RENZO MAZZOCCO

CORSO DI GEOMETRIA
(PER FISICI)

RACCOLTA DEGLI ESERCIZI D'ESONERO E D'ESAME DI GEOMETRIA
DELL'ANNO ACCADEMICO 2009-2010

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO"
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
Novembre 2010

ESONERO DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Prova scritta del 17-11-2009

1. Spazio vettoriale numerico reale $V=R^4$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U=Span((u_1,u_2,u_3)$, essendo $u_1=(1,-1,0,1)$, $u_2=(1,1,1,0)$, $u_3=(0,2,1,-1)$ e W: $x_1+x_2-2x_3=0$, $3x_1+x_2-2x_3-2x_4=0$.

(a) Determinare una base, la dimensione ed equazioni cartesiane di U.

(b) Determinare una base e la dimensione di W.

(c) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(d) Determinare una base e la dimensione di U∩W.

(e) Determinare un sottospazio vettoriale U′ supplementare di U entro U+W.

Soluzione

(a) Risulta $u_3=u_2-u_1$, quindi i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente dpendenti. Allora, essendo u_1 e u_2 linearmente indipendenti in quanto non proporzionali, si ha che i vettori u_1, u_2 costituiscono un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti estratto dal sistema di generatori $\{u_1,u_2,u_3\}$ di U e quindi una base di U che indichiamo con B_U. Essendo B_U costituita da due vettori, si ha che dim(U)=2. Equazioni cartesiane di U sono, per esempio, $x_1+x_2-2x_3=0$, $x_1-x_3-x_4=0$. Tali equazioni si ottengono imponendo che abbia rango minore di tre la matrice che ha per colonne le colonne delle componenti dei vettori u_1, u_2 e del vettore generico $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

(b) Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss Jordan, si ha che il sistema di equazioni lineari omogenee che rappresenta W è equivalente al sistema a scala $x_1+x_2-2x_3=0$, $-2x_2+4x_3-2x_4=0$, che dà $x_1=t_2$, $x_2=2t_1-t_2$, $x_3=t_1$, $x_4=t_2$, essendo t_1 e t_2 parametri reali. Pertanto è $W=\{(t_2,2t_1-t_2,t_1,t_2) \mid t_1,t_2\in R\}$, onde una base di W è, per esempio, $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(0,2,1,0)$ e $w_2=u_1=(1,-1,0,1)$ e quindi dim(W)=2.

(c) Un sistema di generatori di U+W è, per esempio $\{u_1,u_2,w_1,w_2\}$. L'algoritmo di Gauss Jordan applicato a tale sistema di generatori dà la base $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$, onde dim(U+W)=3.

(d) Equazioni cartesiane di U∩W sono, per esempio, $x_1+x_2-2x_3=0$, $-x_2-x_3-x_4=0$, $x_1+x_2-2x_3=0$, $3x_1+x_2-2x_3-2x_4=0$. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss Jordan, si ha che il sistema costituito da tali equazioni risulta equivalente al sistema a scala $x_1+x_2-2x_3=0$, $-x_2+x_3-x_4=0$, $2x_3=0$, che dà $x_1=t$, $x_2=-t$, $x_3=0$, $x_4=t$, essendo t un parametro reale. Allora è $U\cap W=\{(t,-t,0,t) \mid t\in R\}$, con base $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dal vettore $w_2=u_1=(1,-1,0,1)$ e dim(U∩W)=1.

(e) Essendo $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$ una base di U+W che amplia la base $B_U=(u_1,u_2)$ di U, si ha che $U'=Span(w_1)$ è un sottospazio vettoriale di U+W supplementare di U entro U+W.

2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$$x_1+x_3+x_4=1,\ x_1+(2+k)x_3+2x_4=0,\ x_1+(1+k)x_2+x_3-x_4=0,$$

essendo k un parametro reale.

(a) Discutere la compatibilità del sistema al variare di k.

(b) Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistano.

(c) In corrispondenza di ogni valore del parametro k per cui il sistema è compatibile, detta U_k' la sottovarietà lineare affine rappresentata dal sistema, determinare un vettore u_k' appartenente a U_k' ed il sottospazio vettoriale U_k parallelo a U_k', indicandone una base e la dimensione.

Soluzione

(a) Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss Jordan, si ha che il sistema assegnato risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare $x_1+x_3+x_4=1$, $(1+k)x_2-2x_4=-1$, $(1+k)x_3+x_4=-1$, che è a scala e compatibile se è $k\neq-1$ mentre non è a scala se è $k=-1$. Applicando ancora il metodo di eliminazione di Gauss Jordan al sistema $x_1+x_3+x_4=1$, $-2x_4=-1$, $x_4=-1$, si ha che, in definitiva, il sistema assegnato, per $k=-1$, risulta equivalente al sistema a scala non compatibile $x_1+x_3+x_4=1$, $x_4=-1$, $0=-3$. Pertanto il sistema è compatibile se e soltanto se è $k\neq-1$ ed è incompatibile per $k=-1$.

(b) Sia $k\neq-1$. Il sistema a scala compatibile $x_1+x_3+x_4=1$, $(1+k)x_2-2x_4=-1$, $(1+k)x_3+x_4=-1$, equivalente a quello assegnato, dà $x_1=(2+k)/(1+k)-(k/(1+k))t$, $x_2=-1/(1+k)+(2/(1+k))t$, $x_3=-1/(1+k)-(1/(1+k))t$,, $x_4=t$, essendo t un parametro reale.

(c) Per $k\neq-1$ un vettore appartenente a U_k' è, per esempio, $u_k'=((2+k)/(1+k))v_1-(1/(1+k))v_2-(1/(1+k))v_3$. Si ha $U_k=\{t(-(k/(1+k))v_1+(2/(1+k))v_2-(1/(1+k))v_3+v_4)\mid t\in\mathbb{R}\}$, onde una base di U_k è costituita dal solo vettore $u_k=-(k/(1+k))v_1+(2/(1+k))v_2-(1/(1+k))v_3+v_4$ e quindi $\dim(U_k)=1$.

essendo k un parametro reale.

ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 28–1-2010

1. Spazio euclideo ordinario E. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i piani p_1:x-y+2z=0 e p_2:x-y+z+1=0, la retta r_1:x+y+2z=0, 2x+y+3z=0 ed i punti $P_1(1,0,1)$ e $P_2(0,1,0)$.

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per il punto P_1, parallela al piano p_1 e perpendicolare alla retta r_1.

(b) Scrivere equazioni cartesiane della retta s passante per il punto P_2 e perpendicolare al piano p_2.

