RENZO MAZZOCCO

CORSO DI GEOMETRIA
(PER FISICI)

RACCOLTA DEGLI ESERCIZI D'ESONERO E D'ESAME DI GEOMETRIA ANALITICA DEGLI ANNI ACCADEMICI 2004-2005 E 2006-2007

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO"
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
Gennaio 2011

Geometria Analitica (A-Z)
Soluzioni della prova in itinere del 15.11.2004

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Spazio euclideo, RC $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Assegnati i vettori $\vec{v}_1 = OP_1, \vec{v}_2 = OP_2, \vec{v}_3 = OP_3$, essendo $P_1(1,2,1), P_2(1,1,0), P_3(0,1,-1)$, verificare che essi costituiscono una base B dello spazio vettoriale V_0 dei vettori geometrici. Determinare una base ortonormale di V_0 applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base B. Determinare inoltre la proiezione ortogonale $P_W(\vec{v})$ del vettore $\vec{v} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ sul sottospazio vettoriale $W = \text{Span}\,(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$.

Soluzione. La matrice che ha per colonne le coordinate di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha determinante uguale a $2 \neq 0$, e quindi i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sono linearmente indipendenti e costituiscono una base B di V_0. Il procedimento di Gram-Schmidt applicato alla base B dà la base ortogonale costituita dai vettori

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = \vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{<\vec{v}_2,\vec{w}_1>}{<\vec{w}_1,\vec{w}_1>}\vec{w}_1 = \vec{i}+\vec{j}-\frac{3}{6}(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}) = \frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{k}$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{<\vec{v}_3,\vec{w}_1>}{<\vec{w}_1,\vec{w}_1>}\vec{w}_1 - \frac{<\vec{v}_3,\vec{w}_2>}{<\vec{w}_2,\vec{w}_2>}\vec{w}_2 =$$

$$= \vec{j}-\vec{k}-\frac{1}{6}(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}) - (\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{k}) = -\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}.$$

Normalizzando questa base ortogonale si ha la base ortonormale

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k},$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{k}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k},$$

$$\vec{u}_3 = \frac{-\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}-\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}.$$

Essendo $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ una base ortonormale di $W = \text{Span}\,(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$, risulta:

$$P_W(\vec{v}) = <\vec{v},\vec{u}_1>\vec{u}_1 + <\vec{v},\vec{u}_2>\vec{u}_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}(\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k})+\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}) = \frac{4}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}.$$

Esercizio 2. **Piano euclideo**, $RC(O,\vec{i},\vec{j})$. Assegnati i punti $A(1,3)$ e $C(3,-1)$, determinare i punti B e D in modo tale che il quadrilatero $ABCD$ sia un rombo di vertici opposti A e C e di area 20.

Soluzione. Detto s l'asse del segmento AC si ha anzitutto che il rombo richiesto deve avere i vertici B e D su s. Inoltre i punti B e D devono essere tali che i triangoli ACB e ACD abbiano entrambi area $\frac{20}{2} = 10$. L'asse s è la retta passante per $M(2,1)$, punto medio del segmento AC, e ortogonale al vettore $OC - OA = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, quindi ha equazione cartesiana $2(x-2) - 4(y-1) = 0$, ossia $x - 2y = 0$. Equazioni parametriche di s sono $x = 2t, y = t, t \in \mathbf{R}$, quindi un punto generico di s è $P(2t,t)$. I punti B e D si ottengono imponendo che l'area del triangolo ACP sia uguale a 10. Risulta che

$$Area(ACP) = \frac{1}{2}|\ det\ \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2t-1 & t-3 \end{pmatrix}| = \frac{|10t-10|}{2}.$$

La condizione sull'area dà $\frac{|10t-10|}{2} = 10$, e quindi $t = -1, 3$. I punti B e D hanno allora rispettivamente coordinate cartesiane $(-2,-1)$ e $(6,3)$.

