RENZO MAZZOCCO

CORSO DI GEOMETRIA
(PER FISICI)

RACCOLTA DEGLI ESERCIZI D'ESONERO E D'ESAME DI GEOMETRIA
DELL'ANNO ACCADEMICO 2011-2012

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO"
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
Novembre 2012

ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere P-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova Scritta del 29–11-2011

1.1. Spazio vettoriale numerico reale $V=\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U(h)=Span((u_1(h),u_2(h),u_3(h),u_4(h))$, essendo $u_1(h)=(1,1,h,h)$, $u_2(h)=(1,1,h+1,h)$, $u_3(h)=(1,1,h+2,h)$, $u_4(h)=(-1,h,h,-h)$, dove h è un parametro reale, e W: $x_2+x_3-x_4=0$, $2x_2+x_3-2x_4=0$, $x_2+2x_3-x_4=0$.

(a) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di U(h) al variare del parametro h.

(b) Detto h_0 il valore di h in corrispondenza del quale U(h) abbia dimensione 2 ed indicati d'ora in poi semplicemente con U il sottospazio vettoriale $U(h_0)$ e semplicemente con u_1, u_2, u_3, u_4 i vettori $u_1(h_0)$, $u_2(h_0)$, $u_3(h_0)$, $u_4(h_0)$, determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.

(c) Determinare una base e la dimensione di W.

(d) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(e) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(f) Dire se V è oppure non è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W, giustificando la risposta.

Soluzione

(a) L'algoritmo di Gauss-Jordan per l'estrazione di una base dal sistema di generatori $\{(u_1(h),u_2(h),u_3(h),u_4(h)\}$ di U(h) dà $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h),u_4(h))$ se $h\neq-1$ e $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h))$ se $h=-1$.

(b) Tenuto conto del punto (a), si ha che risulta dim(U(h)=2 se e soltanto se è h=-1. Pertanto $h_0=-1$ è il valore richiesto di h. Essendo la base B_U costituta dai vettori $u_1=(1,1,-1,-1)$ e $u_2=(1,1,0,-1)$, si ha che equazioni cartesiane di U si possono ottenere imponendo che sia minore di 3 il rango della matrice che ha come colonne le colonne delle coordinate dei vettori u_1, u_2 e del vettore incognito $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Tale procedimento dà immediatamente $U: x_1-x_2=0$, $x_1+x_4=0$.

(c) Utilizzando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan, si ha che il sistema di equazioni lineari omogenee che rappresenta W è equivalente, per esempio, al sistema lineare compatibile a scala $x_2+x_3-x_4=0$, $-x_3=0$, che dà $x_1=t_1$, $x_2=t_2$, $x_3=0$, $x_4=t_2$, essendo t_1 e t_2 parametri reali. Pertanto è $W=\{(t_1,t_2,0,t_2) \mid t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}=\{t_1(1,0,0,0)+t_2(0,1,0,1) \mid t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$, onde una base di W è, per esempio, $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(1,0,0,0)$ e $w_2=(0,1,0,1)$, e quindi è dim(W)=2.

(d) Un sistema di generatori di U+W è, per esempio, $\{u_1,u_2,w_1,w_2\}$. Applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan per l'estrazione di una base da tale sistema di generatori si ha che $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1,w_2)$ è una base di U+W, onde dim(U+W)=4.

(e) Equazioni cartesiane di $U\cap W$ sono, per esempio,

$x_1-x_2=0$, $x_1+x_4=0$, $x_2+x_3-x_4=0$, $2x_2+x_3-2x_4=0$, $x_2+2x_3-x_4=0$.

Utilizzando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan, si ha che il sistema costituito da tali equazioni risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare compatibile a scala

$x_1-x_2=0$, $x_2+x_4=0$, $x_3-2x_4=0$, $-2x_4=0$, che dà $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$. Allora è

$U\cap W=\{(0,0,0,0)\}$, onde $U\cap W$ non ha basi ed è $\dim(U\cap W)=0$.

(f) Nel punto (d) abbiamo già ottenuto che è $U\cap W=\{(0,0,0,0)\}$. Inoltre nel punto (c) abbiamo visto che è dim(U+W)=4 e quindi, essendo dim(V)=4, è anche U+W =V onde V è somma diretta di U e W.

1.2. Spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario. Base $B_V=(i,j,k)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$$hx+z=h,\ hy+hz=0,\ hx-hy+2(1-h)z=h,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Discutere la compatibilità del sistema al variare di h.

(b) Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistano.

(c) In corrispondenza di ogni valore del parametro h per cui il sistema assegnato sia compatibile, detta $U'(h)$ la sottovarietà lineare affine rappresentata dal sistema, determinare un vettore $v_0(h)$ appartenente a $U'(h)$ ed il sottospazio vettoriale U(h) parallelo a $U'(h)$.

(d) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di U(h).

(e) Determinare la dimensione di $U'(h)$.

Soluzione

(a) Osserviamo anzitutto che per h=0 il sistema assegnato risulta equivalente all'equazione lineare omogenea z=0 mentre per $h\neq0$ risulta equivalente al sistema lineare hx+z=h, y+z=0, hx-hy+2(1-h)z=h. Analizziamo dunque separatamente i due casi che si presentano per h=0 e per $h\neq0$.

Caso h=0. Il sistema è compatibile perché è tale l'equazione lineare omogenea z=0.

Caso $h\neq0$. Utilizzando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan, si ha che per h=1 il sistema assegnato risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare compatibile a scala x+z=1, y+z=0 mentre per $h\neq1$ risulta equivalente, per esempio, al sistema compatibile a scala hx+z=h, y+z=0, 2(1-h)z=h. In definitiva il sistema assegnato risulta compatibile per ogni valore di h.

(b) Caso h=0. L'equazione z=0 ammette come soluzioni $x=t_1$, $y=t_2$, z=0, essendo t_1, t_2 due parametri reali. L'insieme delle soluzioni del sistema assegnato in tal caso è $S(0)=S_0(0)=\{(t_1,t_2,0)\,|\,t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}=\{t_1(1,0,0)+t_2(0,1,0)\,|\,t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$.

Caso h=1. Il sistema lineare compatibile a scala x+z=1, y+z=0, equivalente al sistema assegnato per h=1, dà x=1-t, y=-t, z=t, essendo t un parametro reale. L'insieme delle soluzioni del sistema assegnato è allora $S(1)=\{(1-t,-t,t)\,|\,t\in \boldsymbol{R}\}=(1,0,0)+\{t(-1,-1,1)\,|\,t\in \boldsymbol{R}\}$.

Caso $0\neq h\neq1$. In questo caso il sistema lineare compatibile a scala hx+z=h, y+z=0, 2(1-h)z=h, equivalente al sistema assegnato, dà x=1, y=0, z=0 e quindi l'insieme delle soluzioni è $S(h)=(1,0,0)+\{(0,0,0)\}$.

(c) Caso h=0. In questo caso la sottovarietà lineare affine $U'(0)$ coincide con il sottospazio vettoriale $U(0)=\{t_1i+t_2j)\,|\,t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi ogni vettore di U(0) appartiene anche a $U'(0)$.

Caso h=1. In questo caso un vettore appartenente a $U'(1)$ è, per esempio, $v_0(1)=i$ e risulta $U(1)=\{t(-i-j+k)\,|\,t\in \boldsymbol{R}\}$.

Caso $0\neq h\neq1$. In questo caso l'unico vettore appartenente a $U'(h)$ è $v_0(h)=i$ e U(h) coincide con il sottospazio vettoriale nullo.

(d) Dalle espressioni di U(h) di cui al punto precedente si ha subito che, per esempio, una base di U(0) è $B_{U(0)}=(i,j)$ e una base di U(1) è $B_{U(1)}=(-i-j-k)$ mentre U(h), per $0\neq h\neq1$, coincidendo con il sottospazio vettoriale nullo non ha alcuna base. Si ha allora dim(U(0)=2, dim(U(1)=1 e dim(U(h)=0 per $0\neq h\neq1$.

(e) Tenuto conto dell punto (d), essendo la dimensione di una sottovarietà lineare affine uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale a cui essa è parallela, si ha $\dim(U'(0))=2$, $\dim(U'(1))=1$ e $\dim(U'(h))=0$ per $0\neq h\neq1$.

2.1. Spazio vettoriale numerico reale $V=\mathbf{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U(h)=Span((u_1(h),u_2(h),u_3(h),u_4(h))$, essendo $u_1(h)=(1,1,h,h-1)$, $u_2(h)=(1,1,h+1,h-1)$, $u_3(h)=(1,1,h-1,h-1)$, $u_4(h)=(-1,h-1,h-1,1-h)$, dove h è un parametro reale, e W: $x_1+x_2-x_4=0$, $x_1+2x_2-2x_4=0$, $2x_1+x_2-x_4=0$.

(a) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di U(h) al variare del parametro h.

(b) Detto h_0 il valore di h in corrispondenza del quale U(h) abbia dimensione 2 ed indicati d'ora in poi semplicemente con U il sottospazio vettoriale $U(h_0)$ e semplicemente con u_1, u_2, u_3, u_4 i vettori $u_1(h_0)$, $u_2(h_0)$, $u_3(h_0)$, $u_4(h_0)$, determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.

(c) Determinare una base e la dimensione di W.

(d) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(e) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(f) Dire se V è oppure non è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W, giustificando la risposta.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:

(a) $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h),u_4(h))$ se $h\neq 0$ e $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h))$ se $h=0$;

(b) $h_0=0$, U:$x_1-x_2=0$, $x_1+x_4=0$;

(c) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(0,0,1,0)$, $w_2=(0,1,0,1)$, dim(W)=2;

(d) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_2)$, dim(U+W)=3;

(e) $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dal solo vettore $w=w_1=(0,0,1,0)$, $\dim(U\cap W)=1$;

(f) V non è somma diretta di U e W perché, per esempio, è $U\cap W\neq\{(0,0,0,0)\}$ essendo $\dim(U\cap W)=1$.

2.2. Spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario. Base $B_V=(i,j,k)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$$x+(1-h)z=1-h,\ (1-h)x+(1-h)y=0,\ 2hx-(1-h)y+(1-h)z=1-h,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Discutere la compatibilità del sistema al variare di h.

(b) Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistano.