(c) Scrivere un'equazione cartesiana del fascio F di piani avente come asse la retta s.

(d) Detto p il piano generico del fascio F, studiare l'intersezione della retta r con il piano p al variare di p in F.

(e) Determinare il versore u_1 normale al piano p_1 e orientato verso il basso.

Soluzione

(a) Equazioni in forma di rapporti uguali di una retta generica passante per P_1 sono (x-1)/l =y/m = (z-1)/n. Essendo a=1, b=-1, c=2 coefficienti di giacitura di p_1, la condizione di parallelismo con p_1 dà l-m+2n=0. Essendo l_1=1, m_1=1, n_1=-1 parametri direttori di r_1, la condizione di perpendicolarità con r_1 dà l+m-n=0. I parametri direttori di r si ottengono allora risolvendo il sistema lineare omogeneo l-m+2n=0, l+m-n=0. Una soluzione di tale sistema è, per esempio, (l,m,n))=(-1,3,2) e quindi equazioni in forma di rapporti uguali di r sono (x-1)/(-l) = y/3 = (z-1)/2. Allora equazioni cartesiane di r sono, per esempio,
2x+z-3=0, 2y-3z+3=0.

(b) Essendo a=1, b=-1, c=1 coefficienti di giacitura di p_2, la retta s, passante per P_2 e perpendicolare a p_2, ha equazioni in forma di rapporti uguali x/l = (y-1)/(-1) = z/1. Allora equazioni cartesiane di s sono, per esempio, x-z=0, y+z-1=0.

(c) Un'equazione cartesiana del fascio F di piani avente come asse la retta s è, per esempio, x-z+h(y+z-1)=0, ossia x+hy+(h-1)z-h=0, essendo h un parametro reale.

(d) L'intersezione della retta r con il piano p generico del fascio F è rappresentata dal sistema lineare quadrato 2x+z-3=0, 2y-3z+3=0, x+hy+(h-1)z-h=0. Detta A la matrice incompleta associata a tale sistema, risultando det(A)=10h-6 e quindi det(A) ≠0 per h≠3/5,si ha che l'intersezione è costituita da un punto per h≠3/5. Risolvendo il sistema per h≠3/5, si ha che tale punto coincide costantemente con P_1. Per h=3/5 il sistema diventa 2x+z-3=0, 2y-3z+3=0, x+(3/5)y+(-2/5)z-3/5=0. In questo caso, fissando, per esempio l'attenzione sul minore individuato dalle prime due righe e dalle prime due colonne di A, il cui determinante è 4≠0, si ha che il rango di A è 2 e, usando il teorema di Kronecker, si ha inoltre che il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta. Allora il sistema è compatibile anche per h=3/5 e per tale valore di h esso risulta equivalente, per esempio, al sistema costituito dalle prime due equazioni. Ma le prime due equazioni del sistema rappresentano r e quindi l'intersezione di r con p in questo caso coincide con la retta r, ossia la retta r giace su p. Resta da esaminare l'intersezione di r con il piano di equazione cartesiana y+z-1=0 che, pur appartenendo al fascio F, non può essere rappresentato con l'equazione cartesiana x-z+h(y+z-1)=0. In questo caso il sistema che rappresenta l'intersezione è 2x+z-3=0, 2y-3z+3=0, y+z-1=0. Tale sistema, risultando det(A)=10, ammette un'unica soluzione e quindi l'intersezione è costituita da un solo punto. Si trova subito che il punto in questione coincide con P_1.

(e) Essendo $a=1$, $b=-1$, $c=2$ coefficienti di giacitura di p_1, si ha che i versori normali a p_1 sono $(i-j+2k)/(\pm\sqrt{6})$. Il versore richiesto, dovendo essere oriento verso il basso e quindi secondo le z decrescenti, deve avere la terza coordinata $2/(\pm\sqrt{6})$ negativa. Tale condizione implica che a denominatore vada scelto il seno -. Allora il versore richiesto è $u_1= (-i+j-2k)/(\sqrt{6})$.

2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnata la funzione reale $b : V\times V\to R$, definita da

$$b(v,w)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2+2x_3y_3+x_3y_4+x_4y_3+2x_4y_4,$$

essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4$ e $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3+y_4v_4$.

(a) Verificare che b è un prodotto scalare.

(b) Posto $b(v,w)=\langle v,w\rangle$, scrivere l'espressione di $\langle v,w\rangle$ e $|v|^2$. rispetto alla base B_V.

(c) Determinare gli angoli convessi formati dalle coppie di vettori della base B_V.

(d) Determinare una base di V ortonormale rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$.

(e) Determinare il vettore $S_W(v_4)$, simmetrico del vettore v_4 nella simmetria ortogonale rispetto a W, essendo $W=\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)$.

Soluzione

(a) Risulta $b(v,w)={}^tXAY$, essendo ${}^tX=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, A la matrice quadrata avente come righe $A^{(1)}=(1,-1,0,0)$, $A^{(2)}=(-1,2,0,0)$, $A^{(3)}=(0,0,2,1)$, $A^{(4)}=(0,0,1,2)$ e ${}^tY=(y_1,y_2,y_3,y_4)$. Pertanto la funzione reale b è una forma bilineare reale. Essendo A una matrice simmetrica, la forma bilineare reale b è simmetrica. Risulta infine $\det(A_{(1,1)})=1>0$, $\det(A_{(2,2)})=1>0$, $\det(A_{(3,3)})=2>0$, $\det(A_{(4,4)})=3>0$ e quindi, per il criterio di positività di Hurewicz, la forma bilineare simmetrica reale b è definita positiva ossia è un prodotto scalare.

(b) Risulta $\langle v,w\rangle=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2+2x_3y_3+x_3y_4+x_4y_3+2x_4y_4$ e $|v|^2=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+2x_3^2+2x_3x_4+2x_4^2$.

(c) Si ha $\cos v_1\hat{}v_2=\langle v_1,v_2\rangle/(|v_1||v_2|)=-1/(\sqrt{2})\Rightarrow v_1\hat{}v_2=(3/4)\pi$, $\cos v_1\hat{}v_3=\langle v_1,v_3\rangle/(|v_1||v_3|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_1\hat{}v_4=\langle v_1,v_4\rangle/(|v_1||v_4|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_3=\langle v_2,v_3\rangle/(|v_2||v_3|)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_4=\langle v_2,v_4\rangle/(|v_2||v_4|)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_3\hat{}v_4=\langle v_3,v_4\rangle/(|v_3||v_4|)=1/2\Rightarrow v_3\hat{}v_4=\pi/3$.

