1,h+2)$,

(b) L'endomorfismo G□F_h non è surgettivo se e soltanto se risulta $rg(C_h)<3$ e quindi, essendo C_h una matrice quadrata, se e soltanto risulta $det(C_h)=0$. Ma essendo $det(C_h)=-2h$, si ha che $det(C_h)=0$ se e soltanto se è h=0. Allora il valore di h in corrispondenza del quale l'endomorfismo G□F_h non è surgettivo è $h_0=0$.

(c) Indicato, come richiesto, semplicemente con G□F l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 del parametro h, di cui al punto precedente, ed indicata semplicemente con C la matrice associata a tale endomorfismo, si ha che l'equazione caratteristica di G□F è $det(C-\lambda I)=0$, ossia $-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)=0$. Tale equazione ammette tre soluzioni distinte: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$. Gli autovalori di G□F sono allora $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$. Essendo il numero degli autovalori di G□F uguale alla dimensione dello spazio vettoriale V, l'endomorfismo G□F risulta diagonalizzabile per il criterio di diagonalizzabilità degli endomorfismi.

(d) Una base di V rispetto alla quale la matrice associata a G□F sia diagonale è una base di autovettori rispetto a G□F. Determiniamo dunque una tale base. Sia V_0 l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1=0$. Equazioni cartesiane di V_0 sono $x_1+2x_3=0$, $-x_1+2x_2+2x_3=0$, $x_2+2x_3=0$. Risulta allora $V_0=\{t(2,2,-1)|t\in\boldsymbol{R}\}$, con base costituita dal solo autovettore $v_1'=(2,2,-1)$. Procedendo in modo analogo, si ha che l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_2=2$ è $V_2=\{t(2,0,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$, con base costituita dal solo autovettore $v_2'=(2,0,1)$ e l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_3=3$ è $V_3=\{t(1,1,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$, con base costituita dal solo autovettore $v_3'=(1,1,1)$. Una base di autovettori è allora $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$. La matrice associata a G□F rispetto a tale base è la matrice diagonale C′ che ha sulla diagonale principale ordinatamente gli autovalori 0,2,3.

(e) Una matrice D del tipo richiesto è, per esempio, la matrice del cambiamento di basi nel passaggio dalla base canonica alla base di autovettori B_V' di V. Tale matrice, dovendo avere come colonne le colonne delle coordinate dei vettori v_1',v_2',v_3', ha come righe $D^{(1)}=(2,2,1)$, $D^{(2)}=(2,0,1)$, $D^{(3)}=(-1,1,1)$.

(f) Risulta $G\square F(v)=2x_1'v_1'+3x_4'v_4'$, essendo (x_1',x_2',x_3') le coordinate di v rispetto alla base B_V'.

2.1. <u>Spazio euclideo ordinario *E*.</u> RC(O;i,j,k). Siano assegnati il punto A(0,1,0), le rette r_1:y+z-2=0, x-z=0, r_2:x+z-1=0, x+y-1=0 ed il piano p:x-y+z+1=0.

(a) Dire se le rette r_1 ed r_2 sono o non sono sghembe, giustificando la risposta.

(b) Determinare equazioni cartesiane della retta r incidente le rette r_1 ed r_2 e parallela all'asse x.

(c) Detti B e C i punti d'intersezione della retta r rispettivamente con la retta r_1 e con la retta r_2, calcolare il volume *V* del tetraedro OABC.

(d) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per il punto A, contenuta nel piano p e perpendicolare alla retta r.

(e) Calcolare la distanza d(r,s) delle rette r ed s.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.1, si ha:

(a) le rette r_1 ed r_2 sono sghembe;

(b) r:y-1=0, z-1=0;

(c) s:x=0, y-z-1=0;.

(d) *V*=1/6;

(e) $d(r,s)=1/2^{1/2}$.

2.2. <u>Spazi vettoriali reali V di dimensione 3 e W di dimensione 4</u>. Basi $B_V=(v_1,v_2,v_3)$ e $B_W=(w_1,w_2,w_3,w_4)$. Siano assegnate le applicazioni lineari $F_h:V\to W$, tale che $F_h(v)=(x_1+2x_3)w_1+(-x_1+x_2)w_2+(x_2+2x_3)w_3+(h+1)(x_1+x_3)w_4$, essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$ ed h un parametro reale, e $G:W\to V$, tale che $G(w)=y_1v_1+(y_2+y_3)v_2+(y_3+y_4)v_3$, essendo $w=y_1w_1+y_2w_2+y_3w_3+y_4w_4$.

(a) Determinare la matrice A_h associata all'applicazione lineare F_h rispetto alle basi B_V e B_W, la matrice B associata all'applicazione lineare G rispetto alle basi B_W e B_V e la matrice C_h associata all'endomorfismo $G\square F_h:V\to V$ rispetto alla base B_V.

(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'endomorfismo $G\square F_h$ non sia iniettivo.

(c) Indicato semplicemente con $G\square F$ l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 di cui al punto precedente e indicata semplicemente con C la matrice ad esso associata, verificare che $G\square F$ è diagonalizzabile.

(d) Determinare una base $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3)$ di V rispetto alla quale la matrice C′ associata a $G\square F$ sia diagonale.

(e) Determinare una matrice quadrata non singolare D tale che risulti $C'=D^{-1}CD$.

(f) Scrivere l'espressione di $G\square F(v)$ rispetto alla base B'_V.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.2, si ha:

(a) la matrice A_h richiesta ha come righe $A_h^{(1)}=(1,0,2)$, $A_h^{(2)}=(-1,1,0)$, $A_h^{(3)}=(0,1,2)$, $A_h^{(4)}=(h+1,0,h+1)$, la matrice B richiesta ha come righe $B^{(1)}=(1,0,0,0)$, $B^{(2)}=(0,1,1,0)$, $B^{(3)}=(0,0,1,1)$, la matrice C_h richiesta uguaglia il prodotto della matrice B e della matrice A_h e quindi è tale che $C_h^{(1)}=(1,0,2)$, $C_h^{(2)}=(-1,2,2)$, $C_h^{(3)}=(h+1,1,h+3)$;

(b) l'endomorfismo $G\square F_h$ non è iniettivo se e soltanto se risulta $rg(C_h)<3$ e quindi, essendo C_h una matrice quadrata, se e soltanto risulta $det(C_h)=0$, ma essendo $det(C_h)=-2h-2$, si ha che $det(C_h)=0$ se e soltanto se è $h=-1$, allora il valore di h in corrispondenza del quale l'endomorfismo $G\square F_h$ non è iniettivo è $h_0=-1$;

(c) indicato, come richiesto, semplicemente con $G\square F$ l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 del parametro h, di cui al punto precedente, ed indicata semplicemente con C la matrice associata a tale endomorfismo, si ha che l'equazione caratteristica di $G\square F$ è $det(C-\lambda I)=0$, ossia $-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)=0$, tale equazione ammette tre soluzioni distinte: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$ onde gli autovalori di $G\square F$ sono $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$; essendo il numero degli autovalori di $G\square F$ uguale alla dimensione dello spazio vettoriale V, l'endomorfismo $G\square F$ risulta diagonalizzabile per il criterio di diagonalizzabilità degli endomorfismi;

(d) una base di V rispetto alla quale la matrice C' associata all'endomorfismo $G\square F$ sia diagonale è $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3)$, essendo $v_1'=2v_1+2v_2-v_3$, $v_2'=2v_1+v_3$, $v_3'==v_1+v_2+v_3$; rispetto a tale base la matrice associata a $G\square F$ è la matrice diagonale C' che ha sulla diagonale principale ordinatamente gli autovalori 0,2,3;

(e) una matrice D del tipo richiesto è la matrice che ha come righe $D^{(1)}=(2,2,1)$, $D^{(2)}=(2,0,1)$, $D^{(3)}=(-1,1,1)$

(f) risulta $G\square F(v)=2x_1'v_1'+3x_4'v_4'$, essendo (x_1',x_2',x_3') le coordinate di v rispetto alla base B_V'.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere Pf-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova scritta del 30–1-2013

1.1 <u>Spazio euclideo numerico</u> $\boldsymbol{E^4}$. <u>Riferimento cartesiano canonico</u> $RC(O;e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i punti $P_0(h)=(0,h,0,1)$, $P_1(h)=(-1,2h,1,2)$, $Q_0=(2,-1,1,1)$, $R_0=(0,1,1,0)$ e l'iperpiano p: $2x_1-x_2+x_3=0$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare equazioni parametriche della retta r_h passante per i punti $P_0(h)$ e $P_1(h)$.

