RENZO MAZZOCCO

CORSO DI GEOMETRIA
(PER FISICI)

RACCOLTA DEGLI ESERCIZI D'ESONERO E D'ESAME DI GEOMETRIA
DELL'ANNO ACCADEMICO 2010-2011

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO"
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
Novembre 2011

ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Prova scritta del 2-12-2010

1.1. Spazio vettoriale $V=M_2(R)$ delle matrici quadrate reali del secondo ordine. Sia assegnata la matrice quadrata M avente come elementi $m_{11}=1$, $m_{12}=1$, $m_{21}=1$, $m_{22}=1$ e si indichino con x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} gli elementi della matrice X variabile in V.

(a) Verificare che il sottoinsieme $U=\{X\in V \mid MX=XM\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

(b) Determinare una base e la dimensione dei sottospazi vettoriali U e $W: x_{11}-x_{21}=0,\ x_{12}-x_{22}=0$.

(c) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(e) Determinare un sottospazio vettoriale Z supplementare di $U\cap W$ entro V.

Soluzione

(a) Eseguiti i prodotti di matrici MX e XM, la condizione richiesta affinché la matrice X appartenga ad U dà $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$. Allora le equazioni $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$ si possono interpretare come equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica $B_V=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ di V. Ma tali equazioni sono lineari e omogenee e quindi U è un sottospazio vettoriale di V.

(b) Il sistema di equazioni lineari omogenee che rappresenta U è a scala con incognite libere x_{21}, x_{22}. Posto $x_{21}=t_1$ $x_{22}=t_2$, essendo t_1, t_2 parametri reali, si ha $x_{12}=t_1$ $x_{11}=t_2$. Allora l'insieme delle soluzioni del sistema è $S_o=\{(t_2,t_1,t_1,t_2) \mid (t_1,t_2)\in \boldsymbol{R}\}$. Considerate le matrici linearmente indipendenti A e B che si ottengono ponendo, rispettivamente, $(t_1,t_2)=(1,0)$ e $(t_1,t_2)=(0,1)$ e quindi aventi come elementi $a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$ e $b_{11}=1$, $b_{12}=0$, $b_{21}=0$, $b_{22}=1$, risulta $U=\{t_1A+t_2B \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$. Pertanto una base di U è, per esempio, $B_U=(A,B)$, onde si ha $\dim(U)=2$.

Procedendo per W come nel caso di U, si ha che l'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni lineari omogenee, che rappresenta W, è $S_o=\{(t_1,t_2,t_1,t_2) \mid (t_1,t_2)\in \boldsymbol{R}\}$. Allora, considerate le matrici linearmente indipendenti C e D che si ottengono ponendo, rispettivamente, $(t_1,t_2)=(1,0)$ e $(t_1,t_2)=(0,1)$ e quindi aventi come elementi $c_{11}=1$, $c_{12}=0$, $c_{21}=1$, $c_{22}=0$ e $d_{11}=0$, $d_{12}=1$, $d_{21}=0$, $d_{22}=1$, risulta $U=\{t_1C+t_2D \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$. Pertanto una base di W è, per esempio $B_W=(C,D)$, onde risulta $\dim(W)=2$.

(c) Un sistema di generatori di U+W è, per esempio $\{A,B,C,D\}$. L'algoritmo di Gauss Jordan per l'estrazione di una base, applicato a tale sistema di generatori, dà la base $B_{U+W}=(A,B,C)$ di U+W, onde è $\dim(U+W)=3$.

(d) Equazioni cartesiane di $U \cap W$ sono, per esempio, $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$, $x_{11}-x_{21}=0$, $x_{12}-x_{22}=0$. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss Jordan, si ha che il sistema costituito da tali equazioni risulta equivalente al sistema a scala $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$, $-x_{21}+x_{22}=0$, che dà $x_{11}=t$, $x_{12}=t$, $x_{21}=t$, $x_{22}=t$, essendo t un parametro reale. Essendo $S_o=\{(t,t,t,t) \mid t \in \boldsymbol{R}\}$ l'insieme delle soluzioni del sistema, si ha che una base $B_{U \cap W}$ di $U \cap W$ è, per esempio, quella costituita dalla matrice avente tutti gli elementi uguali ad 1, ossia da M, e quindi è $\dim(U \cap W)=1$.

(e) Le matrici M, E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} costituiscono un sistema di generatori di V. Applicando a tale sistema di generatori l'algoritmo di Gauss Jordan per l'estrazione di una base, si ha che una base che completa la base $B_{U \cap W}=(M)$ di $U \cap W$ in una base di V è quella costituita dalle matrici M, E_{11}, E_{12}, E_{21}. Allora $Z=\text{Span}(E_{11},E_{12},E_{21})$ è un sottospazio vettoriale supplementare di $U \cap W$ entro V.

1.2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari
$x_1-x_3-x_4=k$, $2x_1+(k-1)x_4=2k$, $(k-1)x_1+(k-1)x_3+(1-k)x_4=0$,
essendo k un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro k in corrispondenza dei quali il sistema lineare di cui sopra si può interpretare come sistema di equazioni cartesiane, rispetto alla base B_V, di una sottovarietà lineare affine U'(k) di V.

(b) In corrispondenza dei valori del parametro k, di cui al punto (a), determinare un vettore $v_0(k) \in U'(k)$ ed il sottospazio vettoriale U(k) parallelo a U'(k).

(c) Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale U(k).

(d) Determinare la dimensione della sottovarietà lineare affine U'(k).

Soluzione

(a) I valori del parametro k, in corrispondenza dei quali il sistema rappresenta, rispetto alla base B_V, una sottovarietà lineare affine U'(k) dello spazio vettoriale V, sono quelli per cui tale sistema risulti compatibile. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss Jordan, si ha che il sistema assegnato risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare $x_1-x_3-x_4=k$, $2x_3+(k+1)x_4=0$, $(k-1)(k+1)x_4=-k(k-1)$, che è a scala. Tale sistema è compatibile se e soltanto se è $k \neq -1$.

(b) Sia $k \neq -1$. Osserviamo anzitutto che per k=1 il sistema a scala compatibile $x_1-x_3-x_4=k$, $2x_3+(k+1)x_4=0$, $(k-1)(k+1)x_4=-k(k-1)$ diventa $x_1-x_3-x_4=1$, $2x_3+2x_4=0$, $0=0$. Risolviamo allora separatamente i due casi $k \neq 1$ e k=1. Iniziamo dal caso $k \neq 1$. Il sistema ha x_2 come unica incognita libera. Poniamo $x_2=t$, essendo t un parametro reale. Si ha subito $x_4=k/(k+1)$, $x_3=-k/2$, $x_1=k(k+3)/(2(k+1))$. L'insieme delle soluzioni del

sistema è allora $S(k)=\{k(k+3)/(2(k+1)),t,-k/2,k/(k+1) \mid t\in \boldsymbol{R}\}=$ $=(k(k+3)/(2(k+1)).0,-k/2,k/(k+1))+\{(0,t,0,0,0) \mid t\in \boldsymbol{R}\}$, onde è $v_0(k)=(k(k+3)/(2(k+1)))v_1-(k/2)v_3+(k/(k+1))v_4$ ed $U(k)=\{tv_2 \mid t\in \boldsymbol{R}\}$.
Analizziamo ora il caso di $k=1$. Il sistema in questo caso risulta equivalente al sistema a scala $x_1-x_3-x_4=1$, $2x_3+2x_4=0$ con incognite libere x_2 e x_4. Posto $x_2=t_1$ e $x_4=t_2$, si ha subito $x_3=-t_2$, $x_1=1$, onde è $S(1)=\{(1,t_1,-t_2,t_2) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}=(1,0,0,0)+\{(0,t_1,-t_2,t_2) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi si ha $v_0(1)=v_1$ e $U(1)=\{t_1v_2+t_2(-v_3+v_4) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$.
(c) Per $k\neq-1,1$ è $U(k)=\{tv_2 \mid t\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi una base di $U(k)$ è quella costituita dal solo vettore v_2 onde risulta $\dim(U(k))=1$. Per $k=1$, essendo $U(1)=\{t_1v_2+t_2(-v_3+v_4) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$, si ha che una base di $U(1)$ è, per esempio, quella costituita dai due vettori v_2 e $-v_3+v_4$, onde è $\dim(U(1))=2$.
(d) La dimensione di una sottovarietà lineare affine per definizione è uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale ad essa parallelo. Allora risulta $\dim(U'(k))=\dim(U(k))=1$, se $k\neq-1,1$, e $\dim(U'(1))=\dim(U(1))=2$.

2.1. <u>Spazio vettoriale $V=M_2(R)$ delle matrici quadrate reali del secondo ordine.</u> Sia assegnata la matrice quadrata M avente come elementi $m_{11}=1$, $m_{12}=-1$, $m_{21}=-1$, $m_{22}=1$ e si indichino con x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} gli elementi della matrice X variabile in V.
(a) Verificare che il sottoinsieme $U=\{X\in V \mid MX=XM\}$ è un sottospazio vettoriale di V.
(b) Determinare una base e la dimensione dei sottospazi vettoriali U e $W: x_{11}-x_{12}=0,\ x_{21}-x_{22}=0$.
(c) Determinare una base e la dimensione di U+W.
(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.
(e) Determinare un sottospazio vettoriale Z supplementare di $U\cap W$ entro V.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:
(a) U: $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$ e quindi U è un sottospazio vettoriale di V;
(b) $B_U=(A,B)$, essendo $a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$ e $b_{11}=1$, $b_{12}=0$, $b_{21}=0$, $b_{22}=1$; $\dim(U)=2$. $B_W=(C,D)$, essendo $c_{11}=1$, $c_{12}=1$, $c_{21}=0$, $c_{22}=0$ e $d_{11}=0$, $d_{12}=0$, $d_{21}=1$, $d_{22}=1$; $\dim(W)=2$.
(c) $B_{U+W}=(A,B,C)$, $\dim(U+W)=3$;
(d) $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dalla sola matrice N avente tutti gli elementi uguali ad 1; $\dim(U\cap W)=1$;
(e) $Z=\mathrm{Span}(E_{11},E_{12},E_{21})$.