(d) Per ottenere una base ortonormale applichiamo il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base B_V e normalizziamo. Tale procedimento dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3,w_4), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=v_1+v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=$ $v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,v_1+v_2\rangle/\langle v_1+v_2,v_1+v_2\rangle)(v_1+v_2)=v_3$, $w_4=v_4-(\langle v_4,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_4,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2-\langle v_4,w_3\rangle/\langle w_3,w_3\rangle)w_3=v_4-(\langle v_4,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_4,v_1+v_2\rangle/\langle v_1+v_2,v_1+v_2\rangle)(v_1+v_2)-(\langle v_4,v_3\rangle/\langle v_3,v_3\rangle)v_3= -(1/2)v_3+v_4$.

Essendo $|w_1|^2=1$, $|w_2|^2=1$, $|w_3|^2=2$, $|w_4|^2=3/2$, si ha che i vettori $u_1=w_1/|w_1|=v_1$, $u_2=w_2/|w_2|=v_1+v_2$, $u_3=w_3/|w_3|=(1/\sqrt{2})v_3$ e $u_4=w_4/|w_4|=-(\sqrt{2}/2\sqrt{3})v_3+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_4$ costituiscono una base ortonormale di V.

(e) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt è tale che $\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)=\mathrm{Span}(w_1,w_2,w_3)$. Ovviamente è anche $\mathrm{Span}(u_1,u_2,u_3)=\mathrm{Span}(w_1,w_2,w_3)$ e quindi (u_1,u_2,u_3) è una base ortonormale di $W=\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)$. Risulta allora $S_W(v_4)=2P_W(v_4)-v_4=2(\langle v_4,u_1\rangle u_1+\langle v_4,u_2\rangle u_2+\langle v_4,u_3\rangle u_3)-v_4=2(\langle v_4,v_1\rangle v_1+\langle v_4,v_1+v_2\rangle(v_1+v_2)+$ $\langle v_4,(1/\sqrt{2})v_3\rangle(1/\sqrt{2})v_3)-v_4=v_3-v_4$.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e soluzioni della prova scritta del 1-2-2010

1. Spazio euclideo ordinario E. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti A(1,1,0) e C(1,0,1) e la retta r:x+y-z+2=0, 2x-y-2z-1=0.

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano p passante per i punti A e C e per l'origine O.

(b) Determinare i punti B e D sul piano p in modo tale che ABCD sia un rombo di area $A=3^{1/2}$.

(c) Scrivere equazioni parametriche della retta s passante per il punto $P_0(1,1,1)$ e parallela alla retta r.

(d) Detto E il punto generico della retta s, calcolare il volume V del parallelepipedo individuato dai punti A,B,D,E.

(e) Dire in che modo varia il volume V al variare di E su s, giustificando geometricamente la risposta.

Soluzione

(a) L'equazione cartesiana del piano p, passante per i tre punti O, A e C, si ottiene annullando il determinante della matrice M avente come righe $M^{(1)}=(x,y,z)$, $M^{(2)}=(1,1,0)$, $M^{(3)}=(1,0,1)$. Si ha subito p:x-y-z=0.

(b) I punti B e D appartengono all'asse r′, sul piano p, del segmento AC. Tale asse può essere ottenuto come intersezione del piano p con il piano q passante per il punto medio M(1,1/2,1/2) di AC e perpendicolare ad AC. Essendo (0,-1,1) le coordinate del vettore di estremi A e C, risulta q:-(y-1/2)+(z-1/2)=0, ossia q:y-z=0. Allora equazioni cartesiane di r′ sono x-y-z=0, y-z=0. Da tali equazioni si traggono immediatamente le equazioni parametriche x=2t′, y=t′, z=t′, essendo t′ un parametro reale. Il punto P′ variabile su r′ ha coordinate cartesiane (2t′,t′,t′). La condizione sull'area si esprime imponendo che sia uguale a $3^{1/2}$ l'area del rombo individuato dai punti P,A ,C. Tenendo conto che tale rombo è un parallelogramma, si ha che la sua area è uguale a $(3(1-2t')^2)^{1/2}$ e quindi deve risultare $(3(1-2t')^2)^{1/2}=3^{1/2}$, ossia $3(1-2t')^2=3$, da cui si trae $t_1=0$ e $t_2=1$. Pertanto, a meno di uno scambio, i punti richiesti sono B(0,0,0), ossia l'origine O, e D(2,1,1).

(c) Parametri direttori di r sono l=1, m=0, n=1, quindi equazioni parametriche della retta s, passante per il punto P_0 e parallela alla retta r, sono x=1+t, y=1, z=1+t, essendo t un parametro reale.

(d) Le coordinate del punto E, variabile sulla retta s, sono (1+t,1,1+t). Allora, tenuto conto delle coordinate cartesiane dei punti A,B,D,E, si ha che il volume V del parallelepipedo individuato dai punti A,B,D,E è uguale al modulo del determinante della matrice N avente come righe $N^{(1)}=(-1,-1,0)$, $N^{(2)}=(1,0,1)$, $N^{(3)}=(t,0,1+t)$. Risulta subito $V=1$.

(e) Il volume V è costante perché è uguale a 1 per ogni punto E variabile su s. Tale risultato si giustifica osservando che, risultando la retta s parallela al piano p, ~~l'altezza~~ del parallelepipedo relativa alla base ABCD, contenuta nel piano p, non varia al variare del punto E su s.

2. Spazio vettoriale reale numerico $V=\mathbb{R}^3$. Sia assegnato l'endomorfismo $F_k;V\to V$, definito da $F_k(v)=(-x_1+(k+1)x_3,-x_1+x_2+kx_3,-x_1+2x_2-2x_3)$, essendo $v=(x_1,x_2,x_3)$ e k un parametro reale.

(a) Determinare la matrice A_k associata all'endomorfismo F_k rispetto alla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3)$ di $\mathbb{R}^3$ e scrivere equazioni cartesiane di F_k rispetto a tale base.

(b) Studiare l'endomorfismo F_k al variare di k in $\mathbb{R}$, determinandone nucleo ed immagine con rispettive basi e dimensioni e precisando per quali valori di k l'endomorfismo F_k è un automorfismo.

(c) Determinare il valore k_0 del parametro k per cui l'endomorfismo F_k ammette $\lambda=0$ come autovalore.

(d) Indicato con F l'endomorfismo corrispondente a k_0 e con A la matrice associata, verificare che F è diagonalizzabile e determinare una base $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ di V costituita da autovettori rispetto ad F.