(c) In corrispondenza di ogni valore del parametro h per cui il sistema assegnato sia compatibile, detta $U'(h)$ la sottovarietà lineare affine rappresentata dal sistema, determinare un vettore $v_0(h)$ appartenente a $U'(h)$ ed il sottospazio vettoriale U(h) parallelo a $U'(h)$.

(d) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di U(h).

(e) Determinare la dimensione di $U'(h)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) il sistema è compatibile per ogni valore del parametro h;

(b) caso h=1: si ottiene $x=0$, $y=t_1$, $z=t_2$, essendo t_1, t_2 parametri reali,
caso h=0: si ottiene $x=-t+1$, $y=t-1$, $z=t$, essendo t un parametro reale,
caso $0\neq h\neq 1$: si ottiene $x=0$, $y=0$, $z=1$;

(c)) caso h=1: in questo caso la sottovarietà lineare affine $U'(1)$ coincide con il sottospazio vettoriale $U(1)=\{t_1j+t_2k \mid t_1,t_2\in\mathbf{R}\}$ e quindi ogni vettore di U(1) appartiene anche a $U'(1)$,
caso h=0: In questo caso un vettore appartenente a $U'(0)$ è, per esempio, $v_0(0)=i-j$ e risulta $U(0)=\{t(-i+j+k) \mid t\in\mathbf{R}\}$,

caso $0 \neq h \neq 1$: in questo caso l'unico vettore appartenente a $U'(h)$ è $v_0(h)=k$ e $U(h)$ coincide con il sottospazio vettoriale nullo;
(d) dalle espressioni di $U(h)$ di cui al punto precedente si ha subito che, per esempio, una base di $U(1)$ è $B_{U(1)}=(j,k)$ e una base di $U(0)$ è $B_{U(0)}=(-i+j+k)$ mentre $U(h)$, per $0 \neq h \neq 1$, coincidendo con il sottospazio vettoriale nullo non ha alcuna base. Si ha allora $\dim(U(1)=2$, $\dim(U(0)=1$ e $\dim(U(h)=0$ per $0 \neq h \neq 1$;
(e) tenuto conto del punto (d), essendo la dimensione di una sottovarietà affine uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale a cui essa è parallela, si ha $\dim(U'(1))=2$, $\dim(U'(0))=1$ e $\dim(U'(h))=0$ per $0 \neq h \neq 1$.

3.1. Spazio vettoriale numerico reale $V=\mathbb{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U(h)=\mathrm{Span}((u_1(h),u_2(h),u_3(h),u_4(h))$, essendo $u_1(h)=(1,1,3-h,1-h)$, $u_2(h)=(1,1,2-h,1-h)$, $u_3(h)=(1,1,1-h,1-h)$, $u_4(h)=(-1,1-h,1-h,h-1)$, dove h è un parametro reale, e W: $x_1+x_3-x_4=0$, $2x_1+x_3-2x_4=0$, $x_1+2x_3-x_4=0$.

(a) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di $U(h)$ al variare del parametro h.
(b) Detto h_0 il valore di h in corrispondenza del quale $U(h)$ abbia dimensione 2 ed indicati d'ora in poi semplicemente con U il sottospazio vettoriale $U(h_0)$ e semplicemente con u_1, u_2, u_3, u_4 i vettori $u_1(h_0)$, $u_2(h_0)$, $u_3(h_0)$, $u_4(h_0)$, determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.
(c) Determinare una base e la dimensione di W.
(d) Determinare una base e la dimensione di U+W.
(e) Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$.
(f) Dire se V è oppure non è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W, giustificando la risposta.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:
(a) $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h),u_4(h))$ se $h \neq 2$ e $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h))$ se $h=2$;
(b) $h_0=2$, U: $x_1-x_2=0$, $x_1+x_4=0$;
(c) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(0,1,0,0)$, $w_2=(1,0,0,1)$, $\dim(W)=2$;
(d) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1,w_2)$, $\dim(U+W)=4$;
(e) non esistono basi di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)=0$;
(f) V è somma diretta di U e W perché risulta $V=U+W$ e $U \cap W=\{(0,0,0,0)\}$.

3.2. Spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario. Base $B_V=(i,j,k)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$$hy-z=h,\ hx+hz=0,\ hx-hy+2(1+h)z=-h,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Discutere la compatibilità del sistema al variare di h.
(b) Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistano.
(c) In corrispondenza di ogni valore del parametro h per cui il sistema assegnato sia compatibile, detta $U'(h)$ la sottovarietà lineare affine rappresentata dal sistema, determinare un vettore $v_0(h)$ appartenente a $U'(h)$ ed il sottospazio vettoriale $U(h)$ parallelo a $U'(h)$.
(d) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di $U(h)$.
(e) Determinare la dimensione di $U'(h)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) il sistema è compatibile per ogni valore del parametro h;

(b) caso h=0: si ottiene $x=t_1$, $y=t_2$, $z=0$ essendo t_1, t_2 parametri reali,

caso h=-1: si ottiene $x=-t$, $y=1-t$, $z=t$, essendo t un parametro reale,

caso $-1\neq h\neq 0$: si ottiene $x=0$, $y=1$, $z=0$;

(c)) caso h=0: in questo caso la sottovarietà lineare affine $U'(0)$ coincide con il sottospazio vettoriale $U(0)=\{t_1i+t_2j) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi ogni vettore di U(0) appartiene anche a $U'(0)$,

caso h=-1: In questo caso un vettore appartenente a $U'(-1)$ è, per esempio, $v_0(-1)=j$ e risulta $U(0)=\{t(-i-j+k) \mid t\in \boldsymbol{R}\}$,

caso $-1\neq h\neq 0$: in questo caso l'unico vettore appartenente a $U'(h)$ è $v_0(h)=j$ e U(h) coincide con il sottospazio vettoriale nullo;

(d) dalle espressioni di U(h) di cui al punto precedente si ha subito che, per esempio, una base di U(0) è $B_{U(0)}=(i,j)$ e una base di U(-1) è $B_{U(-1)}=(-i-j+k)$ mentre U(h), per $-1\neq h\neq 0$, coincidendo con il sottospazio vettoriale nullo non ha alcuna base. Si ha allora dim(U(0)=2, dim(U(-1)=1 e dim(U(h)=0 per $-1\neq h\neq 0$;

(e) tenuto conto del punto (d), essendo la dimensione di una sottovarietà affine uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale a cui essa è parallela, si ha $\dim(U'(0))=2$, $\dim(U'(-1))=1$ e $\dim(U'(h))=0$ per $0\neq h\neq 1$.

4.1. Spazio vettoriale numerico reale $V=\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U(h)=\mathrm{Span}((u_1(h),u_2(h),u_3(h),u_4(h))$, essendo $u_1(h)=(1,1,h,h+1)$, $u_2(h)=(2,2,2h+1,2h+2)$, $u_3(h)=(1,1,h+3,h+1)$, $u_4(h)=(-1,h+1,h+1,-h-1)$, dove h è un parametro reale, e W: $x_1-x_2-x_3=0$, $2x_1-2x_2-x_3=0$, $x_1-x_2-2x_3=0$.

(a) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di U(h) al variare del parametro h.

(b) Detto h_0 il valore di h in corrispondenza del quale U(h) abbia dimensione 2 ed indicati d'ora in poi semplicemente con U il sottospazio vettoriale $U(h_0)$ e semplicemente con u_1, u_2, u_3, u_4 i vettori $u_1(h_0)$, $u_2(h_0)$, $u_3(h_0)$, $u_4(h_0)$, determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.

(c) Determinare una base e la dimensione di W.

(d) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(e) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(f) Dire se V è oppure non è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W, giustificando la risposta.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:

(a) $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h),u_4(h))$ se $h\neq -2$ e $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h))$ se $h=-2$;

(b) $h_0=-2$, U:$x_1-x_2=0$, $x_1+x_4=0$;

(c) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(1,1,0,0)$, $w_2=(0,0,0,1)$, dim(W)=2;

(d) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$, dim(U+W)=3;

(e) $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dal solo vettore $w=(-1,-1,0,1)$, $\dim(U\cap W)=1$;

(f) V non è somma diretta di U e W perché, per esempio, è $U\cap W\neq\{(0,0,0,0)\}$ essendo $\dim(U\cap W)=1$.

4.2. Spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario. Base $B_V=(i,j,k)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$$(1+h)x+y=1+h,\ (1+h)y+(1+h)z=0,\ (1+h)x-2hy-(1+h)z=1+h,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Discutere la compatibilità del sistema al variare di h.

(b) Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistano.

(c) In corrispondenza di ogni valore del parametro h per cui il sistema assegnato sia compatibile, detta $U'(h)$ la sottovarietà lineare affine rappresentata dal sistema, determinare un vettore $v_0(h)$ appartenente a $U'(h)$ ed il sottospazio vettoriale U(h) parallelo a $U'(h)$.

(d) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di U(h).

(e) Determinare la dimensione di $U'(h)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) il sistema è compatibile per ogni valore del parametro h;

(b) caso $h=-1$: si ottiene $x=t_1$, $y=0$, $z=t_2$, essendo t_1, t_2 parametri reali,

caso $h=0$: si ottiene $x=1+t$, $y=-t$, $z=t$, essendo t un parametro reale,

caso $-1\neq h\neq 0$: si ottiene $x=1$, $y=0$, $z=0$;

(c)) caso $h=-1$: in questo caso la sottovarietà lineare affine $U'(-1)$ coincide con il sottospazio vettoriale $U(-1)=\{t_1 i+t_2 k) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi ogni vettore di U(0) appartiene anche a $U'(0)$,

caso $h=0$: in questo caso un vettore appartenente a $U'(0)$ è, per esempio, $v_0(0)=i$ e risulta $U(0)=\{t(i-j+k) \mid t\in \boldsymbol{R}\}$,

caso $-1\neq h\neq 0$: in questo caso l'unico vettore appartenente a $U'(h)$ è $v_0(h)=i$ e U(h) coincide con il sottospazio vettoriale nullo;

(d) dalle espressioni di U(h) di cui al punto precedente si ha subito che, per esempio, una base di U(-1) è $B_{U(-1)}=(i,k)$ e una base di U(0) è $B_{U(0)}=(i-j+k)$ mentre U(h), per $-1\neq h\neq 0$, coincidendo con il sottospazio vettoriale nullo non ha alcuna base. Si ha allora dim(U(-1)=2, dim(U(0)=1 e dim(U(h)=0 per $-1\neq h\neq 0$;

(e) tenuto conto del punto (d), essendo la dimensione di una sottovarietà affine uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale a cui essa è parallela, si ha $\dim(U'(-1))=2$, $\dim(U'(0))=1$ e $\dim(U'(h))=0$ per $-1\neq h\neq 0$.

ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere P-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 27–1-2012

1.1. Spazio euclideo ordinario. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $Q_0(1,0,1)$, $Q_1(1,-h,0)$, $Q_2(0,h,1)$ essendo h un parametro reale, le rette r_1:x-2y=0, y-z+1=0, r_2:x+y=0, y+z+1=0 ed il piano p:x+z-2=0.

(a) Dire se le rette r_1 ed r_2 sono o non sono sghembe, giustificando la risposta.

(b) Determinare equazioni cartesiane della retta r incidente le rette r_1 ed r_2 e perpendicolare al piano p.

(c) Verificare che i tre punti Q_0, Q_1, Q_2 non sono allineati.

(d) Determinare l'equazione cartesiana del piano q_h passante per i tre punti Q_0, Q_1, Q_2.

(e) Determinare la mutua posizione della retta r e del piano q_h al variare di h in $\boldsymbol{R}$.

Soluzione

(a) La matrice completa, quadrata di ordine quattro, associata alle equazioni delle rette r_1 ed r_2 ha determinante uguale a 6. Essendo tale determinante non nullo, si ha che le rette r_1 ed r_2 sono sghembe.

(b) Equazioni parametriche di r_1 sono, per esempio, $x=2t_1-2$, $y=t_1-1$, $z=t_1$, $t_1\in\boldsymbol{R}$; allora coordinate cartesiane del punto generico P_1 di r_1 sono $(2t_1-2,t_1-1,t_1)$. Equazioni parametriche di r_2 sono, per esempio, $x=t_2+1$, $y=-t_2-1$, $z=t_2$, $t_2\in\boldsymbol{R}$ e quindi coordinate cartesiane del punto generico P_2 di r_2 sono $(t_2+1,-t_2-1,t_2)$. La condizione d'incidenza con le rette r_1 ed r_2 è soddisfatta dalla retta passante per i punti P_1 e P_2 e quindi di equazioni in forma di rapporti uguali $(x-2t_1+2)/(t_2+1-2t_1+2)=(y-t_1+1)/(-t_2-1-t_1+1)=(z-t_1)/(t_2-t_1)$, dove i denominatori hanno il significato di parametri direttori della retta. Essendo (a,b,c)=(1,0,1) i coefficienti di giacitura del piano p, la condizione di perpendicolarità della suddetta retta con il piano p può essere espressa imponendo che sia minore di 2 il rango della matrice avente come righe $(t_2-2t_1+3,-t_2-t_1,t_2-t_1)$ e (1,0,1). Tale condizione dà $-t_2-t_1=0$, $t_2-2t_1+3-t_2+t_1=0$ e quindi $t_1=3$, $t_2=-3$. Si ha allora r:(x-4)/1=(y-2)/0=(z-3)/1 onde equazioni cartesiane di r sono y-2=0, x-z-1=0.

(c) I vettori geometrici che hanno come rappresentanti i segmenti orientati Q_0Q_1 e Q_0Q_2 hanno come coordinate, rispettivamente, (0,-h,-1) e (-1,h,0). Tali terne non sono mai proporzionali e quindi i suddetti vettori geometrici sono sempre linearmente indipendenti; da ciò segue che i tre punti Q_0, Q_1, Q_2 non sono mai allineati.

(d) Imponendo che sia nullo il determinante della matrice che ha come righe (x-1,y,z-1), (0,-h,-1) e (-1,h,0) si ha che l'equazione cartesiana di q_h è hx+y-hz=0.

(e) Per ottenere la mutua posizione tra la retta r ed il piano q_h discutiamo il sistema quadrato costituito dalle equazioni cartesiane di r e di q_h. La matrice incompleta del sistema ha determinante uguale a 0 per ogni valore del parametro h e quindi essa, essendo non nullo il determinante del minore B costituito dagli elementi d'incrocio delle prime due righe con le prime due colonne, ha rango 2. Orlando il minore B entro la matrice completa del sistema e calcolando il determinante di tali minori si ha che tale matrice ha rango 3 per $h\neq-2$ e rango 2 per h=-2. Allora, per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile per $h\neq-2$ e compatibile per h=-2. Nel primo caso, ossia per $h\neq-2$, r e q_h hanno intersezione vuota e quindi, poiché in uno spazio affine tridimensionale non esistono rette e piani sghembi, r e q_h sono paralleli e disgiunti. Per h=-2 il sistema risulta equivalente al sistema costituito dalle prime due equazioni, ma tali equazioni rappresentano la retta r e quindi tale retta è contenuta nel piano q_{-2}.

1.2. Spazio vettoriale numerico $V=\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Sia assegnato l'endomorfismo $F_h:V\rightarrow V$ tale che

$$F_h(v)=((h+2)x_1,x_1-3x_2+2x_4,-(h+2)x_3,x_1-4x_2+3x_4),$$

essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ed h un parametro reale.

(a) Determinare la matrice A_h associata all'endomorfismo F_h rispetto alla base B_V.

(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'endomorfismo F_h ammette il numero 0 come autovalore.

(c) Detto F l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 di cui al punto precedente e indicata semplicemente con A la matrice ad esso associata, verificare che F è diagonalizzabile e determinare una base $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3,v'_4)$ di V costituita da autovettori rispetto ad F.

(d) Detta A′ la matrice diagonale associata ad F rispetto alla base B'_V, determinare una matrice quadrata non singolare C tale che risulti $A'=C^{-1}AC$.

(e) Scrivere l'espressione di F(v) rispetto alla base B'_V.

(f) Dire se l'endomorfismo F è oppure non è un automorfismo, giustificando la risposta.

Soluzione

(a) La matrice A_h richiesta ha come righe $A_h^{(1)}=(h+2,0,0,0)$, $A_h^{(2)}=(1,-3,0,2)$, $A_h^{(3)}=(0,0,-h-2,0)$, $A_h^{(4)}=(1,-4,0,3)$.

(b) L'equazione caratteristica dell'endomorfismo F_h è $\det(A_h-\lambda I)=0$, ossia $(h+2-\lambda)^2(1-\lambda^2)=0$. Tale equazione ammette come soluzione $\lambda=0$ se e soltanto se risulta $h+2=0$, ossia se e soltanto se è $h=-2$; pertanto è $h_0=-2$.

(c) Ponendo $h=h_0=-2$ nell'equazione caratteristica dell'endomorfismo F_h, si ha che l'equazione caratteristica di F è $\lambda^2(1-\lambda^2)=0$. Pertanto gli autovalori di F sono $\lambda_1=-1$, con molteplicità algebrica $a_1=1$, $\lambda_2=0$, con molteplicità algebrica $a_2=2$, e $\lambda_3=1$, con molteplicità algebrica $a_3=1$. Essendo $\dim(V)=4$ e risultando $a_1+a_2+a_3=4$, si ha che la matrice A è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica g_1 dell'autovalore λ_1 è uguale ad $a_1=1$, la molteplicità geometrica g_2 dell'autovalore λ_2 è uguale ad $a_2=2$ e la molteplicità geometrica g_3 dell'autovalore λ_3 è uguale a $a_3=1$. Essendo la molteplicità geometrica di un autovalore maggiore o uguale ad 1 e minore o uguale alla molteplicità algebrica dello stesso autovalore, si ha intanto che $g_1=a_1$ e $g_3=a_3$. Per sapere se l'endomorfismo F è o non è diagonalzzabile, ci resta soltanto da determinare g_2 e verificare se è oppure non è $g_2=a_2$. Sia V_0 l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_2=0$. Equazioni cartesiane di V_0 sono $x_1-3x_2+2x_4=0$, $x_1-4x_2+3x_4=0$. Risulta allora $V_0=\{t_1(1,1,0,1)+t_2(0,0,1,0)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di V_0 è costituita dagli autovettori $v_2'=(1,1,0,1)$, $v_3'=(0,0,1,0)$ e quindi risulta $g_2=\dim(V_0)=2=a_2$; pertanto l'endomorfismo F è diagonalizzabile. Per ottenere una base di V costituita da autovettori rispetto all'endomorfismo F, avendo già determinato una base dell'autospazio V_0, determiniamo una base dell'autospazio V_{-1} associato all'autovalore $\lambda_1=-1$ ed una base dell'autospazio V_1 associato all'autovalore $\lambda_3=1$. Si ha V_{-1}:$x_1=0$, $x_1-2x_2+2x_4=0$, $x_3=0$, $x_1-4x_2+4x_4=0$ e quindi $V_{-1}=\{t(0,1,0,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$, onde una base di V_{-1} è costituita dal solo autovettore $v_1'=(0,1,0,1)$. Si ha poi V_1:$-x_1=0$, $x_1-4x_2+2x_4=0$, $-x_3=0$, $x_1-4x_2+2x_4=0$ e quindi $V_1=\{t(0,1,0,2)|t\in\boldsymbol{R}\}$ con base costituita dal solo autovettore $v_4'=(0,1,0,2)$. Allora $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ è una base di V costituita da autovettori rispetto all'endomorfismo F.

(d) La matrice diagonale A', associata all'endomorfismo F rispetto alla base B_V', ha come righe $A'^{(1)}=(-1,0,0,0)$, $A'^{(2)}=(0,0,0,0)$, $A'^{(3)}=(0,0,0,0)$, $A'^{(4)}=(0,0,0,1)$. Una matrice C del tipo richiesto è, per esempio, la matrice del cambiamento di basi nel passaggio dalla base canonica B_V alla base di autovettori B_V' di V. Tale matrice ha come righe $C^{(1)}=(0,1,0,0)$, $C^{(2)}=(1,1,0,1)$, $C^{(3)}=(0,0,1,0)$, $C^{(4)}=(1,1,0,2)$.

(e) Risulta $F(v)=-x_1'v_1'+x_4'v_4'$, essendo (x_1',x_2',x_3',x_4') le coordinate di v rispetto alla base B_V'.

(f) Nel quesito (c) abbiamo ottenuto $V_0=\{t_1(1,1,0,1)+t_2(0,0,1,0)|t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$. Tale autospazio, essendo associato all'autovalore 0 di F, coincide con il nucleo Ker(F). Allora è $Ker(F)\neq 0$ onde l'endomorfismo F non è iniettivo e quindi non è un automorfismo.