2.2. <u>Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro.</u> Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

x_1-x_2-x_4=k+1, $2x_1$+kx_2=2(k+1), (k+1)x_1-(k+1)x_2+(k-1)x_4=k+1, essendo k un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro k in corrispondenza dei quali il sistema lineare di cui sopra si può interpretare come sistema di equazioni cartesiane di una sottovarietà lineare affine U′(k) di V.

(b) In corrispondenza dei valori del parametro k, di cui al punto (a), determinare un vettore $v_0(k) \in U'(k)$ ed il sottospazio vettoriale U(k) parallelo a U′(k).

(c) Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale U(k).

(d) Determinare la dimensione della sottovarietà lineare affine U′(k).

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) il sistema rappresenta una sottovarietà lineare affine se e soltanto se è $k \neq -2$;

(b) per $k \neq -2,0$ un vettore appartenente a U′(k) è, per esempio, $v_0(k)=((k+1)(k+4)/(2(k+2)))v_1+((k+1)/(k+2))v_2-((k+1)/2)v_4$ ed è $U(k)=\{tv_3 \mid t \in \boldsymbol{R}\}$.

Per k=0, si ha, per esempio, $v_0(0)=v_1$ ed è $U(0)=\{t_1v_3+t_2(-v_2+v_4) \mid t_1,t_2 \in \boldsymbol{R}\}$.

(c) per $k \neq -2,0$ è $U(k)=\{tv_3 \mid t \in \boldsymbol{R}\}$ e quindi una base di U(k) è, per esempio, quella costituita dal solo vettore v_3 onde risulta dim(U(k))=1. Per k=0, essendo $U(0)=\{t_1v_3+t_2(-v_2+v_4) \mid t_1,t_2 \in \boldsymbol{R}\}$, si ha che una base di U(0) è, per esempio, quella costituita dai due vettori v_3 e $-v_2+v_4$ e quindi è dim(U(0))=2.

(d) Risulta dim(U′(k)))=dim(U(k))=1 per $k \neq -2,0$ e dim(U′(0)))=dim(U(0))=2.

<u>3.1. Spazio vettoriale</u> V=$M_2(R)$ <u>delle matrici quadrate reali del secondo ordine.</u> Sia assegnata la matrice quadrata M avente come elementi m_{11}=-1, m_{12}=-1, m_{21}=-1, m_{22}=-1 e si indichino con x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} gli elementi della matrice X variabile in V.

(a) Verificare che il sottoinsieme $U=\{X \in V \mid MX=XM\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

(b) Determinare una base e la dimensione dei sottospazi vettoriali U e W:$x_{11}+x_{21}=0$, $x_{12}+x_{22}=0$.

(c) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(d) Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$.

(e) Determinare un sottospazio vettoriale Z supplementare di $U \cap W$ entro V.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:

(a) U: $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$ e quindi U è un sottospazio vettoriale di V;

(b) $B_U=(A,B)$, essendo $a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$ e $b_{11}=1$, $b_{12}=0$, $b_{21}=0$, $b_{22}=1$; $\dim(U)=2$. $B_W=(C,D)$, essendo $c_{11}=-1$, $c_{12}=0$, $c_{21}=1$, $c_{22}=0$ e $d_{11}=0$, $d_{12}=-1$, $d_{21}=0$, $d_{22}=1$; $\dim(W)=2$.
(c) $B_{U+W}=(A,B,C)$, $\dim(U+W)=3$;
(d) $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dalla sola matrice N, essendo $n_{11}=1$, $n_{12}=-1$, $n_{21}=-1$, $n_{22}=1$; $\dim(U\cap W)=1$;
(e) $Z=\mathrm{Span}(E_{11},E_{12},E_{21})$.

3.2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari
$x_1-x_2-x_3=k-1$, $2x_1+(k-2)x_3=2(k-1)$, $(k-1)x_1+(k-3)x_2+(1-k)x_3=k-1$,
essendo k un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro k in corrispondenza dei quali il sistema lineare di cui sopra si può interpretare come sistema di equazioni cartesiane di una sottovarietà lineare affine U'(k) di V.
(b) In corrispondenza dei valori del parametro k, di cui al punto (a), determinare un vettore $v_0(k)\in U'(k)$ ed il sottospazio vettoriale U(k) parallelo a U'(k).
(c) Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale U(k).
(d) Determinare la dimensione della sottovarietà lineare affine U'(k).

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:
(a) il sistema rappresenta una sottovarietà lineare affine se e soltanto se è $k\neq 0$;
(b) per $k\neq 0,2$ un vettore appartenente a U'(k) è, per esempio, $v_0(k)=((k-1)(k+2)/(2k))v_1+((1-k)/2)v_2+((k-1)/k)v_3$ ed è $U(k)=\{tv_4 \mid t\in \boldsymbol{R}\}$.
Per $k=2$, si ha, per esempio, $v_0(2)=v_1$ ed è $U(2)=\{t_1(-v_2+v_3)+t_2v_4 \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$.
(c) per $k\neq 0,2$ è $U(k)=\{tv_4 \mid t\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi una base di U(k) è, per esempio, quella costituita dal solo vettore v_4 onde risulta $\dim(U(k))=1$. Per $k=2$, essendo $U(2)=\{t_1(-v_2+v_3)+t_2v_4 \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$, si ha che una base di U(2) è, per esempio, quella costituita dai due vettori $-v_2+v_3$ e v_4 onde risulta $\dim(U(2))=2$.
(d) Risulta $\dim(U'(k))=\dim(U(k))=1$ per $k\neq 0,2$ e $\dim(U'(2))=\dim(U(2))=2$.

4.1. Spazio vettoriale $V=M_2(R)$ delle matrici quadrate reali del secondo ordine. Sia assegnata la matrice quadrata M avente come elementi $m_{11}=-1$, $m_{12}=1$, $m_{21}=1$, $m_{22}=-1$ e si indichino con x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} gli elementi della matrice X variabile in V.

(a) Verificare che il sottoinsieme $U=\{X\in V \mid MX=XM\}$ è un sottospazio vettoriale di V.
(b) Determinare una base e la dimensione dei sottospazi vettoriali U e $W: x_{11}+x_{12}=0,\ x_{21}+x_{22}=0$.
(c) Determinare una base e la dimensione di U+W.
(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.
(e) Determinare un sottospazio vettoriale Z supplementare di $U\cap W$ entro V.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:
(a) U: $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$ e quindi U è un sottospazio vettoriale di V;
(b) $B_U=(A,B)$, essendo $a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$ e $b_{11}=1$, $b_{12}=0$, $b_{21}=0$, $b_{22}=1$; $\dim(U)=2$. $B_W=(C,D)$, essendo $c_{11}=-1$, $c_{12}=1$, $c_{21}=0$, $c_{22}=0$ e $d_{11}=0$, $d_{12}=0$, $d_{21}=-1$, $d_{22}=1$; $\dim(W)=2$.
(c) $B_{U+W}=(A,B,C)$, $\dim(U+W)=3$;
(d) $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dalla sola matrice N, essendo $n_{11}=1$, $n_{12}=-1$, $n_{21}=-1$, $n_{22}=1$; $\dim(U\cap W)=1$;
(e) $Z=\mathrm{Span}(E_{11},E_{12},E_{21})$.

4.2. <u>Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro.</u> Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari
$x_2-x_3-x_4=k+2$, $x_2+x_3+(k+2)x_4=k+2$, $(k+1)x_2+(k+1)x_3-(k+1)x_4=0$,
essendo k un parametro reale.
(a) Determinare i valori del parametro k in corrispondenza dei quali il sistema lineare di cui sopra si può interpretare come sistema di equazioni cartesiane di una sottovarietà lineare affine $U'(k)$ di V.
(b) In corrispondenza dei valori del parametro k di cui al punto (a), determinare un vettore $v_0(k)\in U'(k)$ ed il sottospazio vettoriale $U(k)$ parallelo a $U'(k)$.
(c) Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale $U(k)$.
(d) Determinare la dimensione della sottovarietà lineare affine $U'(k)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:
(a) il sistema rappresenta una sottovarietà lineare affine se e soltanto se è $k\neq-3$;
(b) per $k\neq-3,-1$ un vettore appartenente a $U'(k)$ è, per esempio, $v_0(k)=((k+2)(k+5)/(2(k+3)))v_2-((k+2)/2)v_3+((k+2)/(k+3))v_4$ ed è $U(k)=\{tv_1 \mid t\in \boldsymbol{R}\}$.
Per $k=-1$, si ha, per esempio, $v_0(-1)=v_2$ ed è $U(-1)=\{t_1v_1+t_2(-v_3+v_4) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$.
(c) per $k\neq-3,-1$ è $U(k)=\{tv_1 \mid t\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi una base di $U(k)$ è, per esempio, quella costituita dal solo vettore v_1 onde risulta $\dim(U(k))=1$.

Per $k=-1$, essendo $U(-1)=\{t_1v_1+t_2(-v_3+v_4) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$, si ha che una base di $U(-1)$ è, per esempio, quella costituita dai due vettori v_1 e $-v_3+v_4$ e quindi è $\dim(U(-1))=2$.

(d) Risulta $\dim(U'(k))=\dim(U(k))=1$ per $k\neq-3,-1$ e $\dim(U'(-1))=\dim(U(-1))=2$.

ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 10–2-2011

1. Spazio euclideo ordinario **E**. RC(O;i,j,k). Siano assegnati il punto $P_0(1,0,1)$ e le rette r_1:x-y-z=0, 2x+y+z=0, r_2:x=1, y=t, z=-t, t∈$\mathbb{R}$, r′:x=y=-z.
(a) Verificare che le rette r_1 ed r_2 sono complanari, precisandone la mutua posizione.
(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano p contenente le rette r_1 ed r_2.
(c) Scrivere equazioni cartesiane della retta r passante per il punto P_0, parallela al piano p e perpendicolare alla retta r′.
(d) Scrivere l'equazione cartesiana del piano generico q del fascio *F* di piani avente come asse la retta r.
(e) Determinare i piani del fascio *F* che incontrano il piano p lungo una retta e studiare la mutua posizione delle rette ottenute.