(e) Detta A' la matrice associata ad F rispetto alla base B_V', determinare una matrice invertibile C tale che $A'=C^{-1}AC$.

Soluzione

(a) La matrice A_k, associata all'edomorfismo F_k rispetto alla base canonica di V ha come righe $A_K^{(1)}=(-1,0,k+1)$, $A_k^{(2)}=(-1,1,k)$ e $A_k^{(3)}=(-1,2,-2)$. Equazioni cartesiane di F_k sono $y_1=-x_1+(k+1)x_3$, $y_2=-x_1+x_2+kx_3$, $y_3=-x_1+2x_2-2x_3$.

(b) Equazioni cartesiane del nucleo $Ker(F_k)$ sono $-x_1+(k+1)x_3=0$, $-x_1+x_2+kx_3=0$, $-x_1+2x_2-2x_3=0$. La matrice associata al sistema lineare omogeneo quadrato che rappresenta $Ker(F_k)$ è A_k. Essendo $\det(A_k)=k+1$, si ha che tale sistema per $k\neq-1$ ammette la soluzione banale come unica soluzione e quindi è $Ker(F_k)=\{(0,0,0)\}$. Per $k=-1$, essendo non nullo, per esempio, il determinante del minore di A_k individuato dalle prime due righe e dalle prime due colonne, si ha che il rango di A_k è 2 e quindi il sistema è equivalente, per esempio, al sistema $-x_1=0$, $-x_1+x_2-x_3=0$. Allora per $k=-1$ è $Ker(F_k)=\{t(0,1,1)\mid t\in\mathbb{R}\}$. Dai risultati ottenuti si ha che, per $k\neq-1$, $Ker(F_k)$ non ha basi e quindi la sua dimensione è 0; inoltre dal teorema sulle dimensioni si trae che $\dim(Im(F_k))=\dim(V)-\dim(Ker(F_k))=\dim(V)$ e quindi è $Im(F_K)=V$ ed una base di $im(F_k)$ è, per esempio, la base canonica di V. Sempre per $k \neq -1$, essendo $Ker(F_k)=\{(0,0,0)\}$ e $Im(F_k)=V$, l'endomorfismo F_k è iniettivo e surgettivo e quindi è un automorfismo. Veniamo adesso al caso $k=-1$. Essendo $Ker(F_k)=\{t(0,1,1) \mid t \in \boldsymbol{R}\}$, una base di $Ker(F_k)$ è costituita dal solo vettore $(0,1,1)$ e $\dim(Ker(F_k))=1$. Dal teorema sulle dimensioni risulta allora $\dim(Im(F_k))=3-1=2$. Essendo i vettori aventi come colonne delle componenti le colonne della matrice A_k un sistema di generatori di $Im(F_k)$, si ha che una base di $Im(F_k)$ è, per esempio, quella costituita dai vettori corrispondenti alle prime due colonne di A_k. In questo caso l'endomorfismo F_k non è né iniettivo né surgettivo e quindi, in particolare, non è un automorfismo.

(c) Ricordando che nell'equazione caratteristica di un endomorfismo il termine noto è uguale al determinante della matrice associata all'endomorfismo, si ha che il valore k_0 del parametro k per cui F_k ammette $\lambda=0$ come autovalore coincide con il valore di k per cui si annulla tale determinante. Ma nel nostro caso è $\det(A_k)=k+1$ e quindi si ha $k_0=-1$.

(d) L'equazione caratteristica di F è $-\lambda(\lambda+1)^2=0$, onde gli autovalori di F sono $\lambda_1=-1$, con molteplicità algebrica $a_1=2$, e $\lambda_2=0$, con molteplicità algebrica $a_2=1$. L'autospazio V_{-1}, associato allautovalore $\lambda_1=-1$, ha equazioni cartesiane $-x_1+2x_2-x_3=0$, $-x_1+2x_2-x_3=0$, ossia semplicemente $-x_1+2x_2-x_3=0$ e quindi è $V_{-1}=\{t_1(2,1,0)+t_2(-1,0,1) \mid t_1,t_2 \in \boldsymbol{R}\}$. Allora una base di V_{-1} è, per esempio, quella costituita dagli autovettori $v_1'=(2,1,0)$ e $v_2'=(-1,0,1)$, onde è $\dim(V_{-1})=2$ e quindi la molteplicità geometrica di $\lambda_1=-1$ è $g_1=2$. Osservato che risulta $V_0=Ker(F)=Ker(F_0)$, si ha che una base di V_0 è, per esempio, quella costituita dal solo autovettore $v_3'=(0,1,1)$ e risulta $\dim(V_0)=1$, onde la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_2=0$ è $g_2=1$. Allora, essendo $a_1+a_2=3=\dim(V)$ e $g_1=a_1$, $g_2=a_2$, si ha che l'endomorfismo F è diagonalizzabile. Una base di autovettori di V è $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$, essendo v_1',v_2',v_3' gli autovettori appena determinati.

(e) La matrice associata ad F rispetto alla base di autovettori B_V' è la matrice diagonale A' avente come elementi sulla diagonale principale -1, -1, 0. Una matrice invertiile C tale che $A'=C^{-1}AC$ è, per esempio, la matrice che ha come colonne le colonne delle componenti dei vettori v_1',v_2',v_3', ossia la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base canonica di V alla base B_V'.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e soluzioni della prova scritta del 16-2-2010

1. Spazio euclideo ordinario E. RC(O;i,j,k). Siano assegnati il piano p:x-2y+z-1=0, il punto $P_0(0,0,1)\in p$ e le rette r_1:x=0, y+z=0 ed r_2:x+y+z-3=0, x-y=0.

(a) Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per P_0 e perpendicolare al piano p.

(b) Scrivere equazioni cartesiane del fascio *F* di rette, sul piano p, avente come centro il punto P_0.

(c) Verificare che le rette r_1 ed r_2 sono sghembe.

(d) Scrivere equazioni cartesiane della retta r incidente e perpendicolare alle rette r_1 ed r_2.

(e) Detta s la retta generica del fascio *F*, studiare la mutua posizione delle rette r ed s al variare di s in *F*.

Soluzione

(a) La retta richiesta, dovendo essere perpendicolare al piano p, ha parametri direttori proporzionali ai coefficienti di giacitura di p, quindi sue equazioni in forma di rapporti uguali sono x/1 = y/(-2) = (z-1)/1 e sue equazioni cartesiane sono x-z+1=0, y+2z-2=0.