(b) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per il punto Q_0 e perpendicolare all'iperpiano p.

(c) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale le rette r_h e s risultino incidenti.

(d) Indicata semplicemente con r la retta corrispondente al valore h_0 del parametro h di cui al punto precedente, determinare equazioni cartesiane del piano q che contiene le rette r e s.

(e) Determinare la distanza $d(R_0,s)$ del punto R_0 dalla retta s.

Soluzione

(a) Equazioni in forma di rapporti uguali della retta r_h sono $x_1/(-1)=(x_2-h)/h=x_3/1=(x_4-1)/1$ e quindi equazioni parametriche di r_h sono $x_1=-t$, $x_2=h+ht$, $x_3=t$, $x_4=1+t$, $t\in\boldsymbol{R}$.

(b) Coefficienti di giacitura dell'iperpiano p sono $(a_1,a_2,a_3,a_4)=(2,-1,1,0)$. Allora la condizione di perpendicolarità tra l'iperpiano p e la retta s implica che parametri direttori di s sono, per esempio, $(l_1,l_2,l_3,l_4)=(2,-1,1,0)$. Pertanto equazioni della retta s in forma di rapporti uguali sono $(x_1-2)/2=(x_2+1)/(-1)=(x_3-1)/1=(x_4-1)/0$ onde equazioni cartesiane di s sono, per esempio, $x_1-2x_3=0$, $x_2+x_3=0$, $x_4-1=0$.

(c) Osserviamo anzitutto che le rette r_h ed s non sono parallele per nessun valore di h perché le quaterne di parametri direttori $(-1,h,1,1)$ e $(2,-1,1,0)$, rispettivamente di r_h ed s, non sono mai proporzionali. Allora le rette r_h ed s possono essere soltanto incidenti o sghembe. Pertanto, per determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali le rette r_h ed s risultino incidenti, è sufficiente imporre che l'intersezione di tali rette non sia vuota. Determiniamo dunque i valori del parametro h per cui tale intersezione non è vuota. Un punto generico della retta r_h ha coordinate cartesiane $x_1=-t$, $x_2=h+ht$, $x_3=t$, $x_4=1+t$. Andando a sostituire tali coordinate nelle equazioni cartesiane della retta s, si ha il sistema lineare $-t-2t=0$, $h+ht+t=0$ nelle incognite h e t che è compatibile per h=0 e quindi la suddetta intersezione non è vuota per h=0. Allora la retta r_h e la retta s risultano incidenti per h=0. Pertanto il valore richiesto del parametro h è $h_0=0$.

(d) Intanto la retta r ha equazioni parametriche $x_1=-t$, $x_2=0$, $x_3=t$, $x_4=1+t$. Si ha immediatamente che le rette r ed s si incontrano nel punto A=(0,0,0,1), che si ottiene per t=0. Allora il piano q può essere ottenuto come piano passante per il punto A e di giacitura W=Span(v,w), essendo v=(-1,0,1,1) e w=(2,-1,1,0) vettori direttori, rispettivamente, di r e di s. Imponendo che la matrice avente come righe, rispettivamente, (x_1,x_2,x_3,x_4-1), $(-1,0,1,1)$ e $(2,-1,1,0)$ abbia rango minore di tre, si ha che equazioni cartesiane del piano q sono, per esempio, $x_1+3x_2+x_3=0$, $x_1+2x_2+x_4-1=0$.

(e) La distanza $d(R_0,s)$ può essere ottenuta come distanza del punto R_0 dal punto N ottenuto intersecando la retta s con l'iperpiano passante per R_0 e perpendicolare ad s. Ma R_0 appartiene all'iperpiano p e tale iperpiano per costruzione è perpendicolare ad s, allora N è intersezione di s e p. Mettendo a sistema le equazioni cartesiane di s e di p e risolvendo si ha N=(0,0,0,1)=A. Risulta $d(R_0,s)=d(R_0,N)=d(R_0,A)=(1+1+1)^{1/2}=3^{1/2}$.

1.2 <u>Spazio vettoriale reale</u> V <u>di dimensione tre. Base</u> $B_V=(v_1,v_2,v_3)$. Sia assegnata la funzione reale $b:V\times V\to\boldsymbol{R}$, tale che $b(v,w)=2x_1y_1+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+2x_2y_2+x_2y_3+x_3y_1+x_3y_2+2x_3y_3$, essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$ e $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3$.

(a) Verificare che la funzione reale b è una forma bilineare reale, simmetrica e definita positiva, ossia che la funzione reale b è un prodotto scalare.

(b) Posto per comodità $b(v,w)=\langle v,w\rangle$, indicare l'espressione di $|v|$.

(c) Determinare l'angolo convesso $v'^\wedge w'$, essendo $v'=v_1-v_2$, $w'=v_2-v_3$.

(d) Determinare la base ortonormale $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ ottenuta a partire dalla base B_V applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt e normalizzando.

(e) Assegnato il sottospazio vettoriale $U:x_1+x_2+2x_3=0,\ 2x_1+x_2+3x_3=0$, determinare equazioni cartesiane di $W=U^\perp$.

(f) Determinare il vettore $S_W(v^\sim)$ immagine del vettore $v^\sim=v_2+v_3$ nella simmetria ortogonale $S_W:V\to V$ di V rispetto a W.

Soluzione

(a) Considerata la matrice simmetrica reale A avente come righe $A^{(1)}=(2,1,1)$, $A^{(2)}=(1,2,1)$, $A^{(3)}=(1,1,2)$, risulta immediatamente $b(v,w)={}^tXAY$, essendo ${}^tX=(x_1,x_2,x_3)$ e ${}^tY=(y_1,y_2,y_3)$. Allora, come noto, la funzione reale b risulta essere una forma bilineare simmetrica reale. La forma quadratica reale $q:V\to\boldsymbol{R}$, associata a b, è tale che $q(v)=2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2+x_3)^2$. Essendo q(v) una somma di quadrati, si ha che $q(v)\geq 0$ per ogni $v\in V$. Inoltre $q(v)=0$ implica $x_1+x_2=0$, $x_1+x_3=0$, $x_2+x_3=0$ e quindi $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, onde $v=0$. Pertanto la forma quadratica reale q, e quindi la forma bilineare simmetrica b, è definita positiva. Si ha dunque che la funzione reale b è un prodotto scalare in V.

(b) Posto, come richiesto, $b(v,w)=\langle v,w\rangle$, ossia

$\langle v,w\rangle=2x_1y_1+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+2x_2y_2+x_2y_3+x_3y_1+x_3y_2+2x_3y_3$,

si ha

$|v|=\langle v,v\rangle^{1/2}=(2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2)^{1/2}=((x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2+x_3)^2)^{1/2}$.

(c) Risulta $\cos v'^\wedge w'=\langle v',w'\rangle/(|v'|\,|w'|)=-1/2\Rightarrow v'^\wedge w'=(2/3)\pi$,

(d) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, applicato alla base B_V, dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=$ $v_2-(1/2)v_1=-(1/2)v_1+v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=$

$v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,-(1/2)v_1+v_2\rangle/\langle-(1/2)v_1+v_2,-(1/2)v_1+v_2\rangle)(-(1/2)v_1+v_2)=$

$v_3-(1/2)v_1-(1/3)(-(1/2)v_1+v_2)=-(1/3)v_1-(1/3)v_2+v_3$.

Risultando poi $|w_1|=|v_1|=2^{1/2}$, $|w_2|=|-(1/2)v_1+v_2|=3^{1/2}/2^{1/2}$,

$|w_3|=|-(1/3)v_1-(1/3)v_2+v_3|=2/3^{1/2}$, si ha che la base ortonormale richiesta B_V' è costituita dai vettori $v_1'=w_1/|w_1|=(1/2^{1/2})v_1$, $v_2'=w_2/|w_2|=-(1/6^{1/2})v_1+(2^{1/2}/3^{1/2})v_2$,

$v_3'=w_3/|w_3|=-(3^{1/2}/6)v_1-(3^{1/2}/6)v_2+(3^{1/2}/2)v_3$.