Soluzione

(a) Si ha subito che parametri direttori della retta r sono $l_1=0$, $m_1=-1$, $n_1=1$ mentre parametri direttori della retta r_2 sono $l_2=0$, $m_2=1$, $n_2=-1$. Essendo proporzionali le due terne di parametri direttori $(l_1,m_1,,n_1)$ e (l_2,m_2,n_2) si ha che le rette r_1 ed r_2 sono parallele. Osservato poi che, per esempio, il punto $P_1≡O$ appartiene ad r_1 ma non ad r_2, le rette r_1 ed r_2 risultano parallele e distinte e quindi sono complanari.
(b) Il piano p contenente r_1 ed r_2 può essere ottenuto come piano passante per il punto $P_1≡O$ ed avente giacitura W=Span(w_1,w_2), essendo w_1=j-k un vettore direttore delle rette r_1 ed r_2 e w_2 =i il vettore associato ai punti P_1 e P_2, dove $P_2(1,0,0)$ è un punto di r_2. Pertanto l'equazione cartesiana del piano p è –y-z=0, ossia y+z=0.
(c) Equazioni in forma di rapporti uguali di una retta generica passante per il punto P_0 sono (x-1)/l=y/m=(z-1)/n, essendo l,m,n parametri direttori. Essendo a=0, b=1, c=1 coefficienti di giacitura del piano p, la condizione di parallelismo con p dà m+n=0. Essendo poi l′=1, m′=1, n′=-1 parametri direttori della retta r′, la condizione di perpendicolarità con r′ dà l+m-n=0. I parametri direttori di r si ottengono allora risolvendo il sistema lineare omogeneo m+n=0, l+m-n=0. Una soluzione di tale sistema è, per esempio, (l,m,n))=(2,-1,1) e quindi equazioni in forma di rapporti uguali di r sono (x-1)/2=y/(-1)=(z-1)/1. Allora equazioni cartesiane di r sono, per esempio, x-2z+1=0, y+z-1=0.
(d) L'equazione cartesiana del piano generico q del fascio *F* di piani avente come asse la retta r, con esclusione del piano q_2:y+z-1, è, per esempio, x-2z+1+h(y+z-1)=0, ossia x+hy+(h-2)z+1-h=0, essendo h un parametro reale.
(e) L'intersezione q∩p del piano q∈(*F*\{q_2}) con il piano p è rappresentata dal sistema lineare x+hy+(h-2)z+(1-h)=0, y+z=0. Tale sistema rappresenta una retta per ogni valore di h risultando uguale a 2 il rango della sua matrice dei coefficienti. L'intersezione q_2∩p del piano q_2 con il piano p è rappresentata dal sistema lineare y+z-1=0, y+z=0, manifestamente incompatibile e quindi q_2∩p non è una retta. Una terna di parametri direttori della retta q∩p, q∈(*F*\{q_2}), è, per esempio, (2,-1,1). Osservato che tale terna non dipende dal parametro h, si ha che l'insieme di rette {q∩p|q∈(*F*\{q_2})} del piano p costituisce un fascio (improprio) di rette parallele di direzione W avente equazioni cartesiane x+hy+(h-2)z=0, y+z=0, ossia x-2z=0, y+z=0.

2. Sia assegnata la matrice quadrata A_k avente come righe $A_k^{(1)}=(-1,0,2)$, $A_k^{(2)}=(k,k-1,2)$, $A_k^{(3)}=(k,0,1)$, essendo k un parametro reale.
(a) Determinare il valore k_0 del parametro k in corrispondenza del quale la matrice A_k ammette il numero –1 come autovalore.
(b) Detta A la matrice corrispondente al valore k_0 di cui al punto precedente, determinare gli autovalori di A, precisandone le rispettive molteplicità algebriche.
(c) Verificare che la matrice A è diagonalizzabile.
(d) Determinare una matrice quadrata non singolare C tale che la matrice $C^{-1}AC$ sia diagonale.
(e) Assegnata la matrice quadrata D avente come righe $D^{(1)}=(-1,0,0)$, $D^{(2)}=(1,-1,0)$, $D^{(3)}=(0,1,1)$, dire se le matrici A e D sono o non sono simili, giustificando la risposta.

Soluzione

(a) L'equazione caratteristica della matrice A_k è $\det(A_k-\lambda I)=0$, ossia $(-1-\lambda)(k-1-\lambda)(1-\lambda)-2k(k-1-\lambda)=0$.
Tale equazione ammette come soluzione $\lambda=-1$ se e soltanto se risulta $-2k^2=0$, ossia se e soltanto se è $k=0$. Pertanto è $k_0=0$.

(b) Ponendo $k=k_0$ nell'equazione caratteristica della matrice A_k si ha che l'equazione caratteristica della matrice A è $(1+\lambda)^2(1-\lambda)=0$. Pertanto gli autovalori di A sono $\lambda_1=-1$, con molteplicità algebrica $a_1=2$, e $\lambda_2=1$, con molteplicità algebrica $a_2=1$,

(c) Essendo 3 l'ordine di A e risultando $a_1+a_2=3$, si ha che la matrice A è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica g_1 dell'autovalore λ_1 è uguale ad a_1 e la molteplicità geometrica g_2 dell'autovalore λ_2 è uguale ad a_2. Essendo la molteplicità geometrica di un autovalore maggiore o uguale ad 1 e minore o uguale alla molteplicità algebrica dello stesso autovalore, si ha intanto che, dovendo essere $1\le g_2\le a_2=1$, è $g_2=1=a_2$. Per sapere se la matrice A è o non è diagonalzzabile, ci resta da determinare g_2 e verificare se è o non è $g_2=a_2$. Sia V_{-1} l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1=-1$. Equazioni cartesiane di V_{-1} sono $2x_3=0$, $2x_3=0$, $2x_3=0$, Risulta allora $V_{-1}=\{t_1(1,0,0)+t_2(0,1,0)|t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$. Una base di V_{-1} è costituita dagli autovettori $v_1'=(1,0,0)$, $v_2'=(0,1,0)$ e quindi risulta $g_1=\dim(V_{-1})=2=a_1$. Pertanto la matrie A è diagonalizzabile;

(d) Per ottenere una matrice quadrata non singolare C tale che la matrice $C^{-1}AC$ sia diagonale, determiniamo una base di $V=\boldsymbol{R}^3$ costituita da autovettori rispetto alla matrice A. Nel quesito precedente abbiamo già determinato una base dell'autospazio V_{-1}, determiniamo dunque una base dell'autospazio V_1 associato all'autovalore $\lambda_2=1$. Si ha V_1:$-2x_1+2x_3=0$, $-2x_2+2x_3=0$, $0=0$ e quindi $V_1=\{t(1,1,1)|t\in \boldsymbol{R}\}$, onde una base di V_1 è costituita dal solo autovettore $v_3'=(1,1,1)$, Allora $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ è una base di $V=\boldsymbol{R}^3$ costituita da autovettori rispetto alla matrice A. Una matrice C del tipo richiesto è, per esempio, la matrice del cambiamento di basi nel passaggio dalla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3)$ alla base $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$.di di $V=\boldsymbol{R}^3$. Tale matrice ha come righe $C^{(1)}=(1,0,1)$, $C^{(2)}=(0,1,1)$, $C^{(3)}=(0,0,1)$,

(e) L'equazione caratteristica della matrice D coincide con quella della matrice A, quindi D ha gli stessi autovalori di A con rispettive molteplicità algebriche. Una condizione necessaria affinché due matrici quadrate dello stesso ordine siano simili è che esse siano entrambe diagonalizzabili o entrambe non diagonalizzabili. Allora, avendo provato che la matrice A è diagonalizzabile, dimostreremo che le matrici A e D non sono simili facendo vedere che la matrice D non è diagonalizzabile. L'autospazio E_{-1} associato all'autovalore $\lambda_1=-1$ della matrice D ha equazioni cartesiane $0=0$, $x_1=0$, $x_2+2x_3=0$ e quindi è $E_{-1}=\{t(0,-2,1)|t\in \boldsymbol{R}\}$, Una base dell'autospazio E_{-1} è costituita dal solo autovettore $w_1=(0,-2,1)$, onde è $\dim(E_{-1})=1$ e quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_1=-1$ della matrice A non è uguale alla rispettiva molteplicità algebrica. Pertanto la matrice D non è diagonalizzabile.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 16-2-2011

1. Spazio euclideo ordinario E. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $P_0(1+h,-1,1)$, $P_1(-1,1-h,-1)$ e $P_2(3,-3,3+h)$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare il valore del parametro h in corrispondenza del quale i punti P_0, P_1 e P_2 risultano allineati e scrivere equazioni cartesiane della retta r generata da tali punti.

(b) Scrivere equazioni cartesiane della retta r′ passante per il punto $P_0'(0,1,0)$ e perpendicolare al piano p:x-y=0.

(c) Supposto di aver orientato la retta r verso il basso e la retta r′ secondo le y decrescenti, determinare il coseno dell'angolo convesso r^r′ formato dalle due rette

(d) Dopo aver verificato che le rette r ed r′ sono sghembe, determinare equazioni cartesiane della retta s incidente e perpendicolare alle rette r ed r′.

(e) Determinare le coordinate cartesiane dei punti N ed N′ ottenuti, rispettivamente, intersecando la retta s con la retta r e con la retta r′ e dedurne la distanza d(r,r′) delle due rette r ed r′.

Soluzione

(a) I punti P_0, P_1 e P_2 risultano allineati se i vettori geometrici rappresentati dai segmenti orientati P_0P_1 e P_0P_2 sono linearmente dipendenti. Tali vettori hanno coordinate, rispettivamente, (-2-h,2-h,-2) e (2-h,-2,2+h). Si trova facilmente che tali vettori sono linearmente dipendenti per h=0 e quindi i punti P_0, P_1 e P_2 risultano allineati per h=0. Per h=0 si ha $P_0(1,-1,1)$, $P_1(-1,1,-1)$ e $P_2(3,-3,3)$. Essendo $P_0 \neq P_1$, la retta r generata dai punti allineati P_0, P_1 e P_2 può essere ottenuta come retta passante per P_0 e P_1. Equazioni, in forma di rapporti uguali, della retta r sono allora (x-1)/(-2)=(y+1)/2=(z-1)/(-2) e quindi equazioni cartesiane della retta r sono x-z=0, y+z=0.