(b) Il fascio *F* di rette, su p, di centro P_0 può essere ottenuto come intersezione con il piano p del fascio di piani avente come asse la retta di cui al punto (a). Un'equazione cartesiana di tale fascio di piani è, per esempio, x-z+1+h(y+2z-2)=0, essendo h un parametro reale. Allora equazioni cartesiane del fascio *F* di rette sono x-z+1+h(y+2z-2)=0, x-2y+z-1=0, ossia x+hy+(2h-1)z+1-2h=0, x-2y+z-1=0.

(c) Si verifica facilmente che, considerata la matrice del quarto ordine A avente come righe $A^{(1)}$=(1,0,0,0), $A^{(2)}$=(0,1,1,0), $A^{(3)}$=(1,1,1,-3), $A^{(4)}$=(1,-1,0,0), risulta det(A)=3 e quindi, essendo det(A)≠0, le rette r_1 ed r_2 sono sghembe.

(d) Iniziamo con l'osservare che le rette r_1 ed r_2 passano, per esempio, rispettivamente per i punti $P_1(0,0,0)\equiv O$ e $P_2(1,1,1)$. Inoltre si ha subito che (l_1,m_1,n_1)=(0,1,-1) sono parametri direttori della retta r_1 e (l_2,m_2,n_2)=(1,1,-2) sono parametri direttori della retta r_2. Detti w_1 e w_2 i vettori direttori, rispettivamente di r_1 e r_2, aventi come coordinate tali terne di parametri direttori, si ha che un vettore direttore della retta r incidente e perpendicolare alle rette r_1 e r_2 è $w=w_1\wedge w_2$=-i-j-k onde parametri direttori di r sono (-1,-1,-1). Allora, tenuto presente che la retta r può essere ottenuta come intersezione del piano p_1 passante per P_1 ed avente come giacitura Span(w_1,w) e del piano p_2 passante per P_2 ed avente come giacitura Span(w_2,w), risultando p_1:2x-y-z=0 e p_2:x-y=0 si ha che equazioni cartesiane di r sono 2x-y-z=0, x-y=0.

(e) La matrice del quarto ordine A avente come righe $A^{(1)}=(2,-1,-1,0)$, $A^{(2)}=(1,-1,0,0)$, $A^{(3)}=(1,h,2h-1,1-2h)$, $A^{(4)}=(1,-2,1,-1)$, costruita a partire dalle equazioni cartesiane della retta r e dalle equazioni cartesiane della retta generica s del fascio F, ha determinante uguale a 3h. Pertanto le rette r ed s sono sghembe per $h\neq0$ e incidenti per $h=0$. Per $h=0$ equazioni cartesiane di s sono $x-z+1=0$, $x-2y+z-1=0$. La retta s ha allora parametri direttori $(l,m,n)=(1,1,1)$ e quindi tale retta, avendo parametri direttori opposti dei parametri direttori della retta r, è parallela alla retta r. Osservato poi che il punto P_1 appartiene ad r ma non ad s, si ha che r ed s non coincidono e quindi sono rette parallele e disgiunte. Resta da esaminare il caso in cui la retta s coincide con la retta di equazioni cartesiane $y+2z-2=0$, $x-2y+z-1=0$, che, pur appartenendo al fascio F, non può essere rappresentata dalle equazioni cartesiane $x-z+1+h(y+2z-2)=0$, $x-2y+z-1=0$. La matrice del quarto ordine costruita come sopra a partire dalle equazioni cartesiane di r ed s in questo caso ha determinante uguale a 3 e quindi le rette r ed s sono sghembe.

2. Piano vettoriale euclideo V. Base ortonormale $B=(v_1,v_2)$ Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\to V$, definito da $F(v)=(x_1-3x_2)v_1+(-3x_1+x_2)v_2$, essendo $v=x_1v_1+x_2v_2$.

(a) Verificare che l'endomorfismo F è simmetrico.

(b) Determinare una base ortonormale di V costituita da autovettori rispetto ad F.

(c) Scrivere l'espressione di $b(v,w)$ rispetto alla base ortonormale B, essendo $b:V\times V\to \boldsymbol{R}$ la forma bilineare simmetrica reale associata all'endomorfismo simmetrico F e $w=y_1v_1+y_2v_2$.

(d) Scrivere la forma canonica metrica e la forma canonica affine della forma bilineare simmetrica reale b, precisando le basi a cui si fa riferimento.

(e) Scrivere la forma canonica affine della forma quadratica reale associata a b e determinare, se esiste, una base di V costituita da vettori isotropi rispetto a b.

Soluzione

(a) la matrice A associata all'endomorfismo F rispetto alla base B ha come righe $A^{(1)}=(1,-3)$ e $A^{(2)}=(-3,1)$. Essendo A una matrice simmetrica e B una base ortonormale si ha che l'endomorfismo F è simmetrico.

(b) L'equazione caratteristica di F è $(1-\lambda)^2-9=0$ e quindi gli autovalori di F sono $\lambda_1=4$ e $\lambda_2=-2$. L'autospazio V_4, associato all'autovalore $\lambda_1=4$, ha equazioni cartesiane $-3x_1-3x_2=0$, $-3x_1-3x_2=0$ e quindi risulta $V_4=\{t(v_1-v_2)\}_{t\in\boldsymbol{R}}$. Risulta poi $V_{-2}:3x_1-3x_2=0$, $-3x_1+3x_2=0$ e quindi $V_{-2}=\{t(v_1+v_2)\}_{t\in\boldsymbol{R}}$. Una base ortonormale di V_4 è costituita, per esempio, dal solo autovettore unitario $v_1'=(1/\sqrt{2})v_1-(1/\sqrt{2})v_2$ mentre una base ortonormale di V_{-2} è costituita, per esempio, dal solo autovettore unitario $v_2'=(1/\sqrt{2})v_1+(1/\sqrt{2})v_2$. Gli autovettori v_1' e v_2', essendo associati ad autovalori distinti, sono ortogonali e quindi $B'=(v_1',v_2')$ è una base del tipo richiesto.

(c) La matrice associata alla forma bilineare simmetrica reale b:$V\times V\to \boldsymbol{R}$, rispetto alla base ortonormale B, coincide con la matrice simmetrica A associata all'endomorfismo simmetrico F rispetto alla stessa base. Pertanto risulta $b(v,w)=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+x_2y_2$.