Esercizio 3. **Spazio euclideo**, $RC(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Assegnati il piano $p : x - y + z = 0$ e la retta $r : x + y - z = 0, 2x + y = 0$, determinare la retta r' passante per $P_0'(3,1,2)$, parallela a p e perpendicolare a r. Dopo aver verificato che le rette r e r' sono sghembe, determinare la distanza $d(r,r')$ tra tali rette.

Soluzione. Parametri di giacitura di p sono $(a,b,c) = (1,-1,1)$. Parametri direttori di r sono $l = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, $m =$ - $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2$, $n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -1$. Detti (l', m', n') i parametri direttori di r', le condizioni richieste su r' danno $l' - m' + n' = 0$, $l' - 2m' - n' = 0$ e quindi $l' = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 3$, $m' =$ - $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$, $n' = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -1$. La retta r' ha allora equazioni in forma di rapporti uguali

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

ed equazioni parametriche $x = 3 + 3t, y = 1 + 2t, z = 2 - t, t \in \mathbf{R}$. Essendo r e r' perpendicolari e quindi non paralleli, per verificare che r e r' sono sghembe è sufficiente far vedere che $r \cap r' = \emptyset$. Il punto generico di r' è $P(3+3t, 1+2t, 2-t)$. Tale punto appartiene ad r se le sue coordinate soddisfano le equazioni cartesiane di r. Andando a sostituire nelle equazioni di r, si ottiene il sistema incompatibile $6t + 2 = 0, 8t + 7 = 0$.

Per ottenere la distanza $d(r,r')$ consideriamo il piano p' contenente r' e parallelo a r. Tale piano coincide con il piano per P_0' e parallelo ad r e r'. Risulta allora:

$$p' :\ det \begin{pmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 0,$$

ossia $2x - y + 4z - 13 = 0$. La distanza $d(r,r')$ uguaglia la distanza di uno qualunque dei punti di r, p. es. O dal piano p'. Risulta dunque $d(r,r') = d(O,p') = \frac{13}{\sqrt{21}}$.

Esercizio 4. Spazio vettoriale numerico $V = \mathbf{R}^4$. Sia assegnata la forma quadratica $q : V \to \mathbf{R}$ tale che

$$q(\vec{v}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4,$$

essendo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$.

i) Determinare l'espressione della forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbf{R}$ associata alla forma quadratica q.

ii) Determinare una base opportuna di V rispetto alla quale q abbia espressione canonica.

iii) Scrivere l'espressione canonica di q e dedurne gli indici di positività, negatività e nullità di q.

Soluzione. i) La forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbf{R}$ polare di q, è data da:

$$b(\vec{v}, \vec{w}) = x_1y_2 + x_1y_4 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_4 + x_4y_1 + x_4y_3$$

ii) Un vettore non isotropo è p. es. $\vec{v}_1(1,1,0,0)$, essendo $q(\vec{v}_1) = 2 \neq 0$: Risulta $[v_1]^\perp : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, e quindi $[v_1]^\perp = \{(t_1, t_2, t_3, -t_1 - t_2 - t_3)\}_{t_1,t_2,t_3 \in \mathbf{R}}$. Un vettore non isotropo di $[v_1]^\perp$ è $\vec{v}_2(1,0,0,-1)$, essendo $q(\vec{v}_2) = -2 \neq 0$. Si ha: $[v_1]^\perp \cap [v_2]^\perp : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$, e quindi $[v_1]^\perp \cap [v_2]^\perp = \{(t_1, t_2, -t_1, -t_2)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}}$. Ogni vettore di $[v_1]^\perp \cap [v_2]^\perp$ è isotropo. Infatti risulta $q(t_1, t_2, -t_1, -t_2) = 2t_1t_2 - 2t_1t_2 - 2t_2t_1 + 2t_1t_2 = 0$ per ogni $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$. Allora

$$b|_{[v_1]^\perp \cap [v_2]^\perp} : [v_1]^\perp \cap [v_2]^\perp \times [v_1]^\perp \cap [v_2]^\perp \to \mathbf{R}$$

è la forma bilineare nulla ed ogni base di $[v_1]^\perp \cap [v_2]^\perp$, p. es. quella costituita dai vettori $\vec{v}_3 = (1,0,-1,0), \vec{v}_4 = (0,1,0,-1)$, è ortogonale.