(e) Risulta facilmente $U==\{t(v_1+v_2-v_3)|t\in\boldsymbol{R}\}$, con base costituita dal solo vettore $u=v_1+v_2-v_3$, quindi U è una retta vettoriale. Si ha allora $W=U^\perp=u^\perp:2x_1+x_1-x_1+x_2+2x_2-x_2+x_3+x_3-2x_3=0$, ossia $W:2x_1+2x_2=0$, ovvero $W:x_1+x_2=0$ e quindi W è un piano vettoriale.

(f) Essendo $W^\perp=U$ ed il vettore $u'=u/|u=(1/2)v_1+(1/2)v_2-(1/2)v_3$ una base ortonormale di U, risulta $S_W(v^\sim)=v^\sim-2P_U(v^\sim)=v^\sim-2\langle v^\sim,u'\rangle u'=$

$v_2+v_3-2\langle v_2+v_3,(1/2)v_1+(1/2)v_2-(1/2)v_3\rangle((1/2)v_1+(1/2)v_2-(1/2)v_3)=v_2+v_3-(v_1+v_2-v_3)=-v_1+2v_3$.

-

2.1. <u>Spazio euclideo numerico E^4. Riferimento cartesiano canonico</u> $RC(O;e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i punti $A(h)=(0,0,h,1)$, $B(h)=(-1,1,2h,,2)$, $D=(2,1,-1,1)$, $D=(0,1,1,0)$ e l'iperpiano p: $2x_1+x_2-x_3=0$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare equazioni parametriche della retta r_h passante per i punti A(h) e B(h).

(b) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per il punto C e perpendicolare all'iperpiano p.

(c) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale le rette r_h ed s risultino incidenti.

(d) Indicata semplicemente con r la retta corrispondente al valore h_0 del parametro h di cui al punto precedente, determinare equazioni cartesiane del piano q che contiene le rette r ed s.

(e) Determinare la distanza d(D,s) del punto D dalla retta s.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.1 si ha:

(a) equazioni parametriche di r_h sono $x_1=-t$, $x_2=t$, $x_3=h+ht$, $x_4=1+t$, $t\in\boldsymbol{R}$;

(b equazioni cartesiane di s sono, per esempio, $x_1-2x_2=0$, $x_2+x_3=0$, $x_4-1=0$;

(c) $h_0=0$;

(d) equazioni cartesiane di q sono, per esempio, $x_1+x_2+3x_3=0$, $x_1+2x_3+x_4-1=0$.

(e) $d(D,s)=3^{1/2}$.

2.2 <u>Spazio vettoriale reale V di dimensione tre. Base</u> $B_V=(v_1,v_2,v_3)$. Sia assegnata la funzione reale $b:V\times V\to\boldsymbol{R}$, tale che $b(v,w)=2x_1y_1-x_1y_2+x_1y_3-x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2+2x_3y_3$, essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$ e $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3$.

(a) Verificare che la funzione reale b è una forma bilineare reale, simmetrica e definita positiva, ossia che la funzione reale b è un prodotto scalare.

(b) Posto per comodità $b(v,w)=\langle v,w\rangle$, indicare l'espressione di $|v|$.

(c) Determinare l'angolo convesso $v'\hat{}w'$, essendo $v'=-v_1+v_3$, $w'=v_2+v_3$.

(d) Determinare la base ortonormale $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ ottenuta a partire dalla base B_V applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt e normalizzando.

(e) Assegnato il sottospazio vettoriale $U: x_1+2x_2-x_3=0$, $x_1-x_2+2x_3=0$, determinare equazioni cartesiane di $W=U^{\perp}$.

(f) Determinare il vettore $S_W(v^{\sim})$ immagine del vettore $v^{\sim}=v_1-v_3$ nella simmetria ortogonale $S_W:V\to V$ di V rispetto a W.

Soluzione

(a) Considerata la matrice simmetrica reale A avente come righe $A^{(1)}=(2,-1,1)$, $A^{(2)}=(-1,2,-1)$, $A^{(3)}=(1,-1,2)$, risulta immediatamente $b(v,w)={}^tXAY$, essendo ${}^tX=(x_1,x_2,x_3)$ e ${}^tY=(y_1,y_2,y_3)$. Allora, come noto, la funzione b, che è reale per ipotesi, risulta essere una forma bilineare simmetrica reale. La forma quadratica reale $q:V\to\boldsymbol{R}$, associata a b, è tale che $q(v)=2x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2=(x_1-x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2-x_3)^2$. Essendo q(v) una somma di quadrati, si ha che $q(v)\geq 0$ per ogni $v\in V$. Inoltre $q(v)=0$ implica $x_1-x_2=0$, $x_1+x_3=0$, $x_2-x_3=0$ e quindi $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, onde $v=0$. Pertanto la forma quadratica reale q, e quindi la forma bilineare simmetrica reale b, è definita positiva. Si ha dunque che la funzione reale b è un prodotto scalare in V.

(b) Posto, come richiesto, $b(v,w)=\langle v,w\rangle$, ossia

$\langle v,w\rangle=2x_1y_1-x_1y_2+x_1y_3-x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2+2x_3y_3$,

si ha

$|v|=\langle v,v\rangle^{1/2}=(2x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2)^{1/2}=((x_1-x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2-x_3)^2)^{1/2}$.

(c) Risulta $\cos v'\hat{}w'=\langle v',w'\rangle/(|v'|\,|w'|)=1/2\Rightarrow v'\hat{}w'=(1/3)\pi$,

(d) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, applicato alla base B_V, dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=$ $v_2+(1/2)v_1=(1/2)v_1+v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=$ $v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,(1/2)v_1+v_2\rangle/\langle(1/2)v_1+v_2,(1/2)v_1+v_2\rangle)((1/2)v_1+v_2)=$ $v_3-(1/2)v_1+(1/3)((1/2)v_1+v_2)= v_3-(1/2)v_1+(1/6)v_1+(1/3)v_2=-(1/3)v_1+(1/3)v_2+v_3$.
Risultando poi $|w_1|=|v_1|=2^{1/2}$, $|w_2|=|(1/2)v_1+v_2|=3^{1/2}/2^{1/2}$, $|w_3|=|-(1/3)v_1+(1/3)v_2+v_3|=2/3^{1/2}$, si ha che la base ortonormale richiesta B_V' è costituita dai vettori $v_1'=w_1/|w_1|=(1/2^{1/2})v_1$, $v_2'=w_2/|w_2|=-(1/6^{1/2})v_1+(2^{1/2}/3^{1/2})v_2$, $v_3'=w_3/|w_3|=-(3^{1/2}/6)v_1+(3^{1/2}/6)v_2+(3^{1/2}/2)v_3$.
(e) Risulta facilmente $U=\{t(v_1-v_2-v_3)|t\in \boldsymbol{R}\}$, con base costituita dal solo vettore $u= v_1-v_2-v_3$, quindi U è una retta vettoriale. Si ha allora $W=U^{\perp}=u^{\perp}:2x_1+x_1-x_1-x_2-2x_2+x_2+x_3+x_3-2x_3=0$, ossia $W:2x_1-2x_2=0$, ovvero $W:x_1-x_2=0$ e quindi W è un piano vettoriale.
(f) Essendo $W^{\perp}=U$ ed il vettore $u'=u/|u|=(1/2)v_1-(1/2)v_2-(1/2)v_3$ una base ortonormale di U, risulta $S_W(\tilde{v})=\tilde{v}-2P_U(\tilde{v})=\tilde{v}-2\langle\tilde{v},u'\rangle u'=$
$v_1-v_3-2\langle v_1-v_3,(1/2)v_1-(1/2)v_2-(1/2)v_3\rangle((1/2)v_1-(1/2)v_2-(1/2)v_3)=v_1-v_3-(v_1-v_2-v_3)=v_2$.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere Pf-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 13–2-2013

1.1. Spazio euclideo ordinario *E*. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti A(1,-1,1), B(0,1,1), C(1,1,0) e i piani p_1:x-y+z=0, p_2:2x-y+2z-1=0.