2.1. Spazio euclideo ordinario. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $Q_0(1,1,0)$, $Q_1(0,1,-h)$, $Q_2(1,0,h)$ essendo h un parametro reale, le rette r_1:y-2z=0, x-z-1=0, r_2:y+z=0, x+z+1=0 ed il piano p:x+y+5=0.

(a) Dire se le rette r_1 ed r_2 sono o non sono sghembe, giustificando la risposta.
(b) Determinare equazioni cartesiane della retta r incidente le rette r_1 ed r_2 e perpendicolare al piano p.
(c) Verificare che i tre punti Q_0, Q_1, Q_2 non sono allineati.
(d) Determinare l'equazione cartesiana del piano q_h passante per i tre punti Q_0, Q_1, Q_2.
(e) Determinare la mutua posizione della retta r e del piano q_h al variare di h in $\boldsymbol{R}$.

Soluzione

(a) La matrice completa, quadrata di ordine quattro, associata alle equazioni delle rette r_1 ed r_2 ha determinante uguale a -6. Essendo tale determinante non nullo, si ha che le rette r_1 ed r_2 sono sghembe.

(b) Procedendo come nell'esercizio 1.1, si ha r:z-2=0, x-y+1=0,

(c) I vettori geometrici che hanno come rappresentanti i segmenti orientati Q_0Q_1 e Q_0Q_2 hanno come coordinate, rispettivamente, (-1,0,-h) e (0,-1,h). Tali terne non sono mai proporzionali e quindi i suddetti vettori geometrici sono sempre linearmente indipendenti; da ciò segue che i tre punti Q_0, Q_1, Q_2 non sono mai allineati.

(d) Imponendo che sia nullo il determinante della matrice che ha come righe (x-1,y-1,z), (-1,0,-h) e (0,-1,h) si ha che l'equazione cartesiana di q_h è hx-hy-z=0.

(e) Per ottenere la mutua posizione tra la retta r ed il piano q_h discutiamo il sistema quadrato costituito dalle equazioni cartesiane di r e di q_h. La matrice incompleta del sistema ha determinante uguale a 0 per ogni valore del parametro h e quindi essa, essendo non nullo il determinante del minore B costituito dagli elementi d'incrocio delle prime due righe con la seconda e terza colonna, ha rango 2. Orlando il minore B entro la matrice completa del sistema e calcolando il determinante di tali minori si ha che tale matrice ha rango 3 per $h\neq-2$ e rango 2 per h=-2. Allora, per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile per $h\neq-2$ e compatibile per h=-2. Nel primo caso, ossia per $h\neq-2$, r e q_h hanno intersezione vuota e quindi, poiché in uno spazio affine tridimensionale non esistono rette e piani sghembi, r e q_h sono paralleli e disgiunti. Per h=-2 il sistema risulta equivalente al sistema costituito dalle prime due equazioni, ma tali equazioni rappresentano la retta r e quindi tale retta è contenuta nel piano q_{-2}.

2.2. Spazio vettoriale numerico $V=\mathbf{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Sia assegnato l'endomorfismo $F_h:V\to V$ tale che

$$F_h(v)=((h-3)x_1,x_1-3x_2+2x_4,x_3,x_1-4x_2+3x_4),$$

essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ed h un parametro reale.

(a) Determinare la matrice A_h associata all'endomorfismo F_h rispetto alla base B_V.

(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'endomorfismo F_h ammette il numero 0 come autovalore.

(c) Detto F l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 di cui al punto precedente e indicata semplicemente con A la matrice ad esso associata, verificare che F è diagonalizzabile e determinare una base $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3,v'_4)$ di V costituita da autovettori rispetto ad F.

(d) Detta A´ la matrice diagonale associata ad F rispetto alla base B'_V, determinare una matrice quadrata non singolare C tale che risulti $A'=C^{-1}AC$.

(e) Scrivere l'espressione di F(v) rispetto alla base B'_V.

(f) Dire se l'endomorfismo F è oppure non è un automorfismo, giustificando la risposta.

Soluzione

(a) La matrice A_h richiesta ha come righe $A_h^{(1)}=(h-3,0,0,0)$, $A_h^{(2)}=(1,-3,0,2)$, $A_h^{(3)}=(0,0,1,0)$, $A_h^{(4)}=(1,-4,0,3)$.

(b) L'equazione caratteristica dell'endomorfismo F_h è $\det(A_h-\lambda I)=0$, ossia $-(h-3-\lambda)(1-\lambda)^2(1+\lambda)=0$. Tale equazione ammette come soluzione $\lambda=0$ se e soltanto se risulta $h-3=0$, ossia se e soltanto se è $h=3$; pertanto è $h_0=3$.

(c) Ponendo $h=h_0=3$ nell'equazione caratteristica dell'endomorfismo F_h, si ha che l'equazione caratteristica di F è $\lambda(1-\lambda)^2(1+\lambda)=0$. Pertanto gli autovalori di F sono $\lambda_1=-1$, con molteplicità algebrica $a_1=1$, $\lambda_2=0$, con molteplicità algebrica $a_1=1$, e $\lambda_3=1$, con molteplicità algebrica $a_3=2$. Essendo dim(V)=4 e risultando $a_1+a_2+a_3=4$ si ha che la matrice A è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica g_1 dell'autovalore λ_1 è uguale ad $a_1=1$, la molteplicità geometrica g_2 dell'autovalore λ_2 è uguale ad $a_2=1$ e la molteplicità geometrica g_3 dell'autovalore λ_3 è uguale a $a_3=2$. Essendo la molteplicità geometrica di un autovalore maggiore o uguale ad 1 e minore o uguale alla molteplicità algebrica dello stesso autovalore, si ha intanto che $g_1=a_1$ e $g_2=a_2$. Per sapere se l'endomorfismo F è o non è diagonalzzabile, ci resta da determinare g_3 e verificare se è o non è $g_3=a_3$. Sia V_1 l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_3=1$. Equazioni cartesiane di V_1 sono $-x_1=0$, $x_1-4x_2+2x_4=0$, $x_1-4x_2+2x_4=0$. Risulta allora $V_1=\{t_1(0,1,0,2)+t_2(0,0,1,0)|t_1,t_2\in\mathbf{R}\}$. Una base di V_1 è costituita dagli autovettori $v_3'=(0,1,0,2)$, $v_4'=(0,0,1,0)$ e quindi risulta $g_3=\dim(V_1)=2=a_3$; pertanto l'endomorfismo F è diagonalizzabile. Per ottenere una base di V costituita da autovettori rispetto all'endomorfismo F, avendo già determinato una base dell'autospazio V_1, determiniamo una base dell'autospazio V_{-1} associato all'autovalore $\lambda_1=-1$ ed una base dell'autospazio V_0 associato all'autovalore $\lambda_2=0$. Si ha V_{-1}: $x_1=0$, $x_1-2x_2+2x_4=0$, $2x_3=0$, $x_1-4x_2+4x_4=0$ e quindi $V_{-1}=\{t(0,1,0,1)|t\in\mathbf{R}\}$, onde una base di V_{-1} è costituita dal solo autovettore $v_1'=(0,1,0,1)$. Si ha poi V_0: $x_1-3x_2+2x_4=0$, $x_3=0$, $x_1-4x_2+3x_4=0$ e quindi $V_0=\{t(1,1,0,1)|t\in\mathbf{R}\}$ con base costituita dal solo autovettore $v_2'=(1,1,0,1)$. Allora $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ è una base di V costituita da autovettori rispetto all'endomorfismo F.

(d) La matrice diagonale A', associata all'endomorfismo F rispetto alla base B_V', ha come righe $A'^{(1)}=(-1,0,0,0)$, $A'^{(2)}=(0,0,0,0)$, $A'^{(3)}=(0,0,1,0)$, $A'^{(4)}=(0,0,0,1)$. Una matrice C del tipo richiesto è, per esempio, la matrice del cambiamento di basi nel passaggio dalla base canonica B_V alla base di autovettori B_V' di V. Tale matrice ha come righe $C^{(1)}=(0,1,0,0)$, $C^{(2)}=(1,1,1,0)$, $C^{(3)}=(0,0,0,1)$, $C^{(4)}=(1,1,2,0)$.

(e) Risulta $F(v)=-x_1'v_1'+x_3'v_3+x_4'v_4'$, essendo (x_1',x_2',x_3',x_4') le coordinate di v rispetto alla base B_V'.

(f) Nel quesito (c) abbiamo ottenuto $V_0=\{t(1,1,0,1)|t\in \boldsymbol{R}\}$. Tale autospazio, essendo associato all'autovalore 0 di F, coincide con il nucleo Ker(F). Allora è $Ker(F)\neq 0$ onde l'endomorfismo F non è iniettivo e quindi non è un automorfismo.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere P-Z)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e soluzioni della prova scritta del 1–2-2012

1.1. Spazio euclideo ordinario. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $P_0(1,0,0)$, $P_0'(0,1,0)$, le rette r_1:x+y-z-2=0, x-3y+z+1=0, r_2:x+2y+z=0, x+y=0, r_3:x+z-1=0, x-y=0 ed il piano p:x-y+z-2=0.

(a) Determinare la retta r passante per il punto P_0 parallela al piano p e perpendicolare alla retta r_1.
(b) Determinare la retta r´ passante per il punto P_0' e complanare con le rette r_2 ed r_3.
(c) Determinare la mutua posizione delle rette r ed r´.
(d) Determinare la distanza d(r, r´) delle rette r ed r´.
(e) Determinare il versore u della retta r´ orientata verso l'alto.

Soluzione

(a) La retta r può essere ottenuta come intersezione dei due piani p_1 e p_2 passanti per il punto P_0 rispettivamente parallelo al piano p e perpendicolare alla retta r_1. Il piano generico parallelo al piano p ha equazione cartesiana x-y+z+h=0, essendo h un parametro reale. Imponendo il passaggio per P_0 si ha h=-1. Pertanto l'equazione cartesiana di p_1 è x-y+z-1=0. Parametri direttori della retta r_1 sono (l_1,m_1,n_1)=(1,1,2) onde il piano p_2 ha equazione cartesiana x-1+y+2z=0, ossia x+y+2z-1=0. Allora equazioni cartesiane di r sono x-y+z-1=0, x+y+2z-1=0.