Allora i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ costituiscono una base ortogonale di V.

Una base del tipo richiesto è la base B' costituita dai vettori:

$$\vec{v}'_1 = \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{q(\vec{v}_1)}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0),$$

$$\vec{v}'_2 = \frac{\vec{v}_2}{\sqrt{-q(\vec{v}_2)}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

$$\vec{v}'_3 = \vec{v}_3 = (1, 0, -1, 0),$$

$$\vec{v}'_4 = \vec{v}_4 = (0, 1, 0, -1).$$

iii) L'espressione di q rispetto alla base B' è:

$$q(\vec{v}) = (x'_1)^2 - (x'_2)^2,$$

essendo (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) le coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base B'. Da tale espressione di q si trae che gli indici di positività, negatività e nullità di q sono ripettivamente $p = 1, q = 1, \nu = 2$.

Geometria Analitica (A-Z)
Soluzioni della seconda prova in itinere, 13.1.2005

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Spazio euclideo $RC(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Assegnato l'iperboloide iperbolico $\Sigma: \ x^2+y^2-z^2-1=0$, si chiede di:

i) verificare che Σ è una superficie rotonda attorno all'asse z;

ii) scrivere equazioni cartesiane della circonferenza di gola di Σ (circonferenza di raggio minimo);

iii) scrivere equazioni cartesiane delle due schiere di rette che rigano Σ;

iv) determinare le due rette di Σ che passano per il punto $P(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ di Σ.

Soluzione.

i) Σ è una superficie rotonda attorno all'asse z: infatti le sezioni C_k di Σ con i piani perpendicolari all'asse z sono circonferenze, con centro sull'asse z stesso, di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2-1=0 \\ z=k \end{cases}, \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x^2+y^2=1+k^2 \\ z=k \end{cases},$$

che rappresentano le circonferenze sui piani $z=k$ di centro $C_k(0,0,k)$ e raggio $r_k=\sqrt{1+k^2}$.

ii) La circonferenza di gola è quella di raggio minimo, dunque corrispondente a $k=0$. Le sue equazioni sono dunque: $x^2+y^2=1, z=0$.

iii) L'equazione cartesiana dell'iperboloide iperbolico Σ può anche scriversi nella forma: $(x+z)(x-z)=(1+y)(1-y)$. Poichè quest'ultima equazione può essere ottenuta eliminando il parametro t_1 (o, rispettivamente t_2) tra ognuna delle coppie di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x+z=t_1(1+y) \\ 1-y=t_1(x-z) \end{cases}, \quad \text{rispettivamente} \quad \begin{cases} x+z=t_2(1-y) \\ 1+y=t_2(x-z) \end{cases},$$

si ha che al variare dei parametri $t_1,t_2 \in \mathbf{R}$ tali sistemi descrivono le due schiere di rette che rigano Σ.

iv) Le due rette di Σ che passano per $P(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ appartengono all'una e all'altra schiera. Sostituendo nelle equazioni delle due schiere le coordinate di P si ottiene rispettivamente $t_1=\sqrt{2}-1$ e $t_2=\sqrt{2}+1$. Le equazioni delle due rette richieste sono quindi:

$$\begin{cases} x+z=(\sqrt{2}-1)(1+y) \\ 1-y=(\sqrt{2}-1)(x-z) \end{cases}, \quad \text{e} \quad \begin{cases} x+z=(\sqrt{2}+1)(1-y) \\ 1+y=(\sqrt{2}+1)(x-z) \end{cases}.$$