(a) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per il punto A e parallela ai piani p_1 e p_2.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano p passante per il punto B e perpendicolare alla retta r.

(c) Determinare equazioni cartesiane del fascio di rette contenute nel piano p e passanti per il punto D d'intersezione della retta r con il piano p.

(d) Determinare la retta s del fascio, di cui al quesito (c), perpendicolare alla retta s´:y-2=0, x-z+1=0.

(e) Detto P il punto generico della retta r, determinare l'area *A* del triangolo BCP al variare del punto P sulla retta r.

(f) Giustificare geometricamente il risultato ottenuto nel quesito (e).

Soluzione

(a) Equazioni in forma di rapporti uguali della retta generica passante per il punto A sono (x-1)/l=(y+1)/m=(z-1)/n, dove l, m, n hanno il significato di parametri direttori della retta. Le condizioni di perpendicolarità di tale retta con i piani p_1 e p_2 danno l-m+n=0 e 2l-m+2n=0. Allora parametri direttori della retta r sono, per esempio, (l,m,n)=(1,0,-1). Pertanto equazioni in forma di rapporti uguali della retta r sono (x-1)/l=(y+1)/0=(z-1)/(-1), onde equazioni parametriche e cartesiane della retta r sono rispettivamente x=1+t, y=-1, z=1-t, tϵ***R***, e x+z-2=0, y+1=0.

(b) Essendo (l,m,n)=(1,0,-1) parametri direttori della retta r, la condizione di perpendicolarità del piano p con la retta r implica che coefficienti di giacitura del piano p sono, per esempio, (a,b,c)=(1,0,-1). Tenuto conto del passaggio del piano p per il punto B, si ha allora che l'equazione cartesiana del piano p è x-(z-1)=0, ossia x-z+1=0.

(c) Il fascio di rette, sul piano p, passanti per il punto D d'intersezione tra la retta r ed il piano p, può essere ottenuto come intersezione del piano p con il fascio di piani di asse la retta r. Un'equazione cartesiana del fascio di piani di asse la retta r è x+z-2+h(y+1)=0, ossia x+hy+z+h-2=0, essendo h un parametro reale. Allora equazioni cartesiane del fascio di rette richiesto sono x+hy+z+h-2=0, x-z+1=0.

(d) La retta generica del fascio di rette, di cui al quesito precedente, ha parametri direttori (-h,2,-h), mentre la retta s´ ha parametri direttori (1,0,1). Allora la condizione di perpendicolarità tra la retta generica del fascio e la retta s´ dà -h-h=0, ossia h=0 e quindi equazioni cartesiane della retta s sono x+z-2=0, x-z+1=0.

(e) L'area *A* del triangolo BCP è uguale a 1/2 del modulo del prodotto vettoriale dei due vettori geometrici rappresentati, rispettivamente, dai segmenti orientati BC e BP, i quali hanno, rispettivamente, coordinate (1,0,-1) e (1+t,-2,-t). Essendo tale prodotto vettoriale uguale al vettore -2i-j-2k, risulta $A=(1/2)|-2i-j-2k|=(1/2)9^{1/2}=3/2$.

(f) L'area *A* del triangolo BCP, di cui nel quesito precedente, non dipende dal parametro reale t, quindi essa è costante al variare del punto P sulla retta r. Tale risultato si giustifica osservando che l'area del triangolo BCP, essendo uguale a 1/2 del prodotto della lunghezza della base BC per la lunghezza dell'altezza relativa a tale base, non cambia al variare del punto P sulla retta r perché la retta r è parallela alla base BC.

1.2. Spazio vettoriale numerico reale $V=\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnate le matrici quadrate reali A, avente come righe $A^{(1)}=(0,0,0,0)$, $A^{(2)}=(2,-7,0,5)$, $A^{(3)}=(0,0,3.0)$, $A^{(4)}=(2,-10,0,8)$, B, avente come righe $B^{(1)}=(3,1,0,1)$, $B^{(2)}=(0,-2,0,0)$, $B^{(3)}=(0,1,0.0)$, $B^{(4)}=(0,0,0,3)$, e C, avente come righe $C^{(1)}=(1,0,0,0)$, $C^{(2)}=(0,2,0,0)$, $C^{(3)}=(0,0,1.0)$, $C^{(4)}=(0,0,0,1)$.

(a) Verificare che la matrice C è invertibile e determinare la matrice inversa C^{-1}.

(b) Dire se qualcuna delle matrici A, B, $D=C^{-1}AC$ è diagonalizzabile, giustificando la risposta.

(c) In corrispondenza di ciascuna delle matrici diagonalizzabili, di cui al quesito (b), determinare una forma diagonale di tale matrice ed una matrice che la diagonalizzi.

Soluzione

(a) Risulta $\det(C)=2\neq 0$ e quindi la matrice C, essendo non singolare, è invertibile. Si ha poi subito che la matrice C^{-1}, matrice inversa della matrice C, è la matrice diagonale avente come elementi della diagonale principale ordinatamente 1, 1/2, 1, 1 ossia gli elementi inversi degli elementi della diagonale principale della matrice diagonale C.

(b) Il polinomio caratteristico della matrice A è $\det(A-\lambda I)=-\lambda[(-7-\lambda)(3-\lambda)(8-\lambda)+50(3-\lambda)]=-\lambda(3-\lambda)[\lambda^2-\lambda-6]=\lambda(\lambda-3)^2(\lambda+2)$. Allora l'equazione caratteristica della matrice A è $\lambda(\lambda-3)^2(\lambda+2)=0$. Tale equazione dà gli autovalori $\lambda_1=-2$ con molteplicità algebrica $a_1=1$, $\lambda_2=0$ con molteplicità algebrica $a_2=1$ e $\lambda_3=3$ con molteplicità algebrica $a_3=2$. Essendo 4 l'ordine della matrice A ed essendo $a_1+a_2+a_3=4$ si ha intanto che è soddisfatta la prima delle due condizioni richieste per la diagonalizzabilità della matrice. La seconda condizione è espressa dall'uguaglianza della molteplicità geometrica e della molteplicità algebrica di ciascun autovalore. Orbene, da $1\leq g_1\leq a_1=1$ e $1\leq g_2\leq a_2=1$ si ha che $g_1=a_1$ e $g_2=a_2$. Allora per poter asserire che la matrice A è o non è diagonalizzabile occorre determinare la molteplicità geometrica g_3 dell'autovalore λ_3 e confrontarla con la molteplicità algebrica a_3. A tal proposito consideriamo l'autospazio V_3 della matrice A relativo all'autovalore $\lambda_3=3$, ricordiamo che tale autospazio è per definizione l'autospazio relativo all'autovalore λ_3 dell'endomorfismo $F_A:V\rightarrow V$ associato alla matrice A rispetto alla base canonica di V. Risulta V_3: $-3x_1=0$, $2x_1-10x_2+5x_4=0$, $0=0$, $2x_1-10x_2+5x_4=0$ e quindi
$V_3=\{t_1(0,0,1,0)+t_2(0,1,0,2)|t_1\ t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di V_3 è costituita dai due autovettori (0,0,1,0) e (0,1,0,2) e quindi risulta $g_3=\dim(V_3)=2$. Allora è anche $g_3=a_3$. Pertanto la matrice A è diagonalizzabile.

Passiamo ora a considerare la matrice B. Il polinomio caratteristico della matrice B è $\det(B-\lambda I)=(3-\lambda)[(-2-\lambda)(-\lambda)(3-\lambda)]=\lambda(\lambda-3)^2(\lambda+2)$. Osservato che il polinomio caratteristico della matrice B coincide con il polinomio caratteristico della matrice A, si ha che gli autovalori della matrice B sono gli stessi e con le stesse molteplicità algebriche della matrice A. Allora per sapere se la matrice B è o non è diagonalizzabile è sufficiente determinare la molteplicità geometrica g_3 dell'autovalore λ_3 e confrontarla con la molteplicità algebrica a_3. Detto E_3 l'autospazio della matrice B associato all'autovalore $\lambda_3=3$, si ha E_3: $x_2+x_4=0$, $-5x_3=0$, $x_2-x_3=0$, $0=0$ e quindi $E_3=\{t(1,0,0,0)|t\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di E_3 è costituita dal solo autovettore (1,0,0,0) onde risulta $g_3=\dim(E_3)=1$. Allora, essendo $g_3=1\neq a_3=2$, la matrice B non è diagonalizzabile.