(b) La retta generica passante per il punto P_0' ha equazioni, in forma di rapporti uguali, x/l′=(y-1)/m′=z/n′, dove i denominatori hanno il significato di parametri direttori della retta. Essendo (a,b,c)=(1,-1,0) i coefficienti di giacitura del piano p, la condizione di perpendicolarità tra r′ e p dà (l′,m′,n′)=(1,-1,0), Equazioni in forma di rapporti uguali di r′ sono allora x/1=(y-1)/(-1)=z/0 e quindi equazioni cartesiane di r′. sono x+y-1=0, z=0,

(c) Essendo (1,-1,1) parametri direttori della retta r, si ha che i due versori della retta r sono (i-j+k)/(±√3). La condizione sulla retta r di essere orientata verso il basso, ossia secondo le z decrescenti, implica che sia negativa la terza coordinata del versore e quindi a denominatore va scelto il segno -. Risulta allora versr=(i-j+k)/(-√3)=(-i+j-k)/(√3). Analogamente, essendo (1,-1,0) parametri direttori della retta r′, e quindi (i-j)/(±√2) i due versori della retta r′, imponendo che la retta r′ sia orientata secondo le y decrescenti si ha che deve essere negativa la seconda coordinata del versore. Ciò implica che a denominatore va scelto il segno +, onde è versr′=(i-j)/(√2). Risulta in definitiva cos r^r′=versr×versr′=-2/√6, dove con × si indica, come di consueto, il prodotto scalare ordinario dello spazio dei vettori geometrici.

(d) La matrice quadrata A del quarto ordine associata alle equazioni delle due rette r ed r′, ossia che ha come righe $A^{(1)}=(1,0,-1,0)$, $A^{(2)}=(0,1,1,0)$, $A^{(3)}=(1,1,0,-1)$, $A^{(4)}=(0,0,1,0)$, ha determinante uguale a $-4 \neq 0$ e quindi le rette r ed r′ sono sghembe. Essendo w(1,-1,1) e w′(1,-1,0) vettori direttori rispettivamente di r ed r′, si ha che un vettore direttore della retta s è dato $w \wedge w'=i+j$, La retta s può essere ottenuta come intersezione del piano q passante per il punto P_0 ed avente come giacitura $W=Span(w, w \wedge w')$ e del piano q′ passante per il punto P_0' ed avente come giacitura $W'=Span(w', w \wedge w')$. Si trova facilmente che è $q::x-y-2z=0$ e $q':z=0$ e quindi equazioni cartesiane di s sono, per esempio, $x-y-2z=0$, $z=0$.

(e) Essendo $x=1+t$, $y=-1-t$, $z=1+t$, $t \in \mathbf{R}$, equazioni parametriche di r, andando a sostituire tali equazioni parametriche nelle equazioni cartesiane di s si ha che il punto N si ottiene per $t=-1$. Si ha allora $N(0,0,0)$, ossia $N=O$. Procedendo in modo analogo per N', si ha che, essendo $x=t'$, $y=1-t'$, $z=0$, $t' \in \mathbf{R}$, equazioni parametriche di r', risulta $N'(1/2,1/2,0)$. Si ha infine $d(r,r')=d(N,N')=(1/4+1/4)^{1/2}=1/\sqrt{2}$.

2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro dotato di prodotto scalare < , >. Base ortonormale $B_V=(u_1,u_2,u_3,u_4)$. Siano assegnati i vettori $v_1=u_1-u_2$, $v_2=u_1-u_3$, $v_3=u_2$, $v_4=u_4$ ed il sottospazio vettoriale U;,$x_1-x_2+x_3=0$, $x_1+x_2-x_3=0$, $x_4=0$.

(a) Verificare che i vettori v_1,v_2,v_3,v_4 costituiscono una base di V e dire se essa è o non è ortogonale rispetto al prodotto scalare < , >, giustificando la risposta.

(b) Determinare una base $B_V'=(u_1',u_2',u_3',u_4')$ di V, ortonormale rispetto al prodotto scalare < , >, ottenuta applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base (v_1,v_2,v_3,v_4) .

(c) Determinare la matrice non singolare del cambiamento di basi nel passaggio dalla base B_V alla base B_V' e dire di che tipo è tale matrice, giustificando la risposta.

(d) Determinare equazioni cartesiane ed una base del sottospazio vettoriale $W=U^{\perp}$.

(e) Determinare il vettore $S_W(v)$ simmetrico del vettore $v(1,1,1,1)$ nella simmetria ortogonale rispetto a W.

Soluzione

(a) La matrice che ha come colonne le colonne delle coordinate dei vettori v_1,v_2,v_3,v_4 ha determinante uguale a $1 \neq 0$, quindi tali vettori sono linearmente dipendenti e, siccome il loro numero uguaglia la dimensione di V, si ha che essi costituiscono una base di V; Risulta $\langle v_1,v_2 \rangle=1\neq0$, $\langle v_1,v_3 \rangle=-1\neq0$, $\langle v_1,v_4 \rangle=0$, $\langle v_2,v_3 \rangle=0$, $\langle v_2,v_4 \rangle=0$, $\langle v_3,v_4 \rangle=0$ e quindi la base (v_1,v_2,v_3,v_4) non è ortogonale.

(b) Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base (v_1,v_2,v_3,v_4) si ha la base ortogonale (w_1,w_2,w_3,w_4), essendo $w_1=,v_1=u_1-u_2$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1 \rangle/\langle w_1,w_1 \rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1 \rangle/\langle v_1,v_1 \rangle)v_1=-(1/2)v_1+v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1 \rangle/\langle w_1,w_1 \rangle)w_1-(\langle v_3,w_2 \rangle/\langle w_2,w_2 \rangle)w_2=v_3-(\langle v_3,v_1 \rangle/\langle v_1,v_1 \rangle)v_1-(\langle v_3,-(1/2)v_1+v_2 \rangle/\langle -(1/2)v_1+v_2,-(1/2)v_1+v_2 \rangle)((1/2)v_1+v_2)=(2/3)v_1+(1/3)v_2+v_3$, $w_4=v_4-(\langle v_4,w_1 \rangle/\langle w_1,w_1 \rangle)w_1-(\langle v_4,w_2 \rangle/\langle w_2,w_2 \rangle)w_2-(\langle v_4,w_3 \rangle/\langle w_3,w_3 \rangle)w_3=v_4$. Essendo poi $|w_1|^2=2$, $|w_2|^2=3/2$, $|w_3|^2=1/3$, $|w_4|^2=1$, si ha che i vettori $u_1'=w_1/|w_1|=(1/\sqrt{2})v_1$, $u_2'=w_2/|w_2|=-(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))v_1+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_2$, $u_3'=w_3/|w_3|=(2\sqrt{3}/3)v_1-(\sqrt{3}/3)v_2+(\sqrt{3})v_3$ e $u_4'=w_4/|w_4|=v_4$ costituiscono una base ortonormale B_V' di V del tipo richiesto.

(c) Andando a sostituire le espressioni $v_1=u_1-u_2$, $v_2=u_1-u_3$, $v_3=u_2$, $v_4=u_4$ in u_1', u_2' ,u_3', u_4', si ha $u_1'=(1/\sqrt{2})u_1-(1/\sqrt{2})u_2$, $u_2'=(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))u_1+(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))u_2-(\sqrt{2}/\sqrt{3})u_3$, $u_3'=(\sqrt{3}/3)u_1+(\sqrt{3}/3)u_2+(\sqrt{3}/3)u_3$, $u_4'=u_4$. Allora la matrice del cambiamento di basi nel passaggio dalla base B_V alla base B_V' è la matrice C avente come righe $C^{(1)}=(1/\sqrt{2},\sqrt{2}/(2\sqrt{3}),1/\sqrt{3},0)$, $C^{(2)}=(-1/\sqrt{2},\sqrt{2}/(2\sqrt{3}),1/\sqrt{3},0)$, $C^{(3)}=(0,-\sqrt{2}/\sqrt{3},1/\sqrt{3},0)$, $C^{(4)}=(0,0,0,1)$, Tale matrice è ortogonale perché le basi B_V e B_V' sono entrambe ortonormali.

(e) L'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo che rappresenta U è $S_O=\{t(0,1,1,0) \mid t\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi risulta $U=\{t(u_2+u_3) \mid t\in \boldsymbol{R}\}$, onde U è una retta vettoriale e una base di U è costituita dal solo vettore $u=u_2+u_3$, Allora $W=U^{\perp}$.è l'iperpiano vettoriale ortogonale al vettore u e quindi ha equazione cartesiana $x_2+x_3=0$. Una base di W è, per esempio, quella costituita dai vettori $w_1'=u_1$, $w_2'=-u_2+u_3$, $w_3'=u_4$.

Altra soluzione. I vettori $v_1'=u_1-u_2+u_3$, $v_2'=u_1+u_2-u_3$, $v_3'=u_4$, ortogonali rispettivamente agli iperpiani rappresentati dalla prima, dalla seconda e dalla terza equazione cartesiana che costituiscono il sistema lineare omogeneo che rappresenta U, sono un sistema di generatori di $W=U^{\perp}$. Si verifica facilmente che tali vettori sono linearmente indipendenti e quindi essi formano una base di $W=U^{\perp}$. Usando tale base si perviene poi alla suddetta equazione cartesiana di $W=U^{\perp}$.