Esercizio 2. Spazio vettoriale euclideo V di dimensione tre. Base ortonormale $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Assegnato l'operatore lineare $F : V \to V$ definito sui vettori $\vec{v} = \vec{u}_1 x_1 + \vec{u}_2 x_2 + \vec{u}_3 x_3 \in V$ dalla formula:

$$F(\vec{v}) = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\Big)\vec{u}_1 + \Big(\frac{1}{2}x_1 + \frac{2+\sqrt{2}}{4}x_2 + \frac{2-\sqrt{2}}{4}x_3\Big)\vec{u}_2 +$$
$$+\Big(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{2-\sqrt{2}}{4}x_2 + \frac{2+\sqrt{2}}{4}x_3\Big)\vec{u}_3,$$

si chiede di:

i) verificare che F è una rotazione di V, ovvero che F si rappresenta nella base $\mathcal{B}$ con una matrice di $SO(3)$;

ii) determinare l'asse vettoriale W della rotazione, autospazio di F associato all'autovalore $\lambda = 1$;

iii) determinare l'angolo convesso di rotazione.

Soluzione.

i) La matrice associata a F, rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$, è:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

Risulta immediatamente $AA^t = I$, ossia A è ortogonale, ed essendo det $A = 1$, si ha che $A \in SO(3)$.

ii) L'asse vettoriale W coincide con l'autospazio V_1 associato all'autovalore 1 di F (il fatto che 1 sia autovalore segue dal fatto che F è una rotazione). Il sistema:

$$\begin{cases} \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\Big)x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \Big(\frac{2+\sqrt{2}}{4} - 1\Big)x_2 + \frac{2-\sqrt{2}}{4}x_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{2-\sqrt{2}}{4}x_2 + \Big(\frac{2+\sqrt{2}}{4} - 1\Big)x_3 = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni proporzionali alla terna:

$$x_1 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{2}-2 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0, \quad x_2 = -\det \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & 1 \\ 2 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} = 8 - 4\sqrt{2},$$
$$x_3 = \det \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -1 \\ 2 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} = 8 - 4\sqrt{2}.$$

Lo spazio delle soluzioni è dunque $S_0 = \{t(0, 8-4\sqrt{2}, 8-4\sqrt{2})\}_{t\in\mathbf{R}}$, e quindi $V_1 = \{t(\vec{u}_2 + \vec{u}_3)\}_{t\in\mathbf{R}}$. Dalla formula $2\cos\theta + 1 = tr\ A$, essendo θ uno qualunque dei due angoli associati alla rotazione, si ottiene $\cos\theta = \frac{tr\ A - 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, e l'angolo convesso è quindi $\frac{\pi}{4}$.

Esercizio 3. Spazio vettoriale euclideo V di dimensione quattro. Base ortonormale $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$. Assegnato l'operatore lineare $F : V \to V$ definito dalla formula:

$$F(\vec{v}) = < \vec{v}, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 > (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) - \vec{v}$$

si chiede di:

i) verificare che F è un'operatore autoaggiunto su V, ovvero che risulta, per tutti i vettori $\vec{v}, \vec{w} \in V$:

$$< F(\vec{v}), \vec{w} > = < \vec{v}, F(\vec{w}) >;$$

ii) scrivere la matrice A associata a F nella base $\mathcal{B}$;

iii) determinare una base ortonormale di V formata da autovettori di F.

Soluzione.

i) Tenuto conto che il prodotto scalere è simmetrico, risulta per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in V$:

$$< F(\vec{v}), \vec{w} > = < \vec{v}, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 >< \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \vec{w} > - < \vec{v}, \vec{w} > =$$

$$= < \vec{w}, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 >< \vec{v}, \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 > - < \vec{v}, \vec{w} > = < \vec{v}, F(\vec{w}) > .$$

ii) Essendo $F(\vec{u}_1) = \vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $F(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \vec{u}_3$, $F(\vec{u}_3) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $F(\vec{u}_4) = -\vec{u}_4$, la matrice associata ad F nella base ortonormale $\mathcal{B}$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e il polinomio caratteristico è: $det\ (A - \lambda I) = \ det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$ $-(\lambda + 1)(-\lambda^3 + 3\lambda + 2)$, da cui gli autovalori $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 3 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 1.