Per quanto riguarda la matrice $D=C^{-1}AC$, possiamo affermare che tale matrice è diagonalizzabile perché essa è simile alla matrice diagonalizzabile A.

(c) Una forma diagonale della matrice A è la matrice diagonale A' che ha sulla diagonale principale ordinatamente gli autovalori -2, 0, 3, 3. Per ottenere una matrice che diagonalizzi la matrice A, determiniamo anzitutto una base di V rispetto alla quale la matrice associata all'endomorfismo F_A sia diagonale, ovvero una base di autovettori.

Essendo V_{-2}:$-2x_1=0$, $2x_1-5x_2+5x_4=0$, $5x_3=0$, $2x_1-10x_2+10x_4=0$, e quindi $V_{-2}=\{t(0,1,0,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$ con base costituita dal solo autovettore (0,1,0,1); V_0:$0=0$, $2x_1-7x_2+5x_4=0$, $3x_3=0$, $2x_1-10x_2+8x_4=0$, e quindi $V_0=\{t(1,1,0,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$ con base costituita dal solo autovettore (1,1,0,1), dove con V_{-2} e V_0 abbiamo indicato gli autospazi associati, rispettivamente, agli autovalori $\lambda_1=-2$ e $\lambda_2=0$, ed avendo già determinato una base di autovettori dell'autospazio V_3, si ha che una base di autovettori di V è $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$, essendo $v_1'=(0,1,0,1)$, $v_2'=(1,1,0,1)$, $v_3'=(0,0,1,0)$, $v_4'=(0,1,0,2)$.
Una matrice che diagonalizza la matrice A è, per esempio, la matrice M del cambiamento di base nel passaggio dalla base canonica B_V alla base di autovettori B_V'. Tale matrice, dovendo avere come colonne le colonne delle coordinate dei vettori v_1', v_2', v_3', v_4', ha come righe $M^{(1)}=(0,1,0,0)$, $M^{(2)}=(1,1,0,1)$, $M^{(3)}=(0,0,1,0)$, $M^{(4)}=(1,1,0,2)$. Notiamo esplicitamente che risulta $A'=M^{-1}AM$.
Passiamo ora alla matrice diagonalizzabile D. Dall'uguaglianza $D=C^{-1}AC$ si trae $A=CDC^{-1}$. Andando a sostituire CDC^{-1} al posto di A in $A'=M^{-1}AM$, si ha $A'=M^{-1}(CDC^{-1})M=(M^{-1}C)D(C^{-1}M)=(C^{-1}M)^{-1}D(C^{-1}M)$. Allora, posto per comodità $C^{-1}M=N$, risulta $A'=N^{-1}AN$ e quindi una forma diagonale della matrice D è la matrice diagonale A' mentre una matrice che diagonalizza la matrice D è la matrice invertibile $N=C^{-1}M$, ossia la matrice N avente come righe $N^{(1)}=(0,1,0,0)$, $N^{(2)}=(1/2,1/2,0,1/2)$, $N^{(3)}=(0,0,1,0)$, $N^{(4)}=(1,1,0,2)$.

2.1. <u>Spazio euclideo ordinario ***E***.</u> RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti A(-1,1,1), B(1,1,0), C(1,0,1) e i piani p_1:$x-y-z=0$, p_2:$x-2y-2z+1=0$.

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A e parallela ai piani p_1 e p_2.
(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano p passante per il punto B e perpendicolare alla retta r.
(c) Determinare equazioni cartesiane del fascio di rette contenute nel piano p e passanti per il punto D d'intersezione della retta r con il piano p.
(d) Determinare la retta s del fascio, di cui al quesito (c), perpendicolare alla retta s':$z-2=0$, $y-z-1=0$.
(e) Detto P il punto generico della retta r, determinare l'area *A* del triangolo BCP al variare del punto P sulla retta r.
(f) Giustificare geometricamente il risultato ottenuto nel quesito (e).

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.1, si ha:
(a) equazioni parametriche e cartesiane della retta r sono, rispettivamente, $x=-1$, $y=1-t$, $z=1+t$, $t\in\boldsymbol{R}$, e $y+z-2=0$, $x+1=0$;;
(b) equazione cartesiana del piano p è $y-z-1=0$;
(c) equazioni cartesiane del fascio di rette, sul piano p, passanti per il punto D sono $hx+y+z+h-2=0$, $y-z-1=0$;
(d) equazioni cartesiane della retta s sono $y+z-2=0$, $y-z-1=0$;
(e) $A=3/2$;
(f) l'area *A* del triangolo BCP è costante al variare del punto P sulla retta r perché la retta r è parallela alla base BC del triangolo.

2.2. Spazio vettoriale numerico reale V=$\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnate le matrici quadrate reali A, avente come righe $A^{(1)}=(0,0,0,0)$, $A^{(2)}=(3,-8,0,5)$, $A^{(3)}=(0,0,2.0)$, $A^{(4)}=(3,-10,0,7)$ B, avente come righe $B^{(1)}=(0,0,0,0)$, $B^{(2)}=(1,2,1,0)$, $B^{(3)}=(1,0,-3.1)$, $B^{(4)}=(1,0,0,2)$, e C, avente come righe $C^{(1)}=(-1,0,0,0)$, $C^{(2)}=(0,1,0,0)$, $C^{(3)}=(0,0,-2.0)$, $C^{(4)}=(0,0,0,-1)$.

(a) Verificare che la matrice C è invertibile e determinare la matrice inversa C^{-1}.

(b) Dire se qualcuna delle matrici A, B, $D=C^{-1}AC$ è diagonalizzabile, giustificando la risposta.

(c) In corrispondenza di ciascuna delle matrici diagonalizzabili, di cui al quesito (b), determinare una forma diagonale di tale matrice ed una matrice che la diagonalizzi.

Soluzione

(a) Risulta $\det(C)=-2\neq 0$ e quindi la matrice C, essendo non singolare, è invertibile. Si ha poi subito che la matrice C^{-1}, matrice inversa della matrice C, è la matrice diagonale avente come elementi della diagonale principale ordinatamente -1, 1, -1/2, -1 ossia gli elementi inversi degli elementi della diagonale principale della matrice diagonale C.

(b) Il polinomio caratteristico della matrice A è $\det(A-\lambda I)=-\lambda[(-8-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda)+50(2-\lambda)]=-\lambda(2-\lambda)[\lambda^2+\lambda-6]=\lambda(\lambda-2)^2(\lambda+3)$. Allora l'equazione caratteristica della matrice A è $\lambda(\lambda-2)^2(\lambda+3)=0$. Tale equazione dà gli autovalori $\lambda_1=-3$ con molteplicità algebrica $a_1=1$, $\lambda_2=0$ con molteplicità algebrica $a_2=1$ e $\lambda_3=2$ con molteplicità algebrica $a_3=2$. Essendo 4 l'ordine della matrice A ed essendo $a_1+a_2+a_3=4$ si ha intanto che è soddisfatta la prima delle due condizioni richieste per la diagonalizzabilità della matrice. La seconda condizione è espressa dall'uguaglianza della molteplicità geometrica e della molteplicità algebrica di ciascun autovalore. Orbene, da $1\leq g_1\leq a_1=1$ e $1\leq g_2\leq a_2=1$ si ha che $g_1=a_1$ e $g_2=a_2$. Allora per poter asserire che la matrice A è o non è diagonalizzabile occorre determinare la molteplicità geometrica g_3 dell'autovalore λ_3 e confrontarla con la molteplicità algebrica a_3. A tal proposito consideriamo l'autospazio V_2 della matrice A relativo all'autovalore $\lambda_3=2$, ricordiamo che tale autospazio è per definizione l'autospazio relativo all'autovalore λ_3 dell'endomorfismo $F_A:V\rightarrow V$ associato alla matrice A rispetto alla base canonica di V. Risulta V_2:$-2x_1=0$, $3x_1-10x_2+5x_4=0$, $0=0$, $3x_1-10x_2+5x_4=0$ e quindi
$V_2=\{t_1(0,0,1,0)+t_2(0,1,0,2)|t_1\ t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di V_2 è costituita dai due autovettori (0,0,1,0) e (0,1,0,2) e quindi risulta $g_3=\dim(V_3)=2$. Allora è anche $g_3=a_3$. Pertanto la matrice A è diagonalizzabile.