(d) Essendo $B'=(v_1',v_2')$ una base ortonormale di V costituita da autovettori rispetto ad F, si ha che rispetto a tale base la forma bilineare simmetrica reale b, associata all'endomorfismo simmetrico F, assume la seguente forma canonica metrica: $b(v,w)=4x_1'y_1'-2x_2'y_2'$, dove (x_1',x_2') e $(y_1'y_2')$ sono le coordinate rispettivamente di v e w nella base B'. Considerata la base ortogonale $B''=(v_1'',v_2'')$, essendo $v_1''=(1/2)v_1'=(1/2\sqrt{2})v_1-(1/2\sqrt{2})v_2$ e $v_2''=(1/\sqrt{2})v_1'=(1/2)v_1+(1/2)v_2$, si ha che rispetto a tale base la b assume la seguente forma canonica affine: $b(v,w)=x_1''y_1''-x_2''y_2''$, dove (x_1'',x_2'') e $(y_1''y_2'')$ sono le coordinate rispettivamente di v e w nella base B''.

(e) La forma canonica affine della forma quadratica reale q:$V\to \boldsymbol{R}$ associata a b è data da $q(v)=(x_1'')^2-(x_2'')^2$, essendo come sopra (x_1'',x_2'') le coordinate di v rispetto alla base B''. I vettori isotropi rispetto a b si ottengono ponendo $q(v)=0$. Pertanto l'equazione cartesiana dell'insieme dei vettori isotropi è $(x_1'')^2-(x_2'')^2=0$. Risolvendo tale equazione, si ha che una coppia di vettori isotropi indipendenti è data, per esempio, da $w_1(x_1''=1,x_2''=1)$ e $w_2(x_1''=1,x_2''=-1)$. Essendo 2 la dimensione di V, si ha che tale coppia di vettori isotropi è una base di V.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e soluzioni della prova scritta del 5-7-2010

1. Spazio affine ordinario. RA(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $P_0(1,0,1)$, $P_1(2,h,0)$ e $P_2(0,-2h-1,-2h)$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare il valore del parametro h in corrispondenza del quale i punti P_0, P_1, P_2 risultino allineati.

(b) Scrivere equazioni cartesiane della retta r generata dai tre punti allineati P_0, P_1, P_2 di cui al quesito (a).

(c) Scrivere equazioni cartesiane della retta s passante per il punto $Q_0(-1,1,-1)$ e complanare con le rette s_1:y=0, z+2=0 ed s_2:x+2=0, y-2=0.

(d) Verificare che le rette r ed s sono complanari.

(e) Scrivere l'equazione cartesiana del piano p contenente le rette r ed s.

Soluzione

(a) Le coordinate del vettore individuato dai punti P_0 e P_1 sono (1,h,-1) mentre quelle del vettore individuato dai punti P_0 e P_2 sono (-1,-2h-1,-2h-1). Il rango della matrice avente come colonne le colonne delle coordinate di tali vettori è 2 per h ›-1 e 1 per h=-1. Pertanto i punti P_0, P_1, P_2 risultano allineati per h=-1.

(b) La retta r generata dai punti allineati $P_0(1,0,1)$, $P_1(2,-1,0)$ e $P_2(0,1,2)$, di cui al quesito (a), essendo i punti $P_0(1,0,1)$, $P_1(2,-1,0)$ distinti, può essere ottenuta come retta passante per $P_0(1,0,1)$ e $P_1(2,-1,0)$. Si ha allora che equazioni in forma di rapporti uguali di r sono

$$(x-1)/1=y/(-1)=(z-1)/(-1)$$

ed equazioni cartesiane di r sono, per esempio, x+z-2=0, y-z+1=0.

(c) La retta s può essere ottenuta come intersezione del piano p_1, appartenente al fascio F_1 di piani di asse la retta s_1 e passante per il punto Q_0, e del piano p_2, appartenente al fascio F_2 di piani di asse la retta s_2 e passante per il punto Q_0. Risulta F_1 :$y+k_1(z+2)=0$. Il passaggio per il punto Q_0 dà $1+k_1(-1+2)=0$, ossia $k_1=-1$, e quindi risulta p_1:y-z-2=0. Si ha poi F_2 :$x+2+k_2(y-2)=0$. Il passaggio per il punto Q_0 dà $-1+2+k_2(1-2)=0$, ovvero $k_2=1$, e quindi si ottiene p_2:x+y=0. Si ha allora s:y-z-2=0, x+y=0.

(d) Le rette r ed s hanno entrambe parametri direttori (1,-1,-1), onde sono parallele e quindi complanari.

(e) Le rette parallele r ed s sono distinte perché, per esempio, il punto Q_0 appartiene ad s ma non ad r. Allora il piano contenente r ed s può essere ottenuto come piano passante per P_0 ed avente come giacitura $W=Span(w_1,w_2)$, essendo w_1 un vettore direttore di r, per esempio

$w_1(1,-1,-1)$, e w_2 un vettore individuato da un punto appartenente ad r, per esempio P_0, e da un punto appartenente ad s, per esempio Q_0. Risultando $w_2(-2,1,-2)$, si ha che l'equazione cartesiana del piano p può essere ottenuta uguagliando a 0 il determinante della matrice quadrata avente come righe, rispettivamente, $(x+1,y-1,z+1)$, $(1,-1,-1)$ e $(-2,1,-2)$. Risulta allora $p:3(x+1)+4(y-1)-(z+1)=0$, ossia $p:3x+4y-z-2=0$.

2. Spazio vettoriale euclideo numerico $V=\mathbb{R}^4$. Sia $U=\mathrm{Span}(u)$, essendo $u=(1,-1,-1,0)$, ed $F:V\rightarrow V$ l'endomorfismo di V che associa ad un vettore $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ la sua proiezione ortogonale su U.

(a) Scrivere l'espressione di $F(v)$.

(b) Verificare che l'endomorfismo F è simmetrico.

(c) Determinare la matrice A associata ad F rispetto alla base canonica $B=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ di $\mathbb{R}^4$ e calcolare gli autovalori di F.

(d) Determinare una base ortonormale di V costituita da autovettori rispetto ad F.

(e) Determinare una matrice ortogonale C tale che ${}^tCAC$ sia una matrice ortogonale.

Soluzione

(a) Risulta $F(v)=(\langle v,u\rangle/\langle u,u\rangle)u=((x_1-x_2-x_3)/3)(1,-1,-1,0)$.

(b) Per ogni coppia di vettori $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ e $w=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ risulta $\langle F(v),w\rangle=\langle(\langle v,u\rangle/\langle u,u\rangle)u),w\rangle=(\langle v,u\rangle/\langle u,u\rangle)\langle u,w\rangle$ nonché $\langle v,F(w)\rangle=\langle v,(\langle w,u\rangle/\langle u,u\rangle)u\rangle=(\langle w,u\rangle/\langle u,u\rangle)\langle v,u\rangle$. Allora, essendo $\langle w,u\rangle=\langle u,w\rangle$, si ha che $\langle F(v),w\rangle=\langle v,F(w)\rangle$ e quindi l'endomorfismo F è simmetrico.