(b) La retta r´ può essere ottenuta come intersezione dei due piani p_1' e p_2' passanti per il punto P_0' e contenenti rispettivamente la retta r_2 e la retta r_3. Un'equazione cartesiana del piano generico del fascio F_2 di piani avente come asse la retta r_2 è $x+2y+z+h_2(x+y)=0$, ossia $(1+h_2)x+(2+h_2)y+z=0$, essendo h_2 un parametro reale. Il passaggio per P_0' dà $h_2=-2$ e quindi è p_1':x-z=0. Procedendo in modo analogo per p_2', si ottiene p_2':y+z-1. Allora equazioni cartesiane di r´ sono x-z=0, y+z-1=0.

(c) Il determinante della matrice quadrata del quarto ordine, associata alle equazioni cartesiane delle rette r ed r´, è uguale 4. Pertanto, essendo non nullo tale determinante, le rette r ed r´ sono sghembe. Inoltre, essendo (l,m,n)=(3,1,-2) parametri direttori di r e (l´,m´,n´)=(1,-1,1) parametri direttori di r´, si ha che tali rette sono perpendicolari; infatti risulta ll´+mm´+nn´=3-1-2=0.

(d) Il piano p´, contenente la retta r´ e parallelo alla retta r, ha equazione cartesiana che si ottiene uguagliando a 0 il determinante della matrice quadrata che ha come righe (x,y-1,z), (1,-1,1) e (3,1,-2). Pertanto risulta p´:x+5y+4z-5=0. Allora, essendo $d(r,r')=d(P_0,p')$, si ha $d(r,r')=|1-5|/(14)^{1/2}= 4/(14)^{1/2}$.

(e) I versori direttori della retta r´ sono $\pm(i-j+k)/(3)^{1/2}$. La condizione sull'orientazione della retta r´ implica che sia positiva la terza coordinata del versore direttore che orienta la retta, quindi il versore richiesto è $u=(i-j+k)/3^{1/2}$.

1.2. Spazi vettoriali euclidei numerici $V=\boldsymbol{R}^3$ e $W=\boldsymbol{R}^4$. Sia assegnata l'applicazione lineare $F_h:V\to W$ di equazioni cartesiane, rispetto alle basi canoniche di V e W,

$$y_1=x_1+hx_2+(2h-3)x_3,\ y_2=x_1+x_2-x_3,\ y_3=-x_1+x_2+5x_3,\ y_4=hx_1+x_2-2(h-1)x_3.$$

(a) Determinare la matrice A_h associata all'applicazione lineare F_h rispetto alle basi canoniche di V e W.
(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'applicazione lineare F_h non è iniettiva.

(c) Detta F l'applicazione lineare corrispondente al valore h_0 di cui al punto precedente e indicata semplicemente con A la matrice ad essa associata, determinare una base del nucleo Ker(F) ed una base dell'immagine Im(F).

(d) Determinare equazioni cartesiane di Im(F) entro W.

(e) Posto U=Ker(F), determinare il vettore P(v), proiezione ortogonale del vettore v=(1,-1,2) sul sottospazio vettoriale $U^\perp$, essendo $U^\perp$ il sottospazio vettoriale ortogonale ad U entro V.

Soluzione

(a) La matrice A_h richiesta ha come righe $A_h^{(1)}=(1,h,2h-3)$, $A_h^{(2)}=(1,1,-1)$, $A_h^{(3)}=(-1,1,5)$, $A_h^{(4)}=(h,1,-2h+2)$.

(b) L'applicazione lineare F_h non è iniettiva se e soltanto se è $Ker(F_h)\neq\{0\}$ e quindi se e soltanto se è $dim(Ker\ F_h)\neq 0$. Orbene, poiché l'equazione matriciale del nucleo è $A_hX=0$, dove come al solito si è posto ${}^tX=((x_1,x_2,x_3)$, essendo $dim(KerF_h)=3-rg(A_h)$ si ha che F_h non è iniettiva se e soltanto se è $rg(A_h)<3$. Studiamo dunque tale condizione. Il minore B di A_h, costituito dagli elementi d'incrocio della seconda e terza riga con la prima e seconda colonna, ha determinante non nullo (uguale a 2). Allora, per il teorema degli orlati, si ha che risulta $rg(A_h)<3$ se e soltanto se e soltanto se si annullano i determinanti dei due minori che orlano B. Ora, poiché il determinante di uno di tali minori è identicamente nullo mentre l'altro si annulla soltanto per h=0, si ha che è $h_0=0$.

(c) Osserviamo esplicitamente che, da quanto detto nel corso della risoluzione del quesito (b), per $h=h_0=0$, risulta rg(A)=2 e quindi dim(kerF)=1. Fissando l'attenzione sul minore B, si ha che il sistema che rappresenta Ker(F) è equivalente al sistema $x_1+x_2-x_3=0$, $-x_1+x_2+5x_3=0$ e quindi è $Ker(F)=\{t(3,-2,1)|t\in \boldsymbol{R}\}$. Allora una base di Ker(F) è, per esempio, costituita dal solo vettore u=(3,-2,1). Dalla formula dim(Ker(F))+dim(Im(F))=dim(V) si trae dim(Im(F))=3-1=2. Allora per ottenere una base di Im(F), tenuto conto che i vettori colonna della matrice A costituiscono un sistema di generatori di Im(F), basta considerare due vettori colonna non proporzionali, per esempio il primo $w_1=(1,1,-1,0)$ ed il secondo $w_2=(0,1,1,1)$.

(d) Considerata la matrice che ha come prime colonne i due vettori, scritti in colonna, della base di Im(F) e come terza colonna la colonna delle incognite, imponendo che il rango di tale matrice sia minore di tre, si ha che equazioni cartesiane di Im(F) sono, per esempio, $2y_1-y_2+y_3=0$, $-y_2-y_3+2y_4=0$.

(e) $U^\perp$ è un iperpiano vettoriale perché U è una retta vettoriale. Ricordando che una base di U è costituita dal solo vettore u=(3,-2,1), si ha

$$P(v)=v-(\langle v,u\rangle/\langle u,u\rangle)u=(1,-1,2)-(7/14)(3,-2,1)=(-1/2,0,3/2).$$

2.1. <u>Spazio euclideo ordinario. RC(O;i,j,k).</u> Siano assegnati i punti $P_0(0,0,1)$, P_0' (1,0,0), le rette r_1:x-y+z-2=0, 3x-y-z+5=0, r_2:2x+y+z=0, x+z=0, r_3:y+z-1=0, x-z=0 ed il piano p:x-y-z-5=0.

(a) Determinare la retta r passante per il punto P_0 parallela al piano p e perpendicolare alla retta r_1.

(b) Determinare la retta r´ passante per il punto P_0' e complanare con le rette r_2 ed r_3.

(c) Determinare la mutua posizione delle rette r ed r´.

(d) Determinare la distanza d(r, r´) delle rette r ed r´.

(e) Determinare il versore u della retta r´orientata verso il basso.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.1 si ha:

(a) r: x-y-z+1=0, x+2y+z-1=0;

(b) r':$y-z=0$, $x+y-1=0$;
(c) r ed r′ sono rette sghembe perpendicolari;
(d) $d(r, r')=4/(14)^{½}$;
(e) $u=(i-j-k)/3^{½}$.

2.2. Spazi vettoriali euclidei numerici $V=\boldsymbol{R}^3$ e $W=\boldsymbol{R}^4$. Sia assegnata l'applicazione lineare F_h:V→W di equazioni cartesiane, rispetto alle basi canoniche di V e W,

$$y_1=(h+1)x_1+(2h-1)x_2+x_3,\ y_2=x_1-x_2+x_3,\ y_3=x_1+5x_2-x_3,\ y_4=x_1-2hx_2+(h+1)x_3.$$

(a) Determinare la matrice A_h associata all'applicazione lineare F_h rispetto alle basi canoniche di V e W.
(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'applicazione lineare F_h non è iniettiva.
(c) Detta F l'applicazione lineare corrispondente al valore h_0 di cui al punto precedente e indicata semplicemente con A la matrice ad essa associata, determinare una base del nucleo Ker(F) ed una base dell'immagine Im(F).
(d) Determinare equazioni cartesiane di Im(F) entro W.
(e) Posto U=Ker(F), determinare il vettore P(v), proiezione ortogonale del vettore v=(-1,2,1) sul sottospazio vettoriale $U^{\perp}$, essendo $U^{\perp}$ il sottospazio vettoriale ortogonale ad U entro V.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.2 si ha:
(a) La matrice A_h richiesta ha come righe $A_h^{(1)}=(h+1,2h-1,1)$, $A_h^{(2)}=(1,-1,1)$, $A_h^{(3)}=(1,5,-1)$, $A_h^{(4)}=(1,-2h,h+1)$;
(b) $h_0=-1$;
(c) una base di Ker(F) è costituita, per esempio dal vettore u=(-2,1,3), una base di Im(F) è costituita, per esempio, dai vettori $w_1=(0,1,1,1)$ e $w_2=(-3,-1,5,2)$;
(d) equazioni cartesiane di Im(F) sono, per esempio, $2y_1-y_2+y_3=0$, $y_2+y_3-2y_4=0$;
(e) $P(v)=v-(\langle v,u\rangle/\langle u,u\rangle)u=(-1,2,1)-(7/14)(-2,1,3)=(0,3/2,-1/2)$.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere P-Z)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 15-2-2012

1.1 <u>Spazio euclideo numerico</u> E^4. <u>Riferimento cartesiano canonico</u> $RC(O;e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i vettori $w_1=(1,0,-1,h-1)$, $w_2=(h,1,0,h)$, $w_3=(2h-1,2,1,h+1)$, ed i punti $P_0=O$, $P_1=(1,0,-1,2)$, $P_2=(1,0,-1,0)$, $P_3=(3,1,-1,2)$, $P_4=(1,0,0,1)$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori di h in corrispondenza dei quali il sottospazio vettoriale $W_h=Span(w_1,w_2,w_3)$ ha dimensione due.

(b) In corrispondenza dei valori di h ottenuti nel quesito (a), determinare equazioni cartesiane del piano p_h passante per il punto P_1 ed avente come giacitura il sottospazio vettoriale W_h.

(c) Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane della retta r passante per i punti P_2 e P_3.

(d) Studiare la mutua posizione di r e p_h.

(e) Determinare il volume V del 4-parallelepipedo individuato dai punti P_0, P_1, P_2, P_3 e P_4.

Soluzione

(a) L'algoritmo di Gauss-Jordan, per l'estrazione di una base dal sistema di generatori $\{w_1,w_2,w_3\}$ di W_h, dà la base $B_h=(w_1,w_2)$ onde W_h ha dimensione due per ogni valore di h.