Passiamo ora a considerare la matrice B. Il polinomio caratteristico della matrice B è $\det(B-\lambda I)=-\lambda[(2-\lambda)^2(-\lambda-3)]=\lambda(\lambda-2)^2(\lambda+3)$. Osservato che il polinomio caratteristico della matrice B coincide con il polinomio caratteristico della matrice A, si ha che gli autovalori della matrice B sono gli stessi e con le stesse molteplicità algebriche della matrice A. Allora per sapere se la matrice B è o non è diagonalizzabile è sufficiente determinare la molteplicità geometrica g_3 dell'autovalore λ_3 e confrontarla con la molteplicità algebrica a_3. Detto E_2 l'autospazio della matrice B associato all'autovalore $\lambda_3=2$, si ha
E_2:$-2x_1=0$, $x_1+x_3=0$, $x_1-5x_3+x_4=0$, $x_1=0$ e quindi $E_2=\{t(0,1,0,0)|t\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di E_2 è costituita dal solo autovettore (0,1,0,0) onde risulta $g_3=\dim(E_2)=1$. Allora, essendo $g_3=1\neq a_3=2$, la matrice B non è diagonalizzabile.

Per quanto riguarda la matrice $D=C^{-1}AC$, possiamo affermare che tale matrice è diagonalizzabile perché essa è simile alla matrice diagonalizzabile A.

(c) Una forma diagonale della matrice A è la matrice diagonale A' che ha sulla diagonale principale ordinatamente gli autovalori -3, 0 ,2 ,2. Per ottenere una matrice che diagonalizzi

la matrice A, determiniamo anzitutto una base di V rispetto alla quale la matrice associata all'endomorfismo F_A sia diagonale, ovvero una base di autovettori.
Essendo V_{-3}:$3x_1=0$, $3x_1-5x_2+5x_4=0$, $5x_3=0$, $3x_1-10x_2+10x_4=0$, e quindi $V_{-3}=\{t(0,1,0,1)|t\in \boldsymbol{R}\}$ con base costituita dal solo autovettore (0,1,0,1); V_0:$0=0$, $3x_1-8x_2+5x_4=0$, $2x_3=0$, $3x_1-10x_2+7x_4=0$, e quindi $V_0=\{t(1,1,0,1)|t\in \boldsymbol{R}\}$ con base costituita dal solo autovettore (1,1,0,1), dove con V_{-3} e V_0 abbiamo indicato gli autospazi associati, rispettivamente, agli autovalori $\lambda_1=-3$ e $\lambda_2=0$, ed avendo già determinato una base di autovettori dell'autospazio V_2, si ha che una base di autovettori di V è $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$, essendo $v_1'=(0,1,0,1)$, $v_2'=(1,1,0,1)$, $v_3'=(0,0,1,0)$, $v_4'=(0,1,0,2)$.
Una matrice che diagonalizza la matrice A è, per esempio, la matrice M del cambiamento di base nel passaggio dalla base canonica B_V alla base di autovettori B_V'. Tale matrice, dovendo avere come colonne le colonne delle coordinate dei vettori v_1', v_2', v_3', v_4', ha come righe $M^{(1)}=(0,1,0,0)$, $M^{(2)}=(1,1,0,1)$, $M^{(3)}=(0,0,1,0)$, $M^{(4)}=(1,1,0,2)$. Notiamo esplicitamente che risulta $A'=M^{-1}AM$.
Passiamo ora alla matrice diagonalizzabile D. Dall'uguaglianza $D=C^{-1}AC$ si trae $A=CDC^{-1}$. Andando a sostituire CDC^{-1} al posto di A in $A'=M^{-1}AM$, si ha $A'=M^{-1}(CDC^{-1})M=(M^{-1}C)D(C^{-1}M)=(C^{-1}M)^{-1}D(C^{-1}M)$. Allora, posto per comodità $C^{-1}M=N$, risulta $A'=N^{-1}AN$ e quindi una forma diagonale della matrice D è la matrice diagonale A' mentre una matrice che diagonalizza la matrice D è la matrice invertibile $N=C^{-1}M$, ossia la matrice N avente come righe $N^{(1)}=(0,-1,0,0)$, $N^{(2)}=(1,1,0,1)$, $N^{(3)}=(0,0,-1/2,0)$, $N^{(4)}=(-1,-1,0,-2)$.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere Pf-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 21-6-2013

1. Spazio affine numerico $A^4(\mathbf{R})$. Riferimento affine canonico RA($O;e_1,e_2,e_3,e_4$). Sia assegnato il sistema lineare

$$x_1+x_2+x_3=0,\ x_2+(h+1)x_3+(h+2)x_4=1,\ 3x_1+2x_2+(2-h)x_3=-1,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali il sistema assegnato rappresenti un sottospazio affine S(h) di $A^4(\mathbf{R})$.

(b) In corrispondenza di ciascun valore del parametro h, di cui al punto (a), determinare un punto $P_0(h)$ e la giacitura W(h) del sottospazio affine S(h).

(c) Determinare una base di W(h) e la dimensione di S(h).

Soluzione

(a) Il sistema lineare assegnato rappresenta un sottospazio affine di $A^4(\mathbf{R})$ se e soltanto se esso è compatibile. Studiamo dunque la compatibilità del sistema al variare del parametro h. Utilizzando l'algoritmo di eliminazione di Gauss-Jordan, si ha che il sistema assegnato risulta equivalente al sistema lineare a scala compatibile $x_1+x_2+x_3=0$, $x_2+(h+1)x_3+(h+2)x_4=1$, $(h+2)x_4=0$, se $h\neq-2$, e al sistema lineare a scala, anch'esso compatibile, $x_1+x_2+x_3=0$, $x_2-x_3=1$, se $h=-2$. Allora il sistema lineare assegnato è compatibile per ogni valore del parametro h e quindi esso rappresenta un sottospazio affine di $A^4(\mathbf{R}$ per ogni valore del parametro h.

(b) Caso $h\neq-2$. Posto $x_3=t$ nel sistema lineare a scala $x_1+x_2+x_3=0$, $x_2+(h+1)x_3+(h+2)x_4=1$, $(h+2)x_4=0$ e risolvendo il sistema si ha subito $S(h)=\{(-1+ht,1-(h+1)t,t,0)\}_{t\in\mathbf{R}}=(-1,1,0,0)+\{t(h,-(h+1),1,0)\}_{t\in\mathbf{R}}$ e quindi un punto di S(h) è, per esempio, $P_0(h)=(-1,1,0,0)$ mentre la giacitura di S(h) è $W(h)=\{t(h,-(h+1),1,0)\}_{t\in\mathbf{R}}$.

Caso $h=-2$. Posto $x_3=t_1$, $x_4=t_2$ nel sistema lineare compatibile $x_1+x_2+x_3=0$, $x_2-x_3=1$ e risolvendo il sistema si ha subito $S(-2)=\{(-1-2t_1,1+t_1,t_1,t_2)|t_1,t_2\in\mathbf{R}\}=(-1,1,0,0)+\{t_1(-2,1,1,0)+t_2(0,0,0,1)|t_1,t_2\in\mathbf{R}\}$ onde un punto di S(-2) è, per esempio, $P_0(-2)=(-1,1,0,0)$ e la giacitura di S(-2) è $W(-2)=\{t_1(-2,1,1,0)+t_2(0,0,0,1|t_1,t_2\in\mathbf{R}\}$.

(c) Caso $h\neq-2$. Una base di W(h) è, per esempio, quella costituita dal solo vettore $w(h)=(h,-(h+1),1,0)$ e quindi è $\dim(W(h))=1$. Essendo la dimensione di un sottospazio affine uguale alla dimensione della sua giacitura, si ha che $\dim(S(h))=\dim(W(h))=1$, onde S(h) è una retta.