(e) Essendo W un iperpiano vettoriale ed u una base di $U=W^{\perp}$. si ha

$S_W(v)=v-2P_U(v)=v-2(\langle v,u\rangle/\langle u,u\rangle)u=u_1+u_2+u_3+u_4-2(\langle u_1+u_2+u_3,u_2+u_3\rangle/\langle u_2+u_3,u_2+u_3\rangle)(u_2+u_3)=$
$u_1+u_2+u_3+u_4-2(u_2+u_3)=u_1-u_2-u_3+u_4$.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 2-3-2011

1.1 <u>Spazio euclideo numerico</u> E^4. <u>Riferimento cartesiano canonico</u> RC(O;e_1,e_2,e_3,e_4). Siano assegnati i punti P_0=(k,k,-k,0), P_1=(1+k,-k,k,-1), P_2=(1,0,0,-1+k) e l'iperpiano h:x_1-x_2-x_3+x_4-3=0, essendo k un parametro reale.

(a) Determinare l'nsieme dei valori del parametro k in corrispondenza dei quali i punti P_0, P_1 e P_2 risultano indipendenti.

(b) Per ogni valore di k, di cui al punto precedente, scrivere equazioni cartesiane del piano p_k generato dai punti P_0, P_1 e P_2.

(c) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per il punto Q_0=(1,0,0,1) e perpendicolare all'iperpiano h.

(d) Studiare la mutua posizione del piano p_k e della retta r al variare di k nell'insieme dei valori determinato nel quesito (a).

(e) Determinare equazioni cartesiane della retta r′ passante per l'origine O, incidente e perpendicolare alla retta r. Determinare inoltre il punto N in cui s'intersecano le rette r ed r′ e dedurne la distanza d(O,r) di O dalla retta r.

Soluzione

(a) I punti P_0, P_1 e P_2 risultano indipendenti se e soltanto se i vettori P_1-P_0 e P_2-P_0 sono linearmente indipendenti. Essendo P_1-P_0=(1,-2k,2k,-1) e P_2-P_0=(1-k,-k,k,-1+k), si ha che i punti P_0, P_1 e P_2 risultano indipendenti se e soltanto se la matrice A_k, che ha come colonne le colonne delle coordinate dei vettori P_1-P_0 e P_2-P_0, ha rango 2, ovvero se e soltanto se k∈($\boldsymbol{R}$\{0,1/2}).

(b) Per k∈($\boldsymbol{R}$\{0,1/2}), si ha che, considerata la matrice ottenuta aggiungendo ad A_k la colonna ^{t}(x_1-k,x_2-k,x_3+k,x_4) ed imponendo a tale matrice di avere rango minore di 3, equazioni cartesiane di p_k sono, per esempio, x_2+x_3=0, x_1+x_4-k=0.

(c) Dovendo essere r⊥h ed essendo (a_1,a_2,a_3,,a_4)=(1,-1,-1,1) coefficienti di giacitura dell'iperpiano h, si ha che parametri direttori della retta r sono, per esempio, (l_1,l_2,l_3,,l_4)=(1,-1,-1,1). Allora, dovendo la retta r passare per il punto Q_0, equazioni in forma di rapporti uguali della retta r sono, per esempio, (x_1-1)/1=x_2/(-1)=x_3/(-1)=(x_4-1)/1. Da tali equazioni si traggono immediatamente le seguenti equazioni parametriche: x_1=1+t, x_2=-t, x_3=-t, x_4=1+t, t∈$\boldsymbol{R}$ e le seguenti equazioni cartesiane: x_1+x_2-1=0 x_1+x_3-1=0, x_1-x_4=0.

(d) Detto P il punto generico della retta r, essendo P=(1+t,-t,-t,1+t), andando a sostituire le coordinate di P nelle equazioni cartesiane del piano p_k, si ha il sistema –t-t=0, 1+t+1+t-k=0 nell'incognita t, che risulta manifestamente incompatibile per k∈($\boldsymbol{R}$\{0,1/2}). Pertanto per k∈($\boldsymbol{R}$\{0,1/2}). risulta p_k∩r=∅, ossia piano e retta sono disgiunti, onde, in particolare, piano e retta non sono incidenti. Equazioni della giacitura del piano p_k sono: x_2+x_3=0, x_1+x_4=0. Tali equazioni non sono soddisfatte dai parametri direttori della retta r onde la giacitura del piano p_k non contiene la direzione della retta r e quindi piano e retta non sono paralleli. In definitiva, per k∈($\boldsymbol{R}$\{0,1/2}), piano e retta, non essendo né incidenti né paralleli, sono sghembi.

(e) La retta generica passante per l'origine O=(0,0,0,0) ed incidente la retta r può essere ottenuta come retta passante per i due punti distinti O e P∈r e quindi ha equazioni, in forma di rapporti uguali, x_1/(1+t)=x_2/(-t)=x_3/(-t)=x_4/(1+t). Tale retta ha parametri direttori (l_1',l_2',l_3',,l_4')=(1+t,-t,-t,1+t). La condizione di perpendicolarità con la retta r dà 1+t+t+t+1+t=0, ossia t=-1/2. Pertanto equazioni, in forma di rapporti uguali, della retta r′ sono

$x_1/(1/2)=x_2/(1/2)=x_3/(1/2)=x_4/(1/2)$ ed è $N=(1/2,1/2,1/2,1/2)$. Risulta infine $d(O,r)=d(O,N)=(1/4+1/4+1/4+1/4)^{1/2}=1$.

1.2. Spazio vettoriale euclideo V dei vettori geometrici. Base ortonormale $B_V=(u_1,u_2,u_3)$. Sia assegnata la forma bilineare non simmetrica reale $b:V\times V\to\boldsymbol{R}$, tale che

$$b(v,w)=x_1y_1+x_1y_2+4x_1y_3-3x_2y_1+x_2y_2-2x_2y_3-2x_3y_1+x_3y_3,$$

essendo $v=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3$, $w=y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3$.

(a) Determinare la forma quadratica reale $q:V\to\boldsymbol{R}$ associata a b.

(b) Determinare la forma bilineare simmetrica reale ${}^sb:V\times V\to\boldsymbol{R}$, polare della forma quadratica reale q.

(c) Determinare una base ortonormale opportuna rispetto alla quale l'espressione di ${}^sb(v,w)$ sia canonica metrica e scrivere tale espressione.

(d) Determinare gli indici di positività, di negatività e di nullità di ${}^sb$ e dedurne il tipo di ${}^sb$.

(e) Determinare l'espressione canonica metrica di q e dedurne se esistono o non esistono basi di V costituite da vettori isotropi rispetto a ${}^sb$.

Soluzione

(a) Risulta $q(v)=(x_1)^2-2x_1x_2+2x_1x_3+(x_2)^2-2x_2x_3+(x_3)^2$,

(b) La forma bilineare simmetrica reale ${}^sb:V\times V\to\boldsymbol{R}$, polare della forma quadratica q, è tale che

${}^sb(v,w)=x_1y_1-x_1y_2+x_1y_3-x_2y_1+x_2y_2-x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2+x_3y_3$.

(c) La matrice associata alla forma bilineare simmetrica reale ${}^sb$, rispetto alla base ortonormale B_V, è la matrice simmetrica A avente come righe $A^{(1)}=(1,-1,1)$, $A^{(2)}=(-1,1,-1)$, $A^{(3)}=(1,-1,1)$. Sia $F:V\to V$ l'endomorfismo simmetrico associato a ${}^sb$, ossia tale che ${}^sb(v,w)=F(v)\times w$, dove con $\times$ si indica il prodotto scalare ordinario. Tale endomorfismo ha come matrice associata, rispetto alla base ortonormale B_V, la matrice A. L'equazione caratteristica di F è allora $\det(A-\lambda I)=0$, ossia $-\lambda^2(\lambda-3)=0$, quindi autovalori di F sono $\lambda_1=3$, con molteplicità algebrica $a_1=1$, e $\lambda_2=0$, con molteplicità algebrica $a_2=2$. L'autospazio V_3, associato all'autovalore $\lambda_1=3$, ha equazioni cartesiane $-2x_1-x_2+x_3=0$, $-x_1-2x_2-x_3=0$, $x_1-x_2-2x_3=0$, ovvero $x_1+2x_2+x_3=0$, $x_1-x_2-2x_3=0$. Si trova immediatamente che l'insieme delle soluzioni dell'ultimo sistema è $S_O=\{t(1,-1,1)\mid t\in\boldsymbol{R}\}$e quindi risulta $V_3=\{t(u_1-u_2+u_3)\mid t\in\boldsymbol{R}\}$. Si ha allora che una base ortonormale di V_3 è costituita dall'autovettore unitario $v_1=(1/\sqrt{3})u_1-(1/\sqrt{3})u_2+(/\sqrt{3})u_3$. Analogamente si ottiene facilmente che l'autospazio V_0 associato all'autovalore $\lambda_2=0$, coincide con il sottospazio vettoriale $\{t_1(u_1+u_2)+t_2(-u_1+u_3)\mid t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di V_0 è costituita dagli autovettori $v_2=u_1+u_2$, $v_3=-u_1+u_3$. Osservato che (v_2,v_3) non è una base ortogonale di V_0, applichiamo a tale base il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Si ha allora che una base ortogonale di V_0 è quella costituita dagli autovettori $w_2=v_2=u_1+u_2$, $w_3=v_3-(v_3\times w_1/w_1\times w_1)w_1=-u_1+u_3+(1/2)(u_1+u_2)=-(1/2)u_1+(1/2)u_2+u_3$. Normalizzando i vettori w_2 e w_3, si ha $u_2'=w_2/|w_2|=(1/\sqrt{2})u_1+(1/\sqrt{2})u_2$, $u_3'=w_3/|w_3|=-(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))u_1+(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))u_2+(\sqrt{2}/\sqrt{3})u_3$. Gli autovettori unitari u_2', u_3' costituiscono una base ortonormale di V_0. Dalla teoria è noto che autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali e quindi, posto $u_1'=v_1=(1/\sqrt{3})u_1-(1/\sqrt{3})u_2+(/\sqrt{3})u_3$, si ottiene che $B_V'=(u_1',u_2',u_3')$ è una base ortonormale di V. Si ha in definitiva che B_V' è una base ortonormale costituita da autovettori di F. Risulta

$$^sb(u_1',u_1')=F(u_1')\times u_1'=\lambda_1(u_1')\times u_1'=\lambda_1(u_1'\times u_1')=3,$$
$$^sb(u_2',u_2')=F(u_2')\times u_2'=\lambda_2(u_2')\times u_2'=\lambda_2(u_2'\times u_2')=0,$$
$$^sb(u_3',u_3')=F(u_3')\times u_3'=\lambda_2(u_3')\times u_3'=\lambda_2(u_3'\times u_3')=0,$$
$$^sb(u_1',u_j')=F(u_1')\times u_j'=\lambda_1(u_1')\times u_j'=\lambda_1(u_1'\times u_j')=0,\ 2\leq j\leq 3,$$
$$^sb(u_2',u_3')=F(u_2')\times u_3'=\lambda_2(u_2')\times u_3'=\lambda_2(u_2'\times u_3')=0$$

e quindi si ha

$$^sb(v,w)=3x_1'y_1',$$

essendo (x_1',x_2',x_3') e (y_1',y_2',y_3') le coordinate, rispettivamente, di v e w rispetto alla base ortonormale B_V'. L'espressione appena ottenuta di $^sb(v,w)$ è l'espressione canonica metrica richiesta e B_V' è unaa base ortonormale rispetto alla quale l'espressione di $^sb(v,w)$ è canonica metrica.