(b) Imponendo di avere rango minore di tre alla matrice avente come prime colonne le colonne delle coordinate dei vettori w_1, w_2 e come terza colonna ${}^t(x_1-1,x_2,x_3+1,x_4-2)$ si ha che equazioni cartesiane del piano p_h sono, per esempio, $x_1-hx_2+x_3=0$, $hx_2+(1-h)x_3-x_4+3-h=0$.

(c) Equazioni in forma di rapporti uguali della retta r passante per i due punti distinti P_2 e P_3 sono, per esempio, $(x_1-1)/2=x_2/1=(x_3+1)/0=x_4/2$, dove i denominatori hanno il significato di parametri direttori della retta. Da tali equazioni si traggono immediatamente le seguenti equazioni parametriche: $x_1=1+2t$, $x_2=t$, $x_3=-1$, $x_4=2t$, $t\in \boldsymbol{R}$ e, per esempio, le seguenti equazioni cartesiane: $x_1-x_4-1=0$, $2x_2-x_4=0$, $x_3+1=0$.

(d) Detto P il punto generico della retta r, essendo $P=(1+2t,t,-1,2t)$, andando a sostituire le coordinate cartesiane di P nelle equazioni cartesiane del piano p_h, si ha il sistema $(2-h)t=0$, $(h-2)t+2=0$ nell'incognita t, che risulta manifestamente incompatibile per ogni $h\in \boldsymbol{R}$. Pertanto per ogni $h\in \boldsymbol{R}$ risulta $r\cap p_h=\emptyset$, ossia retta e piano sono sempre disgiunti, onde, in particolare, retta e piano non sono mai incidenti. I parametri direttori $(l_1,l_2,l_3,l_4)=(2,1,0,2)$ della retta r, sostituiti ordinatamente al posto delle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 nelle equazioni cartesiane $x_1-hx_2+x_3=0$, $hx_2+(1-h)x_3-x_4=0$ della giacitura W_h del piano p_h, danno $2-h=0$, $h-2=0$. Da ciò si trae che la retta r ed il piano p_h risultano paralleli soltanto per h=2. Avendo già provato che r e p_h sono disgiunti per ogni valore di h, possiamo affermare, più precisamente, che, per h=2, r e p_h sono paralleli e disgiunti. Per $h\in(\boldsymbol{R}\setminus\{2\})$, piano e retta, non essendo né incidenti né paralleli, sono sghembi.

(e) Risulta V uguale al modulo del determinante della matrice quadrata del quarto ordine avente come righe, rispettivamente, le quaterne delle coordinate dei vettoril P_1-P_0, P_2-P_0, P_3-P_0 e P_4-P_0. Essendo $P_1-P_0=(1,0,-1,2)$, $P_2-P_0=(1,0,-1,0)$, $P_3-P_0=(3,1,-1,2)$ e $P_4-P_0=(1,0,0,1)$, si ha allora $V=|-2|=2$.

1.2. <u>Spazio vettoriale euclideo</u> V <u>dei vettori geometrici.</u> <u>Base ortonormale</u> $B_V=(i,j,k)$. Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\to\boldsymbol{R}$, tale che

$$F(v)=2(v\times u)u-3v,$$

dove con $v\times u$ si indica il prodotto scalare ordinario dei vettori geometrici $v=xi+yj+zk$ ed $u=i-j-k$.

(a) Verificare che l'endomorfismo F è simmetrico.
(b) Determinare una base ortonormale $B_V'=(i',j',k')$ di V costituita da autovettori rispetto ad F.
(c) Considerata la forma bilineare simmetrica reale $b:V\times V\to\boldsymbol{R}$ associata all'endomorfismo simmetrico F e detta $q:V\to\boldsymbol{R}$ la forma quadratica reale ad essa associata, determinare l'espressione di q(v) rispetto alla base ortonormale di autovettori $B_V'=(i',j',k')$.
(d) Dall'espressione di q(v), ottenuta nel quesito (c), dedurre gli indici di positività, di negatività e di nullità nonché il tipo della forma bilineare simmetrica reale b.
(e) Determinare, se esiste, una base di V costituita da vettori isotropi rispetto a b.

Soluzione

(a) Risulta:

$$F(i)=2(i\times(i-j-k))(i-j-k)-3i=2(i-j-k)-3i=-i-2j-2k,$$
$$F(j)=2((j\times(i-j-k))(i-j-k)-3j=-2(i-j-k)-3j=-2i-j+2k,$$
$$F(k)=2(k\times(i-j-k))(i-j-k)-3k=-2(i-j-k)-3k=-2i+2j-k,$$

onde la matrice A, associata ad F rispetto alla base B_V, ha come righe $A^{(1)}=(-1,-2,-2)$, $A^{(2)}=(-2,-1,2)$, $A^{(3)}=(-2,2,-1)$. Essendo tale matrice simmetrica e B_V una base ortonormale si ha che l'endomorfismo F è simmetrico.

(b) L'equazione caratteristica di F è $\det(A-\lambda I)=0$, ossia $-\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda+27=0$, ovvero $-(\lambda+3)^2(\lambda-3)=0$, quindi autovalori di F sono $\lambda_1=-3$, con molteplicità algebrica $a_1=2$, e $\lambda_2=3$, con molteplicità algebrica $a_2=1$. L'autospazio V_{-3}, associato all'autovalore $\lambda_1=-3$, ha equazioni cartesiane $2x-2y-2z=0$, $-2x+2y+2z=0$, $-2x+2y+2z$, ovvero $x-y-z=0$. Si trova immediatamente che l'insieme delle soluzioni dell'ultima equazione è $S_O=\{t_1(1,1,0)+t_2(1,0,1)\,|\,t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$, quindi risulta $V_{-3}=\{t_1(i+j)+t_2(i+k)\,|\,t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di V_{-3} è costituita dagli autovettori $v_1=i+j$, $v_2=i+k$. Osservato che (v_1,v_2) non è una base ortogonale di V_{-3}, applichiamo a tale base il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Si ha allora che una base ortogonale di V_{-3} è quella costituita dagli autovettori $w_1=v_1=i+j$, $w_2=v_2-(v_2\times w_1/w_1\times w_1)w_1=i+k-(1/2)(i+j)=(1/2)i-(1/2)j+k$. Normalizzando gli autovettori w_1 e w_2, si ha $i'=w_1/|w_1=(1/\sqrt{2})i+(1/\sqrt{2})j$,
$j'=w_2/|w_2|=(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))i-(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))j+(\sqrt{2}/\sqrt{3})k$. Gli autovettori unitari i', j' costituiscono una base ortonormale di V_{-3}. Equazioni cartesiane dell'autospazio V_3, associato all'autovalore $\lambda_2=3$, sono $-4x-2y-2z=0$, $-2x-4y+2z=0$, $-2x+2y-4z$, ovvero $2x+y+z=0$, $x+2y-z=0$, $x-y+2z=0$. Si ha facilmente che l'insieme delle soluzioni del sistema di tali equazioni è $S_O=\{t(1,-1,-1)\,|\,t\in\boldsymbol{R}\}$ e quindi risulta $V_3=\{t((i-j-k)\,|\,t\in\boldsymbol{R}\}$ con base ortonormale costituita dal solo autovettore unitario $k'=(1/\sqrt{3})i-(1/\sqrt{3})j-(1/\sqrt{3})k$ che si ottiene normalizzando l'autovettore $v_3=i-j-k$. Ricordando che autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali si ha che $B_V'=(i',j',k')$ è una base di V del tipo richiesto.

(c) Dalla teoria è noto che la forma bilineare simmetrica reale b, associata ad un endomorfismo simmetrico F, è diagonalizzata da una base ortonormale costituita da autovettori di F ed inoltre la diagonale della matrice associata a b è costituita dagli autovalori di F. Allora rispetto alla base $B_V'=(i',j',k')$, di cui al quesito (b), risulta

$q(v)=-3(x')^2-3(y')^2+3(z')^2$, essendo (x',y',z') le coordinate del vettore v rispetto alla base $B_V'=(i',j',k')$. Tale espressione è nota come forma canonica metrica della forma quadratica reale q.

(d) Dall'espressione di q(v), ottenuta nel quesito (c), si trae che gli indici di positività, di negatività e di nullità di q, e quindi di b, sono, rispettivamente, 1, 2 e 0. Allora la b è una forma bilineare simmetrica non degenere e non definita.

(e) Utilizzando l'espressione $q(v)=-3(x')^2-3(y')^2+3(z')^2$, si ha che l'insieme dei vettori isotropi rispetto a b è rappresentato dall'equazione cartesiana $-3(x')^2-3(y')^2+3(z')^2=0$. Orbene tale equazione ammette, per esempio, le soluzioni indipendenti (1,0,1), (0,1,1), (-1,0,1). Allora i vettori $u_1=i'+k'$, $u_2=j'+k'$, $u_3=-i'+k'$, costituiscono un esempio di base di V costituita da vettori isotropi rispetto a b.

2.1. Spazio euclideo numerico E^4. Riferimento cartesiano canonico $RC(O;e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i vettori $w_1=(h+2,2h+1,2,1)$, $w_2=(h+1,h+1,1,0)$, $w_3=(h,1,0,-1)$, ed i punti $P_0=O$, $P_1=(2,1,0,-1)$, $P_2=(0,1,0,-1)$, $P_3=(2,3,1,-1)$, $P_4=(1,3,0,0)$, essendo h un parametro reale.

/a) Determinare i valori di h in corrispondenza dei quali il sottospazio vettoriale $W_h=Span(w_1,w_2,w_3)$ ha dimensione due.

(b) In corrispondenza dei valori di h ottenuti nel quesito (a), determinare equazioni cartesiane del piano p_h passante per il punto P_1 ed avente come giacitura il sottospazio vettoriale W_h.

(c) Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane della retta r passante per i punti P_2 e P_3.

(d) Studiare la mutua posizione di r e p_h.