L'autospazio V_{-1} è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad 0 = 0,$$

ed è quindi $V_{-1} = \{t_1(\vec{u}_1 - \vec{u}_3) + t_2(\vec{u}_2 - \vec{u}_3) + t_3\vec{u}_4\}_{t_1, t_2 \in \mathbf{R}}$. Una base di V_{-1} è costituita dagli autovettori $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_3, \vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \vec{u}_3, \vec{v}_3 = \vec{u}_4$. Tale base non è ortogonale: p. es. $< \vec{v}_1, \vec{v}_2 > = 1 \neq 0$. Applicando il procedimento di Gram-Schmidt si ottiene la base ortogonale costituita dai vettori $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_3$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{<\vec{v}_2, \vec{w}_1>}{<\vec{w}_1, \vec{w}_1>}\vec{w}_1 = \vec{u}_2 - \vec{u}_3 - \frac{1}{2}(\vec{u}_1 - \vec{u}_3) = -\frac{1}{2}\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \frac{1}{2}\vec{u}_3$, $\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{<\vec{v}_3, \vec{w}_1>}{<\vec{w}_1, \vec{w}_1>}\vec{w}_1 - \frac{<\vec{v}_3, \vec{w}_2>}{<\vec{w}_2, \vec{w}_2>}\vec{w}_2 = \vec{v}_3 = \vec{u}_4$. Normalizzando tale base ortogonale si ha la base ortonormale di autovettori di V_{-1} costituita dai vettori $\vec{w}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_3$, $\vec{w}'_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\vec{u}_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\vec{u}_2 - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\vec{u}_3$, $\vec{w}'_3 = \vec{u}_4$.

L'altro autospazio V_2 è dato dalle soluzioni del sistema: $-2x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, -2x_4 = 0$, ed è quindi $V_2 = \{t(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3)\}_{t \in \mathbf{R}}$. Una base ortonormale di V_2 è costituita dal solo vettore $\vec{w}'_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{u}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{u}_3$. Una base ortonormale di V è allora costituita da $\vec{w}'_1, \vec{w}'_2, \vec{w}'_3, \vec{w}'_4$.

Esercizio 4. Piano affine. $RA(O;\vec{i},\vec{j})$.
Sia assegnata la conica

$$\mathcal{C}: \quad x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Si chiede di:

i) determinare il tipo affine di $\mathcal{C}$;

ii) determinare un riferimento affine opportuno rispetto al quale $\mathcal{C}$ ha equazione canonica affine e scrivere tale equazione.

Soluzione.

i) La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ e la matrice associata alla parte quadratica di $\mathcal{C}$ è $A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Poichè risulta $\det A = -9 \neq 0$, e $\det A_{00} = 0$, ne segue che $\mathcal{C}$ è una parabola (generale).

ii) La forma quadratica q data dalla parte quadratica dell'equazione di $\mathcal{C}$ è tale che $q(\vec{v}) = x^2 - 4xy + 4y^2$, essendo $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Un vettore non isotropo per q è p. es. $\vec{v}_1 = \vec{i}$, risultando $q(\vec{i}) = 1 \neq 0$. Il piano ortogonale a v_1 ha equazione $x - 2y = 0$ ed è quindi $[\vec{v}_1]^\perp = \{t(2\vec{i} + \vec{j}\}_{t\in\mathbf{R}}$. Posto $\vec{v}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$, si ha che la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ diagonalizza q. Risulta $q(\vec{v}_2) = 0$, e scambiando i due vettori si ottiene la nuova base $(\vec{i}', \vec{j}') = (\vec{v}_2, \vec{v}_1) = (2\vec{i}+\vec{j}, \vec{i})$, e quindi la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. del cambiamento di base da $(\vec{i},\vec{j})$ a $(\vec{i}',\vec{j}')$. Le formule di trasformazione di coordinate affini da $RA(O;\vec{i}',\vec{j}')$ a $RA(O;\vec{i},\vec{j})$ sono dunque $x = 2x' + y', y = x'$ e trasformano l'equazione di $\mathcal{C}$ nella:

$$(y')^2 - 6x' - 2y' + 1 = 0.$$

Consideriamo ora il riferimento affine $RA(O'';\vec{i}'',\vec{j}'')$ che si ottiene da $RA(O;\vec{i}',\vec{j}')$ con la traslazione all'origine O'' di coordinate $(x',y') = (0,1)$. Le formule di trasformazione di coordinate affini da $RA(O'';\vec{i}'',\vec{j}'')$ a $RA(O;\vec{i}',\vec{j}')$ sono allora $x' = x'', y' = y'' + 1$. L'equazione di $\mathcal{C}$ in queste ultime coordinate è allora:

$$(y'')^2 - 6x'' = 0.$$

L'ultimo cambiamento di coordinate affini da effettuare per ottenere l'equazione canonica affine di $\mathcal{C}$ è $x'' = \frac{1}{6}x''', y'' = y'''$, ovvero il riferimento affine è $RA(O''';\vec{i}''',\vec{j}''')$ con $O''' = O''$ e $\vec{i}''' = \frac{1}{6}\vec{i}'', \vec{j}''' = \vec{j}''$. L'equazione di $\mathcal{C}$ in queste ultime coordinate è allora l'equazione canonica affine:

$$(y''')^2 - x''' = 0.$$

Geometria Analitica (A-Z)
Soluzioni della prova scritta del 24.1.2005

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Spazio euclideo $RC(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Sia assegnato il piano $p: \quad \sqrt{2}x - y - z + 2 = 0$.

i) Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per O e perpendicolare a p.

ii) Calcolare l'angolo acuto ϕ che la retta r forma con il piano $p' : z = 0$.

iii) Calcolare i coseni direttori e il versore della retta r orientata secondo le z crescenti.

iv) Determinare la componente ortogonale v_r di $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ secondo la retta r orientata secondo le z crescenti.

Soluzione.

i) La retta r, dovendo essere perpendicolare a p, ha parametri direttori $(l,m,n) = (\sqrt{2},-1,-1)$ e dovendo passare per O ha equazioni in forma di rapporti uguali $\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$. Equazioni cartesiane di r sono allora, per esempio, $x + \sqrt{2}z = 0, y - z = 0$.

ii) Risulta $\sin rp = \frac{|1(-1)|}{\sqrt{1}\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$, e quindi $\phi = \frac{\pi}{6}$.

iii) I coseni direttori di r sono $\cos xr = \frac{\sqrt{2}}{\pm\sqrt{4}}, \cos yr = \frac{-1}{\pm\sqrt{4}}, \cos zr = \frac{-1}{\pm\sqrt{4}}$, dove va preso contemporaneamente il segno + oppure il segno -. Essendo la retta r orientata secondo le z crescenti, il terzo coseno direttore deve essere positivo, e quindi si deve scegliere il segno - nei tre denominatori. I coseni direttori di r orientata verso l' alto sono quindi $\cos xr = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos yr = \frac{1}{2}, \cos zr = \frac{1}{2}$, e il versore direttore $\vec{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$.

iv) Risulta $v_r = <\vec{v},\vec{r}> = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -3\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Esercizio 2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base ~~ortonormale~~ $\mathcal{B} = (\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4)$.

Sia assegnata la forma bilineare $b : V \times V \to \mathbf{R}$, $b(\vec{v},\vec{w}) = X^t A Y$, essendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ ed essendo X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \text{ Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

le colonne delle coordinate di $\vec{v}$, $\vec{w}$.

i) Verificare che $b = <,>$ è un prodotto scalare, ovvero che b è simmetrica e definita positiva.

ii) Determinare gli angoli convessi tra i vettori della base $\mathcal{B}$.

iii) Determinare una base ortonormale di V.

iv) Considerata una base ortonormale $\mathcal{C}$ del sottospazio vettoriale $W = \text{span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$, scrivere le equazioni della proiezione ortogonale $P_W : V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Soluzione.