(d) Dall'espressione canonica metrica di $^sb(v,w)$ si trae immediatamente che gli indici di positività, di negatività e di nullità di ^sb sono rispettivamente 1, 0 e 2. Di conseguenza ^sb è una forma bilineare simmetrica reale semidefinita positiva;

(e) L'espressione canonica metrica della forma quadtatica reale q è data da $q(v)=3(x_1')^2$. Da tale espressione si trae che l'equazione cartesiana, rispetto alla base ortonormale B_V', del sottoinsieme dei vettori isotropi, rispetto alla forma bilineare simmetrica reale ^sb, è $3(x_1')^2=0$, ovvero $x_1'=0$. Siccome quest'ultima equazione rappresenta un piano vettoriale di V, nessuna terna di vettori di tale piano può essere una base di V. Pertanto non esistono in V basi costituite da vettori isotropi rispetto a ^sb.

2.1. <u>Spazio euclideo numerico</u> $\boldsymbol{E^4}$. Riferimento cartesiano canonico $RC(O;e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i punti $P_0=(-k,-k,k,0)$, $P_1=(1-k,k,-k,-1)$, $P_2=(1,0,0,-1-k)$ e l'iperpiano $h{:}x_1-x_2-x_3+x_4-1=0$, essendo k un parametro reale.

(a) Determinare l'nsieme dei valori del parametro k in corrispondenza dei quali i punti P_0, P_1 e P_2 risultano indipendenti.

(b) Per ogni valore di k, di cui al punto precedente, scrivere equazioni cartesiane del piano p_k generato dai punti P_0, P_1 e P_2.

(c) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per il punto $Q_0=(0,1,1,0)$ e perpendicolare all'iperpiano h.

(d) Studiare la mutua posizione del piano p_k e della retta r al variare di k nell'insieme dei valori determinato nel quesito (a).

(e) Determinare equazioni cartesiane della retta r′ passante per il punto $P_0'=(2,2,2,2)$, incidente e perpendicolare alla retta r. Determinare inoltre il punto N in cui s'intersecano le rette r ed r′ e dedurne la distanza $d(P_0',r)$ del punto P_0' dalla retta r.

Soluzione

(a) Procedendo come al punto (a) dell'esercizio 1.1, si ha che i punti risultano indipendenti per ogni $k\in(\boldsymbol{R}\setminus\{0,-1/2\})$.
(b) Proseguendo come nel quesito (b) dell'esercizio 1.1, si ha p_k:$x_2+x_3=0$, $x_1+x_4+k=0$.
(c) Proseguendo come nel quesito (c) dell'esercizio 1.1, si ha r:$x_1/1=(x_2-1)/(-1)=(x_3-1)/(-1)=x_4/1$. Da tali equazioni si traggono immediatamente le seguenti equazioni parametriche di r: $x_1=t$, $x_2=1-t$, $x_3=1-t$, $x_4=t$, $t\in\boldsymbol{R}$ e le seguenti equazioni cartesiane: $x_1+x_2-1=0$, $x_1+x_3-1=0$, $x_1-x_4=0$.
(d) Ragionando come nel quesito (d) dell'esercizio 1.1, si ha che il piano p_k e la retta r sono sghembi per ogni $k\in(\boldsymbol{R}\setminus\{0,-1/2\})$.
(d) Proseguendo come nel quesito (e) dell'esercizio 1.1, si che equazioni, in forma di rapporti uguali, della retta r′ sono $(x_1-2)/(-3/2)=(x_2-2)/(-3/2)=(x_3-2)/(-3/2)=(x_4-2)/(-3/2)$ ed è $N=(1/2,1/2,1/2,1/2)$. Risulta infine $d(P_0',r)=d(P_0',N)=(9/4+9/4+9/4+9/4)^{1/2}=3$.

2.2. <u>Spazio vettoriale euclideo</u> V <u>dei vettori geometrici.</u> <u>Base ortonormale</u> $B_V=(u_1,u_2,u_3)$. Sia assegnata la forma bilineare non simmetrica reale $b:V\times V\to\boldsymbol{R}$, tale che

$$b(v,w)=x_1y_1+2x_1y_2+3x_1y_3-4x_2y_1+x_2y_2-x_2y_3-x_3y_1-x_3y_2+x_3y_3,$$

essendo $v=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3$, $w=y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3$.
(a) Determinare la forma quadratica reale $q:V\to\boldsymbol{R}$ associata a b.
(b) Determinare la forma bilineare simmetrica reale ${}^sb:V\times V\to\boldsymbol{R}$, polare della forma quadratica reale q.
(c) Determinare una base ortonormale opportuna rispetto alla quale l'espressione di ${}^sb(v,w)$ sia canonica metrica e scrivere tale espressione.
(d) Determinare gli indici di positività, di negatività e di nullità di ${}^sb$ e dedurne il tipo di ${}^sb$.
(e) Determinare l'espressione canonica metrica di q(v) e dedurne se esistono o non esistono basi di V costituite da vettori isotropi rispetto a ${}^sb$.

Soluzione

Vedere la soluzione dell'esercizio 1.2.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 18-7-2011

1. Spazio euclideo ordinario. RC(O;i,j,k). Siano assegnati il punto $P_0(1,-1,1)$, il piano p:x+y+z=0, la retta r:x+y-z=0, x+2y=0 e la retta s:x=1+t, y=1, z=1-t, t□***R***.
(a) Determinare la retta r´ passante per il punto P_0, parallela al piano p e complanare con la retta r.
(b) Determinare il valore del parametro reale h in corrispondenza del quale i punti $Q_0(0,h,0)$, $Q_1(1,h+1,-1)$, $Q_2(1,3h,3h)$, $Q_3(-1,h+1,3)$ risultano complanari.
(c) Determinare il piano q generato dai punti Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 in corrispondenza del valore del parametro reale h di cui al punto precedente.
(d) Scrivere equazioni cartesiane del fascio *F* di rette ottenuto intersecando con il piano q il fascio di piani avente come asse la retta r´.
(e) Determinare la retta s´ appartenete al fascio *F* e perpendicolare alla retta s.

Soluzione

(a) Risulta $r'=p_1\cap p_2$, essendo p_1 il piano passante per il punto P_0 e parallelo al piano p e p_2 il piano passante per il punto P_0 e contenente la retta r. Imponendo al piano generico parallelo al piano p il passaggio per il punto P_0, si ha subito p_1:x+y+z-1=0. Il piano p_2 può essere ottenuto imponendo al piano generico del fascio di piani di asse la retta r il passaggio per il punto P_0. Un'equazione cartesiana di tale fascio di piani è x+y-z+h(x+2y)=0. Il passaggio per il punto P_0 dà h=-1 e quindi è p_2:y+z=0. Equazioni cartesiane di r´ sono allora x+y+z-1=0, y+z=0, ossia x-1=0, y+z=0.
(b) I punti Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 risultano complanari se e soltanto se i vettori geometrici rappresentati dai segmenti orientati Q_0Q_1, Q_0Q_2 e Q_0Q_3, risultano linearmente dipendenti. Essendo (1,1,-1), (1,2h,3h) e (-1,1,3) le coordinate di tali vettori, si ha che essi risultano linearmente dipendenti se e soltanto se la matrice A avente come righe $A^{(1)}=(1,1,-1)$, $A^{(2)}=(1,2h,1)$ e $A^{(3)}=(-1,3h,3)$ ha rango minore di 3, ossia se e soltanto se risulta det(A)=0. Ma è det(A)=-2h-4, onde i punti Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 risultano complanari se e soltanto è h=-2.
(c) Dalla matrice A, scritta per h=-2, si trae per esempio che i punti Q_0, Q_1, Q_2 non sono allineati, quindi il piano q può essere ottenuto come piano passante per tali punti. Detta B la matrice avente come righe $B^{(1)}=(x,y+2,z)$, $B^{(2)}=(1,1,-1)$ e $B^{(3)}=(1,-4,-6)$, l'equazione cartesiana di q può essere ottenuta ponendo det(B)=0. Risulta allora q:2x-y+z-2=0.
(d) Il fascio di piani avente come asse la retta r´ ha come equazione cartesiana, per esempio, x-1+h´(y+z)=0. Il fascio di rette *F* ha allora equazioni cartesiane x-1+h´(y+z)=0, 2x-y+z-2=0, ovvero x+h´y+h´z-1=0, 2x-y+z-2=0.
(e) La retta generica del fascio *F* ha parametri direttori l´=2h´, m´=2h´-1, n´=-2h´-1. Allora la condizione di perpendicolarità con la retta s, che ha parametri direttori, (l,m,n)=(1,0,-1), dà 4h´+1=0, ossia h´=-1/4 onde equazioni cartesiane della retta s´ sono 4x-y-z-4=0, 2x-y+z-2=0.