Caso $h=-2$. Una base di W(-2) è, per esempio, quella costituita dai due vettori $w_1(-2)=(-2,1,1,0)$ e $w_2(-2)=(0,0,0,1)$. Pertanto è $\dim(W(-2))=2$ e quindi $\dim(S(-2))=\dim(W(-2))=2$, onde S(-2) è un piano.

2. Spazio vettoriale euclideo numerico $V=\mathbf{R}^3$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3)$. Sia $F_h:V\to V$ l'endomorfismo di V tale che

$$F_h(v)=(((h-4)/4)x_1+(h-2)x_2-(1/2)x_3,\ (h-2)x_2+(h-2)x_3,\ ((h-4)/4)x_1+(h-2)x_2+((h-4)/4)x_3),$$

essendo $v=(x_1,x_2,x_3)$ ed h un parametro reale.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'endomorfismo F_h sia simmetrico.

(b) Indicato semplicemente con F l'endomorfismo simmetrico corrispondente al valore h_0 di cui al punto (a), scrivere l'espressione di F(v) rispetto alla base canonica B_V.

(c) Determinare una base ortonormale $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ di V costituita da autovettori rispetto ad F.

(d) Verificare che la funzione reale $b:V\times V\to\mathbf{R}$ definita da $b(v,w)=\langle F(v),w\rangle$, essendo $w=(y_1,y_2,y_3)$, è una forma bilineare simmetrica reale.

(e) Determinare l'espressione di b(v,w) rispetto alla base ortonormale B_V'.

(f) Detta $q:V\to\boldsymbol{R}$ la forma quadratica reale associata alla forma bilineare simmetrica reale b, determinare l'espressione di q(v) rispetto alla base ortonormale B_V' e dedurne il tipo della forma quadratica reale q.

Soluzione

(a) La matrice A_h associata all'endomorfismo F_h, rispetto alla base canonica di $V=\boldsymbol{R}^3$, ha come righe $A_h^{(1)}=((h-4)/4,h-2,-1/2)$, $A_h^{(2)}=((0,h-2,h-2)$, $A_h^{(3)}=((h-4)/4,h-2,(h-4)/4)$. Essendo la base canonica ortonormale rispetto al prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo numerico $V=\boldsymbol{R}^3$, ossia rispetto al prodotto scalare standard di $V=\boldsymbol{R}^3$, si ha che l'endomorfismo F_h è simmetrico se e soltanto se la matrice A_h è simmetrica. Orbene la matrice A_h è simmetrica se e soltanto se è h-2=0, (h-4)/4=-1/2 e quindi se e soltanto se è h=2. Pertanto il valore richiesto del parametro h è $h_0=2$.

(b) Detto semplicemente F l'endomorfismo simmetrico corrispondente al valore h_0 del parametro di cui al punto precedente, risulta $F(v)=(-(1/2)\ x_1-(1/2)x_3,0,-(1/2)x_1\ -(1/2)x_3)$.

(c) Detta semplicemente A la matrice associata all'endomorfismo simmetrico F, si ha che A ha come righe $A^{(1)}=(-1/2,0,-1/2)$, $A^{(2)}=(0,0,0)$, $A^{(3)}=(-1/2,0,-1/2)$. Il polinomio caratteristico di F è $\det(A-\lambda I)=-\lambda^2(\lambda+1)$ e pertanto gli autovalori di F sono $\lambda_1=-1$, con molteplicità algebrica $a_1=1$ e $\lambda_2=0$, con molteplicità algebrica $a_2=2$.

(d) Detto V_{-1} l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1=-1$, si ha $V_{-1}:(1/2)x_1-(1/2)x_3=0,\ x_2=0,\ -(1/2)x_1+(1/2)x_3=0$ e quindi $V_{-1}=\{t(1,0,1)\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ con base ortonormale costituita dal solo autovettore unitario $v_1'=((1/2)^{1/2},0,(1/2)^{1/2})$. Risulta poi $V_0:-(1/2)x_1-(1/2)x_3=0,\ 0=0,\ -(1/2)x_1-(1/2)x_3=0$ e quindi $V_0=\{t_1(1,0,-1)+t_2(0,1,0)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$ con base ortonormale costituita dagli autovettori unitari ortogonali $v_2'=((1/2)^{1/2},0,-(1/2)^{1/2})$, $v_3'=(0,1,0)$. Essendo gli autovettori v_1' e v_2', v_3' associati agli autovettori distinti $\lambda_1=-1$ e $\lambda_2=0$, si ha che v_1' è ortogonale sia a v_2' sia a v_3'. Pertanto $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ è una base ortonormale costituita da autovettori rispetto ad F.

(d) Risulta $b(v,w)=\langle F(v),w\rangle=\langle(-(1/2)x_1-(1/2)x_3,0,-(1/2)x_1-(1/2)x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle= -(1/2)x_1y_1-(1/2)x_3y_1-(1/2)x_1y_3-(1/2)x_3y_3$. Si ha allora $b(v,w)={}^tXAY$, essendo ${}^tX=(x_1,x_2,x_3)$, ${}^tY=(y_1,y_2,y_3)$ ed A la matrice simmetrica associata all'endomorfismo simmetrico F rispetto alla base canonica di $V=\boldsymbol{R}^3$. Allora la funzione reale $b:V\times V\to\boldsymbol{R}$ è una forma bilineare simmetrica reale.

(e) Risulta $b(v_1',v_1')=\langle -v_1',v_1'\rangle=-1$, $b(v_1',v_2')=\langle -v_1',v_2'\rangle=0$, $b(v_1',v_3')=\langle -v_1',v_3'\rangle=0$, $b(v_2',v_2')=\langle 0,v_2'\rangle=0$, $b(v_2',v_3')=\langle 0,v_3'\rangle=0$, $b(v_3',v_3')=\langle 0,v_3'\rangle=0$. Allora la matrice simmetrica A' associata a b rispetto alla base ortonormale $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ ha come righe $A'^{(1)}=(-1,0,0)$, $A'^{(2)}=(0,0,0)$, $A'^{(3)}=(0,0,0)$. Pertanto risulta $b(v,w)=-x_1'y_1'$, essendo (x_1',x_2',x_3') e (y_1',y_2',y_3') rispettivamente le coordinate di v e w rispetto alla base ortonormale B_V'.

(f) Risulta $q(v)=b(v,v)=-(x_1')^2$ e quindi q è una forma quadratica reale semidefinita negativa.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere Pf-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 24–9-2013

1. Spazio euclideo ordinario *E*. RC(O;i,j,k). Siano assegnati il piano p:2x-y-z+1=0 e la retta r:x+y-z-1=0, x+y+2z-1=0.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano p′ contenente la retta r e perpendicolare al piano p.

(b) Determinare i punti A e B in cui il piano p′ incontra rispettivamente l'asse x e l'asse y.

(c) Determinare i punti C e D del piano p′ in modo tale che il triangolo BCD sia isoscele con base CD, abbia altezza AB ed abbia area $A=2(3^{1/2})$.

(d) Determinare equazioni parametriche della retta r′ passante per il punto $P_0(1,1,1)$ e perpendicolare al piano p.

(e) Determinare il volume *V* del tetraedro BCDE al variare del punto E sulla retta r′.

(f) Giustificare geometricamente il risultato ottenuto nel quesito (e).

Soluzione

(a) Il piano p′ appartiene al fascio *F* di piani avente come asse la retta r. Un'equazione cartesiana del fascio *F* è per esempio x+y-z-1+h(x+y+2z-1)=0, ossia (h+1)x+(h+1)y+(2h-1)z-h-1=0, essendo h un parametro reale. Essendo (2,-1,-1) coefficienti di giacitura del piano p, la condizione di perpendicolarità tra i piani p e p′ dà 2(h+1)-(h+1)-(2h-1)=0, ovvero h=2. Pertanto si ha p′:3x+3y+3z-3=0, ossia x+y+z-1=0.

(b) Il punto A, intersezione del piano p′ con l'asse x, ha coordinate cartesiane che si ottengono risolvendo il sistema lineare x+y+z-1=0, y=0, z=0 e quindi risulta A(1,0,0). Analogamente risolvendo il sistema lineare x+y+z-1=0, x=0, z=0 si ha B(0,1,0).