(e) Determinare il volume *V* del 4-parallelepipedo individuato dai punti P_0, P_1, P_2, P_3 e P_4.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.1 si ha:

(a) una base di W_h è $B_h=(w_1,w_2)$, onde W_h ha dimensione due per ogni valore di h;

(b) equazioni cartesiane del piano p_h sono, per esempio, $x_1-(h+1)x_3+hx_4+h-2=0$, $x_2-(h+1)x_3+x_4=0$;

(c) equazioni parametriche di r sono: $x_1=2t$, $x_2=1+2t$, $x_3=t$, $x_4=-1$, $t\in\boldsymbol{R}$ ed equazioni cartesiane di r sono, per esempio,: $x_1-2x_3=0$, $x_2-2x_3-1=0$, $x_4+1=0$;

(d) r e p_h sono paralleli e disgiunti per h=1 e sghembi per ogni $h\in(\boldsymbol{R}\setminus\{1\})$;

(e) *V*=6.

2.2. Spazio vettoriale euclideo V dei vettori geometrici. Base ortonormale $B_V=(i,j,k)$. Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\rightarrow\boldsymbol{R}$, tale che

$$F(v)=3v-2(v\times u)u,$$

dove con $v\times u$ si indica il prodotto scalare ordinario dei vettori geometrici $v=xi+yj+zk$ ed $u=i-j+k$.

(a) Verificare che l'endomorfismo F è simmetrico.

(b) Determinare una base ortonormale $B_V'=(i',j',k')$ di V costituita da autovettori rispetto ad F.

(c) Considerata la forma bilineare simmetrica reale $b: V\times V \to \mathbb{R}$ associata all'endomorfismo simmetrico F e detta $q: V \to \mathbb{R}$ la forma quadratica reale ad essa associata, determinare l'espressione di q(v) rispetto alla base ortonormale di autovettori $B_V'=(i',j',k')$.

(d) Dall'espressione di q(v), ottenuta nel quesito (c), dedurre gli indici di positività, di negatività e di nullità nonché il tipo della forma bilineare simmetrica reale b.

(e) Determinare, se esiste, una base di V costituita da vettori isotropi rispetto a b.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.2 si ha.

(a) F è simmetrico perché è simmetrica la matrice A, avente come righe $A^{(1)}=(1,2,-2)$, $A^{(2)}=(2,1,2)$ $A^{(3)}=(-2,2,1)$, associata ad F rispetto alla base ortonormale $B_V=(i,j,k)$;

(b) $B_V'=(i',j',k')$ costituita dagli autovettori unitari $i'=(1/\sqrt{3})i-(1/\sqrt{3})j+(1/\sqrt{3})$, $j'=(1/\sqrt{2})i+(1/\sqrt{2})j$, $k'=-(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))i+(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))j+(\sqrt{2}/\sqrt{3})k$;

(c) $q(v)=-3(x')^2+3(y')^2+3(z')^2$, essendo (x',y',z') le coordinate del vettore v rispetto alla base $B_V'=(i',j',k')$;

(d) dall'espressione di q(v), ottenuta nel quesito (c), si trae che gli indici di positività, di negatività e di nullità di q, e quindi di b, sono, rispettivamente, 2, 1 e 0. Allora la b è una forma bilineare simmetrica non degenere e non definita.

(e) utilizzando l'espressione $q(v)=-3(x')^2+3(y')^2+3(z')^2$, si ha che l'insieme dei vettori isotropi rispetto a b è rappresentato dall'equazione cartesiana $-3(x')^2+3(y')^2+3(z')^2=0$. Orbene tale equazione ammette, per esempio, le soluzioni indipendenti (1,1,0), (1,0,1), (-1,1,0). Allora i vettori $u_1=i'+j'$, $u_2=i'+k'$, $u_3=-i'+j'$, costituiscono un esempio di base di V costituita da vettori isotropi rispetto a b.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere P-Z)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 9-7-2012

1.Spazio euclideo numerico E^4. Riferimento cartesiano canonico $RC(O;e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i punti $P_0=O$, $P_1=(1,-1,1,1)$, $P_2=(1,0,1,0)$, $P_3=(0,1,0,1)$, $Q_0=(0,0,0,1)$, $R_0=(1,0,0,0)$ e le rette r_1, r_2, r_3, $r(h)$ passanti per l'origine O ed aventi come vettori direttori, rispettivamente, $w_1=(1,1,0,1)$, $w_2=(0,1,1,0)$, $w_3=(1,0,1,0)$, $w(h)=(1,h,-2h,-1)$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare il sottospazio affine p_1 generato dai punti P_0, P_1, P_2, P_3.

(b) Determinare l'iperpiano p_2 passante per il punto Q_O e parallelo alle rette r_1, r_2, r_3.

(c) Determinare l'iperpiano p(h) passante per il punto R_0 e perpendicolare alla retta r(h).

(d) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali l'intersezione $S(h)=p_1\cap p_2\cap p(h)$ sia un sottospazio affine.

(e) In corrispondenza dei valori di h ottenuti nel punto (d) determinare la dimensione di S(h).

Soluzione

(a) La matrice che ha come colonne le colonne delle coordinate dei vettori $u_1=P_1-P_0=(1,-1,1,1)$, $u_2=P_2-P_0=(1,0,1,0)$, $u_3=P_3-P_0=(0,1,0,1)$ ha rango uguale a 3 poiché, per esempio, è uguale a 2, e quindi non nullo, il determinante della submatrice quadrata costituita dalla prima, dalla seconda e dalla quarta riga. Allora i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base per $U=Span(u_1,u_2,u_3)$. Pertanto il sottospazio affine p_1, dovendo avere U come giacitura, ha dimensione 3, ossia è un iperpiano. Uguagliando a 0 il determinante della matrice quadrata che ha come prima riga (x_1, x_2, x_3, x_4) e come seconda, terza e quarta riga rispettivamente le righe delle coordinate dei vettori u_1, u_2 e u_3 si ha che p_1 ha come equazione cartesiana $-2x_1+2x_3=0$, ovvero $x_1-x_3=0$.

(b) L'iperpiano generico passante per il punto Q_0 ha equazione cartesiana $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4(x_4-1)=0$, ossia $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4- a_4=0$. La condizione di parallelismo di tale iperpiano con le rette r_1, r_2, r_3 dà, rispettivamente, $a_1+a_2+a_4=0$, $a_2+a_3=0$, $a_1+a_3=0$. Una soluzione non banale del sistema omogeneo appena scritto è $(1,1,-1,-2)$ e quindi l'equazione cartesiana dell'iperpiano p_2 è $x_1+x_2-x_3-2x_4+2=0$.

(c) L'equazione cartesiana dell'iperpiano p(h) passante per il punto R_0 e perpendicolare alla retta r(h) è $(x_1-1)+hx_2-2hx_3-x_4=0$, ossia $x_1+hx_2-2hx_3-x_4-1=0$.

(d) Equazioni cartesiane di S(h) sono $x_1-x_3=0$, $x_1+x_2-x_3-2x_4+2=0$, $x_1+hx_2-2hx_3-x_4-1=0$. Utilizzando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan si ha che il sistema di equazioni cartesiane appena scritto per $h\neq 1/2$ risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare compatibile a scala $x_1-x_3=0$, $x_2-2x_4=-2$, $(1-2h)x_3-(1-2h)x_4=1+2h$ mentre per $h=1/2$ risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare a scala incompatibile $x_1-x_3=0$, $x_2-2x_4=-2$, $0=2$. Allora il sottoinsieme S(h) è un sottospazio affine se e soltanto se è $h\neq 1/2$.

(e) Per $h\neq 1/2$ la giacitura W(h) di S(h) è rappresentata dal sistema lineare omogeneo a scala di tre equazioni in quattro incognite $x_1-x_3=0$, $x_2-2x_4=-2$, $(1-2h)x_3-(1-2h)x_4=0$, onde la dimensione di W(h), e quindi di S(h), è 4-3=1. Pertanto S(h) è una retta per ogni $h\neq 1/2$.

2. Spazio vettoriale euclideo V dei vettori geometrici dello spazio euclideo ordinario. Base ortonormale $B_V=(i,j,k)$. Siano assegnati i vettori $v_1(h+1,h+2,h+1)$, $v_2(0,-1,0)$, $v_3(h+3,h+2,h+1)$, essendo h un parametro reale, ed il sottospazio vettoriale $U: x-2y+z=0,\ 2x-y-z=0$.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale i vettori v_1, v_2, v_3, costituiscono una base ortogonale di V e scrivere tale base.

(b) Detti i', j', k' i vettori che si ottengono normalizzando, rispettivamente, i vettori v_1, v_2, v_3 della base ortogonale di cui al punto (a), determinare la matrice C del cambiamento di base nel passaggio dalla base ortonormale $B_V=(i,j,k)$ alla base ortonormale $B_V'=(i',j',k')$.

(c) Dire di che tipo è la matrice C di cui al punto (b), giustificando la risposta.

(d) Determinare una base ortonormale di U ed una base ortonormale di $W=U^{\perp}$.

(e) Determinare il vettore v' corrispondente del vettore $v=k$ nella simmetria ortogonale S_W rispetto a W.

Soluzione

(a) La condizione affinché i tre vettori v_1, v_2, v_3 siano mutuamente ortogonali dà $(h+2)(-1)=0$, $(h+1)(h+3)+(h+2)(h+2)+(h+1)(h+1)=0$, $(-1)(h+2)=0$, ossia $h+2=0$, $h^2+4h+3+h^2+4h+4+h^2+2h+1=0$, $h+2=0$, ovvero $h+2=0$, $3h^2+10h+8=0$ e quindi $h_0=-2$. In corrispondenza di $h=h_0=-2$ si hanno i vettori ortogonali $v_1(-1,0,-1)$, $v_2(0,-1,0)$, $v_3(1,0,-1)$. Nessuno di tali vettori è nullo onde essi costituiscono una base ortogonale.

(b) Per i vettori v_1, v_2, v_3, di cui al punto (a) risulta $|v_1|=2^{1/2}$, $|v_2|=1$, $|v_3|=2^{1/2}$ e quindi $i'=v_1/|v_1|=-(1/2^{1/2})(i+k)$, $j'=v_2/|v_2|=-j$, $k'=v_3/|v_3|=(1/2^{1/2})(i-k)$. La matrice C del cambiamento di base nel passaggio dalla base ortonormale $B_V=(i,j,k)$ alla base ortonormale $B_V'=(i',j',k')$ ha come righe $C^{(1)}=(-1/2^{1/2},0,1/2^{1/2})$, $C^{(2)}=(0,-1,0)$, $C^{(3)}=(-1/2^{1/2},0,-1/2^{1/2})$.

(c) La matrice C è ortogonale in quanto è tale ogni matrice del cambiamento di base nel passaggio da una base ortonormale ad una base ortonormale.