2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnata la funzione reale $b:V\times V\to \boldsymbol{R}$, tale che

$$b(v,w)=x_1y_1-x_1y_3+2x_2y_2-x_2y_4-x_3y_1+2x_3y_3+x_3y_4-x_4y_2+x_4y_3+2x_4y_4,$$

essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4$, $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3+y_4v_4$.
(a) Verificare che b è una forma bilineare reale simmetrica definita positiva, ossia che b è un prodotto scalare su V.
(b) Posto per comodità b(v,w)=<v,w>, determinare l'espressione di |v|.

(c) Determinare gli angoli convessi formati dalle coppie di vettori della base B_V.
(d) Determinare la base ortonormale $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ ottenuta dalla base B_V applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
(e) Posto $\mathrm{Span}(v_1,v_2)=W$, determinare il vettore $P(v)$, proiezione ortogonale del vettore $v=v_1+v_2+v_3+v_4$ sul sottospazio vettoriale W, ed il vettore $S(v)$ immagine dello stesso vettore v nella simmetria ortogonale rispetto a W.

Soluzione

(a) Risulta $b(v,w)={}^tXAY$, essendo ${}^tX=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, A la matrice quadrata avente come righe $A^{(1)}=(1,0,-1,0)$, $A^{(2)}=(0,2,0,-1)$, $A^{(3)}=(-1,0,2,1)$, $A^{(4)}=(0,-1,1,2)$ e ${}^tY=(y_1,y_2,y_3,y_4)$. Pertanto la funzione reale b è una forma bilineare reale. Essendo A una matrice simmetrica, la forma bilineare reale b è simmetrica. Risulta infine $\det(A_{(1,1)})=1>0$, $\det(A_{(2,2)})=2>0$, $\det(A_{(3,3)})=2>0$, $\det(A_{(4,4)})=1>0$ e quindi, per il criterio di positività di Hurewicz, la forma bilineare simmetrica reale b è definita positiva, ossia è un prodotto scalare.
(b) Si ha $\langle v,w\rangle=b(v,w)=x_1y_1-x_1y_3+2x_2y_2-x_2y_4-x_3y_1+2x_3y_3+x_3y_4-x_4y_2+x_4y_3+2x_4y_4$ e quindi $|v|=\langle v,v\rangle^{1/2}=(x_1^2-2x_1x_3+2x_2^2-2x_2x_4+2x_3^2+2x_3x_4+2x_4^2)^{1/2}$.
(c) Risulta $\cos v_1\hat{}v_2=\langle v_1,v_2\rangle/(|v_1|\,|v_2|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_2=\pi/2$, $\cos v_1\hat{}v_3=\langle v_1,v_3\rangle/(|v_1|\,|v_3|)=-1/\sqrt{2}\Rightarrow v_1\hat{}v_3=(3/4)\pi$, $\cos v_1\hat{}v_4=\langle v_1,v_4\rangle/(|v_1|\,|v_4|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_3=\langle v_2,v_3\rangle/(|v_2|\,|v_3|)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_4=\langle v_2,v_4\rangle/(|v_2|\,|v_4|)=-1/2\Rightarrow v_2\hat{}v_4=(2/3)\pi$, $\cos v_3\hat{}v_4=\langle v_3,v_4\rangle/(|v_3|\,|v_4|)=1/2\Rightarrow v_3\hat{}v_4=\pi/3$.
(d) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt applicato alla base B_V dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3,w_4), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,v_2\rangle/\langle v_2,v_2\rangle)v_2=v_1+v_3$, $w_4=v_4-(\langle v_4,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_4,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2-\langle v_4,w_3\rangle/\langle w_3,w_3\rangle)w_3=v_4-(\langle v_4,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_4,v_2\rangle/\langle v_2,v_2\rangle)v_2-(\langle v_4,\ v_1+v_3\rangle/\langle v_1+v_3,\ v_1+v_3\rangle)(\ v_1+v_3)=-v_1+(1/2)v_2-v_3+v_4$.
Risultando poi $|w_1|=|v_1|=1$, $|w_2|=|v_2|=\sqrt{2}$, $|w_3|=|v_1+v_3|=1$, $|w_4|=1/(\sqrt{2})$, si ha che la base ortonormale richiesta B_V' è costituita dai vettori $v_1'=w_1/|w_1|=v_1$, $v_2'=w_2/|w_2|=(1/\sqrt{2})v_2$, $v_3'=w_3/|w_3|=v_1+v_3$ e $v_4'=w_4/|w_4|=-(\sqrt{2})v_1+(\sqrt{2}/2)v_2-(\sqrt{2})v_3+(\sqrt{2})v_4$.
(e) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt è tale che $\mathrm{Span}(v_1,v_2)=\mathrm{Span}(w_1,w_2)$. Ovviamente è anche $\mathrm{Span}(v_1',v_2')=\mathrm{Span}(w_1,w_2)$ e quindi (v_1',v_2') è una base ortonormale di $W=\mathrm{Span}(v_1,v_2)$. Si ha pertanto $P(v)=\langle v,v_1'\rangle v_1'+\langle v,v_2'\rangle v_2'=\langle v_1+v_2+v_3+v_4,v_1\rangle v_1+\langle v_1+v_2+v_3+v_4,(1/\sqrt{2})v_2\rangle(1/\sqrt{2})v_2=(1/2)v_2$ e
$S(v)=2P(v)-v=v_2-v_1-v_2-v_3-v_4=-v_1-v_3-v_4$.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova scritta del 5-9-2011

1. Spazio euclideo ordinario **E**. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $A \equiv O(0,0,0)$, $C(1,0,1)$ e le rette $r: 2x-y-2=0,\ y+2z+2=0$, $r_1: x+z-1=0,\ y-z=0$, $r_2: x-z+1=0,\ y-1=0$.

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano p passante per il punto A e perpendicolare alla retta r.

(b) Dopo aver verificato che il punto C appartiene al piano p, determinare i punti B e D sul piano p in modo tale che il quadrilatero ABCD sia un rombo di area $A=\sqrt{6}$.

(c) Dopo aver verificato che le rette r_1 e r_2 sono complanari, determinare l'equazione cartesiana del piano q che contiene tali rette.

(d) Detto E il punto generico del piano q, calcolare il volume V del parallelepipedo individuato dai punti A, B, D, E.

(e) Studiare il comportamento del volume V al variare del punto E sul piano q, giustificando geometricamente la risposta.

Soluzione

(a) Parametri direttori della retta r sono, per esempio, $(l,m,n)=(1,2,-1)$. Allora l'equazione cartesiana del piano p è $x+2y-z=0$.

(b) Il punto C appartiene al piano p perché le sue coordinate cartesiane soddisfano l'equazione cartesiana di p. Poiché il piano p passa per il punto A per costruzione, il rombo richiesto giace sul piano p. Essendo $(1/2,0,1/2)$ le coordinate cartesiane del punto medio M dei punti A e C e $(1,0,1)$ le coordinate del vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato AC, l'asse s, sul piano p, del segmento AC ha equazioni cartesiane $x-1/2+z-1/2=0$, $x+2y-z=0$, ossia $x+z-1=0$, $x+2y-z=0$. Equazioni parametriche dell'asse s sono, per esempio, $x=-t+1/2$, $y=t$, $z=t+1/2$, $t\in \boldsymbol{R}$. Considerato allora il punto $P(-t+1/2,t,t-1/2)$ variabile sull'asse s ed essendo $2^{1/2}$ e $(3t^2)^{1/2}$ la lunghezza rispettivamente del segmento AC e del segmento MP, si ha che i punti B e D si ottengono imponendo che sia $2^{1/2}(3t^2)^{1/2}=6^{1/2}$, ossia $t^2=1$. Tale condizione dà $t=\pm 1$ e quindi risulta, per esempio, $B(-1/2,1,3/2)$ e $D(3/2,-1,-1/2)$.

(c) Il sistema $x+z-1=0$, $y-z=0$, $x-z+1=0$, $y-1=0$ costituito dalle equazioni cartesiane delle rette r_1 ed r_2 ammette manifestamente la soluzione $(0,1,1)$. Allora le rette r_1 ed r_2, dovendo avere almeno un punto in comune, non possono essere né sghembe né parallele e disgiunte. Essendo $(l_1,m_1,n_1)=(1,-1,-1)$, $(l_2,m_2,n_2)=(1,0,1)$, parametri direttori rispettivamente della retta r_1 e della retta r_2, si ha che tali rette non possono essere nemmeno parallele e coincidenti. In definitiva le rette r_1 ed r_2 sono incidenti. Il punto d'incidenza è il punto $Q_0(0,1,1)$. Il piano q, contenente le rette r_1 ed r_2, può essere ottenuto come piano passante per Q_0 e parallelo alle rette r_1 ed r_2, ossia come piano passante per Q_0 e di giacitura $W=\mathrm{Span}(w_1,w_2)$, essendo $w_1(1-1,-1)$ e $w_2(1,0,1)$ vettori direttori rispettivamente di r_1 ed r_2. L'equazione cartesiana del piano q si ottiene uguagliando a 0 il determinante della matrice quadrata che ha come righe $(x, y-1, z-1)$, $(1,-1,-1)$ e $(1,0,1)$. Si ha allora $q: -x-2(y-1)+z-1=0$, ovvero $q: x+2y-z-1=0$; per il seguito è utile osservare esplicitamente che il piano q risulta parallelo al piano p.

(d) Equazioni parametriche del piano q sono, per esempio, $x=t_1$, $y=t_2$, $z=t_1+2t_2-1$, $t_1,t_2\in \boldsymbol{R}$, onde risulta $E(t_1,t_2,t_1+2t_2-1)$. Si ha allora che, essendo $(-1/2,1,3/2)$, $(3/2,-1,-1/2)$ e (t_1,t_2,t_1+2t_2-1) le coordinate dei vettori geometrici rappresentati rispettivamente dai segmenti orientati AB, AC ed AE, il volume V uguaglia il modulo del determinante della matrice quadrata che ha come righe $(-1/2,1,3/2)$, $(3/2,-1,-1/2)$, (t_1,t_2,t_1+2t_2-1). Risulta subito $V=1$.