(c) Risulta $F(v_1)=(1/3,-1/3,-1/3,0)$, $F(v_2)=(-1/3,1/3,1/3,0)$, $F(v_3)=(-1/3,1/3,1/3,0)$, $F(v_4)=(0,0,0,0)$, onde la matrice A associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ è la matrice avente come righe $A^{(1)}=(1/3,-1/3,-1/3,0)$, $A^{(2)}=(-1/3,1/3,1/3,0)$, $A^{(3)}=(-1/3,1/3,1/3,0)$, $A^{(4)}=(0,0,0,0)$. Notiamo che la matrice A è simmetrica d'accordo col fatto che l'endomorfismo F è simmetrico e la base canonica è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard. L'equazione caratteristica di F è $\det(A-\lambda I)=0$, ossia $-\lambda(-\lambda^3+\lambda^2)=0$, ovvero $\lambda^3(\lambda-1)=0$, e quindi gli autovalori di F sono $\lambda_1=0$, con molteplicità algebrica $a_1=3$, e $\lambda_2=1$, con molteplicità algebrica $a_2=1$.

(d) L'autospazio V_0, associato all'autovalore $\lambda_1=0$, ha equazioni cartesiane $(1/3)x_1-(1/3)x_2-(1/3)x_3=0$, $-(1/3)x_1+(1/3)x_2+(1/3)x_3=0$, $-(1/3)x_1+(1/3)x_2+(1/3)x_3=0$. Il sistema che rappresenta V_0 è equivalente all'equazione $x_1-x_2-x_3=0$ e quindi risulta $V_0=\{(t_1+t_2,t_1,t_2,t_3) \mid t_1,t_2,t_3\in\mathbb{R}\}$. Allora una base di V_0 è costituita dagli autovettori $w_1=(1,1,0,0)$, $w_2=(1,0,1,0)$, $w_3=(0,0,0,1)$. Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base (w_1,w_2,w_3) di V_0, si ha la base ortogonale di V_0 costituita dagli autovettori $u_1=w_1=(1,1,0,0)$, $u_2=w_2-(\langle w_2,u_1\rangle/\langle u_1,u_1\rangle)u_1=(1,0,1,0)-(1/2)(1,1,0,0)=(1/2,-1/2,1,0)$,

$u_3=w_3-(\langle w_3,u_1\rangle/\langle u_1,u_1\rangle)u_1-(\langle w_3,u_2\rangle/\langle u_2,u_2\rangle)u_2=(0,0,0,1)$.
Normalizzando i vettori u_1, u_2, u_3, si ha la base ortonormale di V_0 costituita dagli autovettori unitari $v_1'=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0,0)$, $v_2'=(/\sqrt{2}/(2\sqrt{3}),-\sqrt{2}/(2\sqrt{3}),\sqrt{2}/\sqrt{3},0)$, $v_3'=(0,0,0,1)$.
Si ha poi V_1: $-(2/3)x_1-(1/3)x_2-(1/3)x_3=0$, $-(1/3)x_1-(2/3)x_2+(1/3)x_3=0$, $-(1/3)x_1+(1/3)x_2-(2/3)x_3=0$, $-x_4=0$ e quindi $V_1=\{(t,-t,-t,0)\mid t\in R\}$. Una base ortonormale di V_1 è costituita dal solo autovettore unitario $v_4'=(1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},0)$. Allora $B'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ è una base di V del tipo richiesto. Una matrice ortogonale C tale che ${}^tCAC$ sia una matrice ortogonale è, per esempio, la matrice che ha come colonne le colonne delle coordinate degli autovettori unitari v_1', v_2', v_3', v_4' rispetto alla base canonica B, ossia la matrice che ha come righe $C^{(1)}=(1/\sqrt{2},\sqrt{2}/(2\sqrt{3}),0,1/\sqrt{3})$, $C^{(2)}=(1/\sqrt{2},-\sqrt{2}/(2\sqrt{3}),0,-1/\sqrt{3})$, $C^{(3)}=(0,\sqrt{2}/\sqrt{3},0,-1/\sqrt{3})$, $C^{(4)}=(0,0,1,0)$.

ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Prova scritta del 6-9-2010

1. Spazio euclideo ordinario E_3. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i vettori geometrici w_1=hi-j+k, w_2=hi+j-hk, w_3=(2h+1)i-2j+k, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare, se esiste, un valore del parametro h in corrispondenza del quale i vettori geometrici w_1, w_2, w_3 risultino linearmente dipendenti.

(b) Detto W il sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V dei vettori geometrici, generato dai vettori geometrici w_1, w_2, w_3 di cui al quesito (a), verificare che W è un piano vettoriale e scrivere l'equazione cartesiana di W.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano p passante per il punto P_0(-1,-1,2) ed avente come giacitura W.

(d) Decomporre il vettore geometrico v=2i+j+k nella somma di due vettori geometrici v′ e v″ rispettivamente normale e parallelo al piano p.

(e) Determinare gli angoli convessi che la retta s passante per il punto P_0, perpendicolare al piano p ed orientata verso il basso forma con gli assi coordinati.

Soluzione

(a) La matrice quadrata che ha come colonne le colonne delle coordinate dei vettori geometrici w_1, w_2, w_3 ha determinante –h-1 e quindi tali vettori risultano linearmente dipendenti per h=-1.
(b) Per h=-1, risultano linearmente indipendenti, per esempio, i vettori geometrici w_1 e w_2. Allora il sottospazio vettoriale W, generato dai vettori geometrici w_1, w_2, w_3, ammette come base i vettori geometrici w_1 e w_2 onde ha dimensione 2 ed è pertanto un piano vettoriale. Sviluppando il determinante formale della matrice quadrata che ha come prime colonne le colonne delle coordinate di w_1 e w_2 e come terza colonna la colonna delle incognite x, y e z, si ha che l'equazione cartesiana di W è: x+z=0.
(c) L'equazione cartesiana del piano p passante per il punto P_0(-1,-1,2) ed avente come giacitura W: x+z=0 è: x+1+z-2=0, ossia x+z-1=0.
(d) Un vettore geometrico generico normale al piano p è ρ(i+k), essendo ρ un parametro reale. Un vettore geometrico generico li+mj+nk risulta parallelo al piano p se risulta l+n=0. Le condizioni richieste sul vettore geometrico v danno allora 2=ρ+l, 1=m, 1=ρ+n, l+n=0. Risolvendo il sistema nelle incognite ρ, l, m ed n, si ha immediatamente ρ=3/2, l=1/2, m=1, n=-1/2 e quindi i vettori geometrici richiesti sono v′=(3/2)(i+k) e v″=(1/2)i+j-(1/2)k.