(c) I punti C e D devono appartenere anzitutto alla retta s passante per il punto A, giacente sul piano p′ e perpendicolare alla retta passante per i punti A e B che, come si può facilmente verificare, coincide con la retta r. Per ottenere la retta s, scriviamo anzitutto equazioni in forma di rapporti uguali della retta generica passante per il punto A. Tali equazioni sono (x-1)/l=y/m=z/n, dove l, m, n hanno il significato di parametri direttori della retta. Essendo A$\in$ p′, la condizione s$\subset$ p′ può essere espressa imponendo che s sia parallela a p′ e quindi che risulti l+m+n=0. La condizione di perpendicolarità tra s ed r, essendo (1,-1,0) parametri direttori di r è invece espressa da l-m=0. Il sistema lineare omogeneo costituito dalle due equazioni lineari omogenee l+m+n=0, l-m=0 dà subito (l,m,n)=(1,1,-2). Equazioni parametriche di s sono allora x=1+t, y=t, z=-2t, t$\in$***R*** e quindi il punto generico P di s ha coordinate cartesiane (1+t,t,-2t). Ora, per ottenere i punti C e D, imponiamo che l'area *A* del triangolo isoscele ABC sia uguale a $2(3^{1/2})$. Osservato che la lunghezza della semibase AP è $(t^2+t^2+4t^2)^{1/2}=(6t^2)^{1/2}$ e che la lunghezza di AB è $2^{1/2}$, si ha che deve essere $(6t^2)^{1/2}2^{1/2}= 2(3^{1/2})$, ossia t=±1. Allora i punti C e D richiesti sono, per esempio, i punti di coordinate cartesiane rispettivamente (0,-1,2) e (2,1,-2).

(d) La retta r′, dovendo essere perpendicolare al piano p, avrà come parametri direttori, per esempio, (l′,m′,n′)=(2,-1,-1). Equazioni parametriche di r′ sono allora x=1+2t′, y=1-t′, z=1-t′, t′$\in$***R***.

(e) Il punto generico E, variabile sulla retta r′, ha coordinate (1+2t′,1-t′,1-t′). Allora il volume *V* del tetraedro BCDE, essendo uguale ad un sesto del modulo del prodotto misto dei vettori geometrici rappresentati rispettivamente dai segmenti orientati BC, BD e BE, uguaglia un sesto del modulo del determinante della matrice avente come righe (0,-2,2), (2,0-2) e (1+2t′,-t′,1-t′) e quindi risulta *V*=4/3.

(f) Il volume V, calcolato nel punto (e), non dipende da t' e quindi non dipende dal particolare punto E preso su r'. Tale risultato si giustifica osservando che la retta r', essendo perpendicolare al piano p è parallela al piano p'.

2. Spazi vettoriali euclidei numerici $V=\boldsymbol{R}^4$ e $W=\boldsymbol{R}^3$. Sia $F_h:V \to W$ l'applicazione lineare tale che $F_h(v)=(x_1-x_3+hx_4, x_2+x_3-x_4, (2h+1)x_1-x_2-2x_3+(h+1)x_4)$, essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ed h un parametro reale.

- **(a)** Determinare i valori del parametro reale h in corrispondenza dei quali l'applicazione lineare F_h sia surgettiva.
- **(b)** Per ogni valore del parametro h, di cui al punto precedente, indicato con U_h il nucleo dell'applicazione surgettiva F_h, determinare equazioni cartesiane di U_h ed una base di U_h.
- **(c)** Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale $U_h^{\perp}$ ortogonale ad U_h.
- **(d)** Determinare equazioni cartesiane di $U_h^{\perp}$.

Soluzione

(a) La matrice A_h, associata all'applicazione lineare F_h rispetto alle basi canoniche di V e W, ha come righe rispettivamente $A_h^{(1)}=(1,0,-1,h)$, $A_h^{(2)}=(0,1,1,-1)$, $A_h^{(3)}=(2h+1,-1,--2,h+1)$. Allora l'applicazione lineare F_h è surgettiva se e soltanto se risulta $rg(A_h)=dim(W)=3$: Calcoliamo dunque $rg(A_h)$ al variare del parametro h. Intanto, essendo tre il numero dell righe di A_h, è $rg(A_h)\leq 3$ per ogni valore del parametro h. Inoltre per ogni valore del parametro h è $2\leq rg(A_h)$ giacché la matrice A_h contiene minori del secondo ordine a determinante non nuullo che non dipendono da h, per esempio quello, che indicheremo con C, costituito dagli elementi d'incrocio delle prime due righe e delle prime due colonne che ha determinante uguale ad 1. Orlando il minore C con la terza riga e la terza colonna di A_h, si ha un minore del terzo ordine di A_h avente come determinante 2h e quindi che si annulla se e soltanto se è h=0. Orlando invece il minore C con la terza riga e la quarta colonna di A_h si ha un minore del terzo di A_h avente come determinante $-2h^2$ e quindi che si annulla anch'esso se e soltanto se è h=0. Allora, per il teorema di Kronecker, risulta $rg(A_h)=2$ se e soltanto se è h=0 e quindi $rg(A_h)=3$ per ogni $h\neq 0$. Pertanto l'applicazione lineare F_h è surgettiva se e soltanto è $h\neq 0$.
(b) Equazioni cartesiane di U_h sono $x_1-x_3+hx_4=0$, $x_2+x_3-x_4=0$, $(2h+1)x_1-x_2-2x_3+(h+1)x_4=0$, $h\neq 0$. Tali equazioni costituiscono un sistema lineare omogeneo di tre equazioni in quattro incognite con matrice dei coefficienti delle incognite associata A_h. Orbene, essendo $rg(A_h)=3$ per ogni $h\neq 0$, si ha che tale sistema ammette ∞^1 soluzioni tra di loro proporzionali. Una soluzione non banale del sistema è data dalla quaterna $(A_1(h),A_2(h),A_3(h),A_4(h))$, dove $(A_1(h),A_2(h),A_3(h),A_4(h))$ sono i determinanti, presi a segni alterni, dei minori del terzo ordine che si ottengono rispettivamente cancellando la prima, la seconda, la terza e la quarta colonna nella matrice A_h. Osservato che i minori del terzo ordine ottenuti cancellando rispettivamente la terza e la quarta colonna di A_h coincidono con i minori del terzo ordine che orlano C, già considerati, e che quindi hanno come determinante $-2h^2$ e 2h, si ha intanto che è $A_3(h)=-2h^2$ e $A_4(h)=-2h$. Si ha poi subito che è $A_1(h)=0$ e $A_2(h)=2h^2-2h$. Lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo è allora $S_0(h)=\{t(0,h-1,-h,-1)|t\in\boldsymbol{R}\}$ e quindi, essendo $h\neq 0$, una base di U_h è, per esempio, quella costituita dal solo vettore $v_0(h)=(0,h-1,-h,-1)$.
(c) Un sistema di generatori di $U_h^{\perp}$ è costituito dai vettori riga della matrice A_h, ossia dai vettori $v_1(h)=(1,0,-1,h)$. $v_2(h)=(0,1,1,-1)$. $v_3(h)=(2h+1,-1,-2,h+1)$. Essendo tali vettori indipendenti perché tali sono le righe della matrice A_h per $h\neq 0$, si ha che essi costituiscono una base di $U_h^{\perp}$ onde è $dim(U_h^{\perp})=3$, ossia $U_h^{\perp}$ è un iperpiano vettoriale di V.

(d) Essendo $U_h^{\perp}$ un iperpiano vettoriale di V, si ha che esso può essere rappresentato da una sola equazione cartesiana. Ebbene una tale equazione cartesiana può essere ottenuta imponendo che sia nullo il determinante della matrice avente come prime tre colonne le colonne delle coordinate dei vettori $v_1(h)$. $v_2(h)$ e $v_3(h)$ e come quarta colonna la colonna delle incognite (x_1,x_2,x_3,x_4). Eseguendo i calcoli, si ha subito $U_h^{\perp}$:$(h-1)x_2-hx_3-x_4=0$.