(d) Si ha immediatamente che lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo che rappresenta U è $S_o=\{t(1,1,1)|t\square\boldsymbol{R}\}$ e quindi risulta $U=\{t(i+j+k)|t\square\boldsymbol{R}\}$. Allora una base ortonormale di U è costituita dal solo vettore unitario $u=(1/3^{1/2})(i+j+k)$. Equazione cartesiana di $W=U^{\perp}$ è $x+y+z=0$ e quindi $W=\{t_1(i-j)+t_2(i-k)|t_1,t_2\square\boldsymbol{R}\}$ con base costituita dai vettori $w_1=i-j$, $w_2=i-k$. Tale base non è ortogonale perché risulta $\langle w_1,w_2\rangle=1\neq0$. Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt applicato a tale base dà la base ortogonale (w_1',w_2') costituita dai vettori $w_1'=w_1=i-j$, $w_2'=w_2-(\langle w_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=i-k-(1/2)(i-j)=(1/2)i+(1/2)j-k$. Essendo $|w_1'|=2^{1/2}$, $|w_2'|=(3/2)^{1/2}$ si ha allora che una base ortonormale di W è costituita dai vettori unitari $w_1''=w_1'/|w_1'|=(1/2^{1/2})(i-j)$, $w_2''=w_2'/|w_2'|=(2/3)^{1/2}((1/2)i+(1/2)j-k)$.

(d) Risulta $v'=S_W(v)=v-2P_U(v)=v-2\langle v,u\rangle u=k-2\langle k,(1/3^{1/2})(i+j+k)\rangle(1/3^{1/2})(i+j+k)=k-(2/3)(i+j+k)=-(2/3)i-(2/3)j+(1/3)k$.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere P-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova scritta del 25–9-2012

1. Spazio euclideo ordinario **E**. RC(O;i,j,k). Siano assegnati il piano p´:y+z=0, la retta r:2x+y-z=0, x+2y+z+1=0 ed il punto A(0,0,1).

(a) Determinare il piano p passante per il punto A, parallelo alla retta r e perpendicolare al piano p´.

(b) Determinare il punto C in cui l'asse y incontra il piano p.

(c) Determinare equazioni parametriche dell'asse s, sul piano p, del segmento AC.

(d) Determinare i punti B e D sul piano p in modo tale che il quadrilatero ABCD sia un quadrato.

(e) Calcolare il volume *V* del parallelepipedo individuato dai punti A,B,D,E, Essendo E(-4/√6,-2/√6,1+2/√6).

Soluzione

(a) Il piano generico passante per il punto A ha equazione cartesiana ax+by+c(z-1)=0, essendo a, b, c tre parametri reali non contemporaneamente nulli. Parametri direttori della retta r sono, per esempio, (l,m,n)=(1,-1,1) mentre coefficienti di giacitura del piano p´ sono (a´,b´,c´)=(0,1,1). Allora le condizioni sul piano p danno rispettivamente a-b+c=0 e b+c=0 da cui si ottiene, per esempio, (a,b,c)=(2,1,-1). Il piano p ha quindi equazione cartesiana 2x+y-(z-1)=0, ossia 2x+y-z+1=0.

(b) L'asse y ha equazioni cartesiane x=0, z=0. Mettendo a sistema tali equazioni con l'equazione del piano p e risolvendo si ha C(0,-1,0).

(c) Essendo (0,-1,-1) le coordinate del vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato AC ed M(0,-1/2,1/2) il punto medio di tale segmento, si ha che l'asse s avrà equazioni, in forma di rapporti uguali, del tipo x/l=(y+1/2)/m=(z-1/2)/n, con i parametri l, m, n, non contemporaneamente nulli, soddisfacenti il sistema -m-n=0, 2l+m-n=0. Da tale sistema si ha, per esempio, (l,m,n)=(1,-1,1). Si ha allora che equazioni parametriche dell'asse s sono:x=t, y=-1/2-t, z=1/2+t, t∈***R***.

(d) Essendo (t,-1/2-t,1/2+t) le coordinate del punto generico P(t) dell'asse s, si ha che i punti B e D si ottengono imponendo che sia d(M,P(t))=d(M,A)=d(M,C)=$(1/2)^{1/2}$, ossia $3t^2$=1/2 da cui si trae t=±1/√6. Si ha allora, per esempio, B(1/√6,-1/2-1/√6,1/2+1/√6), D(-1/√6,-1/2+1/√6,1/2-1/√6).

(e) I vettori geometrici rappresentati dai segmenti orientati AB, AD, AE hanno rispettivamente terne di coordinate (1/√6,-1/2-1/√6,-1/2+1/√6), (-1/√6,-1/2+1/√6,-1/2-1/√6), (-4/√6,-2/√6,2/√6). Considerata la matrice quadrata che ha come righe rispettivamente le suddette terne di coordinate, si ha che il volume richiesto *V* uguaglia il modulo del determinante di tale matrice. Si ha pertanto *V*=|-2|=2.

2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnata la forma quadratica reale $q:V\to\boldsymbol{R}$, tale che $q(v)=2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+2x_3^2-2x_3x_4+2x_4^2$, essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4$.
(a) Verificare che la forma quadratica reale q è definita positiva.
(b) Scrivere l'espressione della forma bilineare simmetrica $b:V\times V\to\boldsymbol{R}$ polare di q e dire se la b è oppure non è un prodotto scalare su V, giustificando la risposta. Nel caso in cui la b sia un prodotto scalare su V, porre per comodità $b(v,w)=\langle v,w\rangle$ ed indicare l'espressione di $|v|$.
(c) Determinare gli angoli convessi formati dalle coppie di vettori della base B_V.
(d) Determinare la base ortonormale $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ ottenuta dalla base B_V applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
(e) Posto $Span(v_1,v_2,v_3)=U$, determinare il vettore $S(v)$ immagine del vettore $v=v_3+2v_4$ nella simmetria ortogonale rispetto a U.

Soluzione

(a) Risulta immediatamente $q(v)=2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+2x_3^2-2x_3x_4+2x_4^2=(x_1-x_2)^2+x_1^2+(x_3-x_4)^2+x_3^2+x_4^2$. Allora $q(v)$, essendo una somma di quadrati, è tale che $q(v)\geq 0$ per ogni $v\in V$. Inoltre $q(v)=0$ implica $x_1-x_2=0$, $x_1=0$, $x_3-x_4=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ e quindi $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$, onde $v=0$. Pertanto la forma quadratica reale q è definita positiva.

(b) La forma bilineare simmetrica reale $b:V\times V\to\boldsymbol{R}$, polare della forma quadratica reale q, è tale che $b(v,w)=2x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2+2x_3y_3-x_3y_4-x_4y_3+2x_4y_4$, essendo $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3+y_4v_4$. La forma bilineare simmetrica b è un prodotto scalare su V perché la forma quadratica associata q è, come verificato al punto (a), definita positiva. Posto allora $\langle v,w\rangle=b(v,w)$, si ha $\langle v,w\rangle=2x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2+2x_3y_3-x_3y_4-x_4y_3+2x_4y_4$ e quindi $|v|=\langle v,v\rangle^{1/2}=(2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+2x_3^2-2x_3x_4+2x_4^2)^{1/2}$.

(c) Risulta $\cos v_1\hat{}v_2=\langle v_1,v_2\rangle/(|v_1|\,|v_2|)=-1/\sqrt{2}\Rightarrow v_1\hat{}v_2=(3/4)\pi$, $\cos v_1\hat{}v_3=\langle v_1,v_3\rangle/(|v_1|\,|v_3|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_1\hat{}v_4=\langle v_1,v_4\rangle/(|v_1|\,|v_4|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_3=\langle v_2,v_3\rangle/(|v_2|\,|v_3|)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_4=\langle v_2,v_4\rangle/(|v_2|\,|v_4|)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_3\hat{}v_4=\langle v_3,v_4\rangle/(|v_3|\,|v_4|)=-1/2\Rightarrow v_3\hat{}v_4=(2/3)\pi$.

(d) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt applicato alla base B_V dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3,w_4), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=v_2+(1/2)v_1=(1/2)v_1+v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,(1/2)v_1+v_2\rangle/\langle(1/2)v_1+v_2,(1/2)v_1+v_2\rangle)((1/2)v_1+v_2)=v_3$,
$w_4=v_4-(\langle v_4,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_4,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2-\langle v_4,w_3\rangle/\langle w_3,w_3\rangle)w_3=$
$v_4-(\langle v_4,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_4,(1/2)v_1+v_2\rangle/\langle(1/2)v_1+v_2,(1/2)v_1+v_2\rangle)((1/2)v_1+v_2)(\langle v_4,v_3\rangle/\langle v_3,v_3\rangle)v_3=$
$v_4+(1/2)v_3=(1/2)v_3+v_4$.
Risultando poi $|w_1|=|v_1|=\sqrt{2}$, $|w_2|=|(1/2)v_1+v_2|=1/\sqrt{2}$, $|w_3|=|v_3|=\sqrt{2}$, $|w_4|=|(1/2)v_3+v_4|=\sqrt{3}/\sqrt{2}$, si ha che la base ortonormale richiesta B_V' è costituita dai vettori $v_1'=w_1/|w_1|=(1/\sqrt{2})v_1$, $v_2'=w_2/|w_2|=(\sqrt{2}/2)v_1+\sqrt{2}v_2$, $v_3'=w_3/|w_3|=(1/(\sqrt{2})v_3$ e $v_4'=w_4/|w_4|=(\sqrt{2}/2\sqrt{3})v_3+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_4$.

(e) Il vettore w_4 per costruzione è ortogonale ai vettori w_1, w_2, w_3 e quindi ad $U=Span(v_1,v_2,v_3)=Span(w_1,w_2,w_3)$. Allora il vettore unitario $v_4'=w_4/|w_4|=(\sqrt{2}/2\sqrt{3})v_3+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_4$ costituisce una base ortonormale di $U^{\perp}$. Risulta pertanto $S(v)=v-2\langle v,v_4'\rangle v_4'=v_3+2v_4-2\langle v_3+2v_4,(\sqrt{2}/2\sqrt{3})v_3+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_4\rangle((\sqrt{2}/2\sqrt{3})v_3+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_4)=$
$v_3+2v_4-(6\sqrt{2}/\sqrt{3})((\sqrt{2}/2\sqrt{3})v_3+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_4)=v_3+2v_4-2v_3-4v_4=-v_3-2v_4=-v$.