(e) Parametri direttori di una retta (non orientata) perpendicolare al piano p: $x+z-1=0$ sono, per esempio, i coefficienti di giacitura $(1,0,1)$ di tale piano e quindi i suoi versori direttori sono $(i+k)/\pm\sqrt{2}$. Tenendo presente che la la terza coordinata del versore direttore della retta s deve essere negativa perché tale retta è orientata verso il basso, nell'ultima espressione va scelto il segno -. In definitiva il versore direttore della retta orientata s è: $(i+k)/-\sqrt{2}$. Allora i coseni degli angoli convessi che la retta orientata s forma rispettivamente con l'asse x, con l'asse y e con l'asse z sono $1/-\sqrt{2}$, 0 e $1/-\sqrt{2}$. Pertanto gli angoli convessi che la retta orientata s forma rispettivamente con tali assi sono $(3/4)\pi$, $\pi/2$ e $(3/4)\pi$.

2. Piano euclideo ordinario $\mathbf{E}_2$. RC(O;i,j). Sia assegnata l'applicazione

$$f: \mathbf{E}_2 \to \mathbf{E}_2$$

di equazioni cartesiane

$$x'=(1/2)x+hy-1, \quad y'=hx-(1/2)y-\sqrt{3},$$

essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali l'applicazione f sia un'affinità di $\mathbf{E}_2$.

(b) Dire quali delle affinità di cui al punto precedente sono isometrie inverse di $\mathbf{E}_2$.

(c) Dire quali delle isometrie inverse di cui al punto (b) sono riflessioni ossia simmetrie ortogonali rispetto ad un asse e scrivere l'equazione cartesiana di tale asse.

(d) Dire quali delle isometrie inverse di cui al punto (b) sono glissoriflessioni.

(e) Per ogni riflessione f di cui al punto (c), determinare l'equazione cartesiana della retta $r'=f(r)$, essendo r l'asse x.

Soluzione

(a) Le equazioni cartesiane di f sono del tipo $X'=AX+B$, essendo $X'={}^t(x',y')$, A la matrice quadrata avente come righe $A^{(1)}=(1/2,h)$ ed $A^{(2)}=(h,-1/2)$, $X={}^t(x,y)$ e $B={}^t(-1,-\sqrt{3})$. Pertanto l'applicazione f è un'affinità di $\mathbf{E}_2$ se e soltanto se la matrice quadrata A ha determinante non nullo. Allora, essendo $\det(A)=-h^2-1/4\neq 0$ $\forall h\in \boldsymbol{R}$, si ha che f è un'affinità $\forall h\in \boldsymbol{R}$.

(b) Un'affinità f di $\mathbf{E}_2$, di cui al punto (a), è un'isometria di $\mathbf{E}_2$ se e soltanto se la matrice A è ortogonale. La condizione di ortogonalità per la matrice A è espressa da ${}^tAA=I$, ossia, stante la simmetria della matrice A, da $A^2=I$. Tale condizione risulta soddisfatta se e soltanto se è $h^2+1/4=1$, ovvero se e soltanto se è $h=\pm\sqrt{3}/2$. Osserviamo che, essendo $\det(A)=-1$ per entrambi i valori di h appena ottenuti, in tutti e due i casi l'isometria f è inversa.

(c) Per sapere per quali valori di h l'isometria inversa f, di cui al punto

(b) è una riflessione, ossia una simmetria ortogonale rispetto ad un asse, verifichiamo per quali valori di h esistono punti fissi o uniti (Teorema di Chasles). Per $h=-\sqrt{3}/2$, equazioni dei punti fissi di f sono: $x=(1/2)x-(\sqrt{3}/2)y-1$, $y=-(\sqrt{3}/2)x-(1/2)y-\sqrt{3}$, ossia $x+(\sqrt{3})y+2=0$, $(\sqrt{3})x+3y+2\sqrt{3}=0$. Tale sistema è equivalente alla sola equazione $x+(\sqrt{3})y+2=0$ e quindi è compatibile, onde esistono punti fissi e di conseguenza l'isometria inversa f è una simmetria ortogonale rispetto ad un asse. L'asse di simmetria, essendo il luogo dei punti fissi, ha equazione cartesiana $(\sqrt{3})x+3y+2\sqrt{3}=0$. Per $h=\sqrt{3}/2$, equazioni dei punti fissi di f sono $x=(1/2)x+(\sqrt{3}/2)y-1$, $y=(\sqrt{3}/2)x-(1/2)y-\sqrt{3}$, ossia $x-(\sqrt{3})y+2=0$, $(\sqrt{3})x-3y-2\sqrt{3}=0$. L'ultimo sistema è incompatibile perché i ranghi della matrice incompleta e della matrice completa sono diversi, essendo uguali rispettivamente a 1 e a 2. Allora per $h=\sqrt{3}/2$ non esistono punti fissi e quindi l'isometria inversa f non è una simmetria ortogonale rispetto ad un asse.

(d) Ricordando che per il Teorema di Chasles un'isometria inversa priva di punti fissi è una glissoriflessione, si ha che l'isometria inversa f corrispondente al valore $\sqrt{3}/2$ del parametro h, essendo priva di punti fissi (come verificato al punto precedente), è una glissoriflessione.

(e) L'applicazione inversa di una riflessione coincide con la riflessione stessa, quindi, essendo $x'=(1/2)x-(\sqrt{3}/2)y-1$, $y'=-(\sqrt{3}/2)x-(1/2)y-\sqrt{3}$ equazioni cartesiane della riflessione f di cui al punto (c), equazioni cartesiane di f^{-1} sono $x=(1/2)x'-(\sqrt{3}/2)y'-1$, $y=-(\sqrt{3}/2)x'-(1/2)y'-\sqrt{3}$. Ma l'asse x ha equazione cartesiana $y=0$ e quindi la retta $r'=f(r)$ ha equazione cartesiana $-(\sqrt{3}/2)x'-(1/2)y'-\sqrt{3}=0$. Tornando a indicare con x e y le incognite, l'ultima equazione diventa $-(\sqrt{3}/2)x-(1/2)y-\sqrt{3}=0$, ovvero $\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3}=0$.