(e) Il volume V del parallelepipedo non varia al variare del punto E sul piano q, ossia è costante. Tale risultato si giustifica geometricamente osservando che il parallelepipedo individuato dai punti A, B, D, E ha sempre lo stesso volume in quanto la base ABCD non cambia al variare del punto E sul piano q e l'altezza relativa a tale base uguaglia la distanza tra i piani paralleli p e q.

2. Spazio vettoriale reale V dei vettori geometrici dello spazio euclideo ordinario. Base ortonormale B=(i,j,k). Sia assegnato il sottospazio vettoriale W:x-y+z=0.

(a) Determinare il vettore P(v), proiezione ortogonale del vettore v su W, essendo v un vettore generico di V.

(b) Verificare che l'applicazione $P:V\rightarrow V$ è un endomorfismo simmetrico di V.

(c) Determinare gli autovalori di P, indicandone le rispettive molteplicità algebriche.

(d) Determinare una base ortonormale $B'=(i_1',j',k')$ di V costituita da autovettori rispetto a P.

(e) Dopo aver scritto la matrice A′ associata a P rispetto alla base ortonormale B′, determinare una matrice ortogonale C tale che $A'={}^tCAC$.

Soluzione

(a) Intanto W è un piano vettoriale di V. Un vettore ortogonale a W è, per esempio,u=i-j+k. Risulta allora $P(v)=v-((v\times u)/(u\times u))u$, dove con $\times$ si indica il prodotto scalare ordinario.

(b) Dall'espressione di P(v) si trae subito che l'applicazione $P:V\rightarrow V$ è lineare, essendo lineare rispetto al primo argomento il prodotto scalare, e quindi P è un endomorfismo di V. Risulta poi:

$P(i)=i-((i\times(i-j+k))/((i-j+k)\times(i-j+k)))(i-j+k)=i-(1/3)(i-j+k)=(2/3)i+(1/3)j-(1/3)k;$

$P(j)=j-((j\times(i-j+k))/((i-j+k)\times(i-j+k))(i-j+k)=j+(1/3)(i-j+k)=(1/3)i+(2/3)j+(1/3)k;$

$P(k)=k-(((k\times(i-j+k))/((i-j+k)\times(i-j+k)))(i-j+k)=k-(1/3)(i-j+k)=-(1/3)i+(1/3)j+(2/3)k.$

Allora la matrice A associata all'endomorfismo P, rispetto alla base ortogonale B, ha come righe $A^{(1)}=(2/3,1/3,-1/3)$, $A^{(2)}=(1/3,2/3,1/3)$ $A^{(3)}=(-1/3,1/3,2/3)$. Essendo A una matrice simmetrica, si ha che l'endomorfismo P è simmetrico.

(c) L'equazione caratteristica di P si ottiene uguagliando a 0 il determinante della matrice $A-\lambda I$. Sviluppando tale determinante, si ha allora che l'equazione caratteristica di P è $-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda=0$, ovvero $-\lambda(\lambda^2-2\lambda+1)$, ossia $-\lambda(\lambda-1)^2=0$, onde gli autovalori di P sono $\lambda_1=0$, con molteplicità algebrica $a_1=1$, e $\lambda_2=1$, con molteplicità algebrica $a_2=2$.

(d) L'autospazio V_0, associato all'autovalore $\lambda_1=0$, ha equazioni cartesiane $(2/3)x+(1/3)y-(1/3)z=0$, $(1/3)x+(2/3)y+(1/3)z=0$, $-(1/3)x+(1/3)y+(2/3)z=0$, ossia $2x+y-z=0$, $x+2y+z=0$. Lo spazio delle soluzioni dell'ultimo sistema omogeneo è $S_o=\{t(1,-1,1)\}_{t\in\mathbf{R}}$ e quindi è $V_0=\{t(i-j+k)\}_{t\in\mathbf{R}}$. Una base ortonormale di V_0 è allora costituita dal solo autovettore unitario $i'=(1/\sqrt{3})i-(1/\sqrt{3})j+(1/\sqrt{3})k$. Si ha poi V_1: $-(1/3)x+(1/3)y-(1/3)z=0$, $(1/3)x-(1/3)y+(1/3)z=0$, $-(1/3)x+(1/3)y-(1/3)z=0$, ossia $V_1:x-y+z=0$ e quindi è $V_1=\{t_1(i+j)+t_2(j+k) \mid t_1,t_2\in\mathbf{R}\}$. Una base di V_1 è per esempio quella costituita dagli autovettori $v_2=i+j$, $v_3=j+k$. Tale base non è ortogonale giacché risulta $v_2\times v_3=1\neq0$. Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt a tale base, si ha la base ortogonale (w_2,w_3) di V_1, essendo $w_2=v_2=i+j$, $w_3=v_3-((v_3\times w_2)/(w_2\times w_2))w_2=j+k-(((j+k)\times(i+j))/((i+j)\times(i+j)))(i+j)=j+k-(1/2)(i+j)=-(1/2)i+(1/2)j+k$. Essendo poi $|w_2|=\sqrt{2}$ e $|w_3|=\sqrt{3}/\sqrt{2}$, si ha in definitiva che una base ortonormale di V_1 è quella costituita dagli autovettori unitari $j'=(1/\sqrt{2})i+(1/\sqrt{2})j$ e $k'=-(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))i+(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))j+(\sqrt{2}/\sqrt{3})k$. Ebbene, essendo ortogonali gli autovettori associati ad autovalori distinti di un endomorfismo simmetrico, si ha in definitiva che una base ortonormale di V, costituita da autovettori rispetto a P è $B'=(i',j',k')$, essendo i' ,j', k' gli autovettori unitari testé determinati.

(e) La matrice A', associata a P rispetto alla base ortonormale B', ha come righe $A'^{(1)}=(0,0,0)$, $A'^{(2)}=0,1,0)$, $A'^{(3)}=(0,0,1)$. Una matrice ortogonale C, tale che $A'={}^tCAC$, coincide con la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base ortonormale B alla base ortonormale B' ed ha quindi come colonne le colonne delle coordinate degli autovettori unitari i', j', k'. La matrice C ha allora come righe $C^{(1)}=(1/\sqrt{3},1\sqrt{2},-\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))$, $C^{(2)}=(-1/\sqrt{3},1\sqrt{2},\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))$, $C^{(3)}=(1/\sqrt{3},0,\sqrt{2}/\sqrt{3})$.

ESAME DI GEOMETRIA FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova scritta del 10–11–2011

1 . $RA(O, x, y, z)$. Dati il punto $P_0(1,2,3)$, il piano $p : y - z = 0$ e la retta r di equazioni parametriche $x = 1 + t,\ y = 2t,\ z = -t$, ove $t \in \mathbb{R}$

(1) scrivere equazioni cartesiane della retta r_0 passante per P_0 e parallela ad r e l'equazione cartesiana del piano p_0 passante per P_0 e parallelo a p;

(2) determinare le coordinate dei punti $P_1 = p \cap r_0$, $P_2 = r \cap p_0$;

(3) determinare equazioni della retta s passante per P_0, parallela al piano p ed incidente la retta r.

Soluzione: (1) La retta r ha parametri direttori $(1,2,-1)$. Quindi equazioni parametriche di r_0 sono

$$x = 1 + t,\ y = 2 + 2t,\ z = 3 - t\,.$$

Da queste si ottengono rapidamente equazioni cartesiane ricavando $t = x - 1$ dalla prima e sostituendo nelle altre due:

$$r_0 : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Il piano richiesto ha gli stessi parametri di giacitura di p; quindi p_0 ha equazione cartesiana $y - 2 - (z - 3) = 0$, ovvero

$$p_0 : y - z + 1 = 0\,.$$

(2) Le coordinate di P_1 sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases};$$

da cui $P_1(4/3, 8/3, 8/3)$.

Le coordinate del punto P_2 sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui $P_2(2/3, -2/3, 1/3)$.

(3) La retta s è la retta per i due punti P_0 e P_2. Suoi parametri direttori sono le componenti del vettore di estremi P_0 e P_2, cioè $(-1/3, -8/3, -8/3)$. Essendo questi determinati a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, possiamo assumere come parametri direttori la terna $(1,8,8)$ e scrivere equazioni parametriche di s:

$$x = 1 + t,\ y = 2 + 8t,\ z = 3 + 8t\,.$$

Da queste possiamo anche ricavare equazioni cartesiane:

$$s : \begin{cases} 8x - y - 6 = 0 \\ 8x - z - 5 = 0 \end{cases}.$$

2. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare per quali valori del parametro reale k l'operatore T risulta diagonalizzabile.

(2) Per tali valori, determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori di T e scrivere la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Soluzione: (1) Gli autovalori di T si ottengono risolvendo l'equazione

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -x & k & 2 \\ 0 & 0 & -1-x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = 0$$

che ha le soluzioni 0, 1, -1 di rispettive molteplicità 2, 1, 1. Per un noto teorema l'operatore T risulta diagonalizzabile se e soltanto se l'autospazio $E(0)$, relativo all'autovalore 0, ha dimensione pari alla molteplicità dell'autovalore 0, cioè 2. Determiniamo $E(0)$, che coincide con il nucleo di T. Si deve risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e imporre che lo spazio delle soluzioni abbia dimensione 2, ovvero che la matrice dei coefficienti abbia rango 2. Ciò accade se e solo se tutti i suoi minori di ordine 3 sono nulli, il che si riduce all'unica condizione

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

da cui si ricava $k = -2$.

(2) Determinazione di $E(0)$. Il procedimento è stato indicato al punto (1). Si ha

$$E(0) = \{(u, -u + 2v, v, v) | u, v \in \mathbb{R}\}.$$

Una base per $E(0)$ è $(1, -1, 0, 0), (0, 2, 1, 1)$.

Procedendo analogamente per $E(1)$, si risolva il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo $E(1) = span\{(1, 0, 0, 0)\}$.

Infine, con procedimento analogo, $E(-1) = span\{(1, -2, -1, 0)\}$.

Pertanto la base $\mathcal{B}$ è formata ordinatamente dai vettori

$$(1, -1, 0, 0), (0, 2, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (1, -2, -1, 0)\,.$$

In tale base l'operatore T è rapprentato dalla matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$