i) La forma bilineare b risulta simmetrica essendolo la matrice A. Inoltre b risulta definita positiva in quanto le quattro sottomatrici A_{kk}, $k = 1,2,3,4$ di A individuate dalle prime k righe e dalle prime k colonne hanno tutte determinante positivo: det A_{11} = det $A_{22} = 2$, det A_{33} $\underset{3>0,}{=}$ det $A_{44} = 1$. Posto $b(\vec{v},\vec{w}) = <\vec{v},\vec{w}>$, si ha:

$$<\vec{v},\vec{w}> = 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_2y_4 + x_3y_1 + 2x_3y_3 - x_3y_4 + x_4y_2 - x_4y_3 + 2x_4y_4$$

e $|\vec{v}|^2 = 2x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_4 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2$.

ii) Risulta $\cos\vec{v}_1\vec{v}_2 = \frac{<\vec{v}_1,\vec{v}_2>}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} = 0$, $\cos\vec{v}_1\vec{v}_3 = \frac{<\vec{v}_1,\vec{v}_3>}{|\vec{v}_1||\vec{v}_3|} = \frac{1}{2}$, $\cos\vec{v}_1\vec{v}_4 = \frac{<\vec{v}_1,\vec{v}_4>}{|\vec{v}_1||\vec{v}_4|} = 0$, $\cos\vec{v}_2\vec{v}_3 = \frac{<\vec{v}_2,\vec{v}_3>}{|\vec{v}_2||\vec{v}_3|} = 0$, $\cos\vec{v}_2\vec{v}_4 = \frac{<\vec{v}_2,\vec{v}_4>}{|\vec{v}_2||\vec{v}_4|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\vec{v}_3\vec{v}_4 = \frac{<\vec{v}_3,\vec{v}_4>}{|\vec{v}_3||\vec{v}_4|} = -\frac{1}{2}$. Si ha allora $\vec{v}_1\vec{v}_2 = \frac{\pi}{2}$, $\vec{v}_1\vec{v}_3 = \frac{\pi}{3}$, $\vec{v}_1\vec{v}_4 = \frac{\pi}{2}$, $\vec{v}_2\vec{v}_3 = \frac{\pi}{2}$, $\vec{v}_2\vec{v}_4 = \frac{\pi}{4}$, $\vec{v}_3\vec{v}_4 = \frac{2\pi}{3}$.

iii) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt applicato alla base $\mathcal{B}$ fornisce la base ortogonale costituita dai vettori $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{<\vec{w}_1,\vec{v}_2>}{<\vec{w}_1,\vec{w}_1>}\vec{w}_1 = \vec{v}_2$, $\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{<\vec{w}_1,\vec{v}_3>}{<\vec{w}_1,\vec{w}_1>}\vec{w}_1 - \frac{<\vec{w}_2,\vec{v}_3>}{<\vec{w}_2,\vec{w}_2>}\vec{w}_2 = \vec{v}_3 - \frac{1}{2}\vec{v}_1$, $\vec{w}_4 = \vec{v}_4 - \frac{<\vec{w}_1,\vec{v}_4>}{<\vec{w}_1,\vec{w}_1>}\vec{w}_1 - \frac{<\vec{w}_2,\vec{v}_4>}{<\vec{w}_2,\vec{w}_2>}\vec{w}_2 - \frac{<\vec{w}_3,\vec{v}_4>}{<\vec{w}_3,\vec{w}_3>}\vec{w}_3 = \vec{v}_4 - \vec{v}_2 + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2}\vec{v}_1 + \vec{v}_3) = -\frac{1}{3}\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \frac{2}{3}\vec{v}_3 + \vec{v}_4$. Normalizzando si ha la base ortonormale: $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_1$, $\vec{u}_2 = \vec{v}_2$, $\vec{u}_3 = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\vec{v}_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\vec{v}_3$, $\vec{u}_4 = \frac{-\sqrt{3}}{3}\vec{v}_1 - \sqrt{3}\vec{v}_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\vec{v}_3 + \sqrt{3}\vec{v}_4$. Essendo $W = \text{Span}\,(\vec{v}_1,\vec{v}_2) = \text{Span}\,(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$, si ha che una base ortonormale di W risulta $\mathcal{C} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2)$.

iv) Risulta $P_W(\vec{v}) = <\vec{v},\vec{u}_1>\vec{u}_1 + <\vec{v},\vec{u}_2>\vec{u}_2 = <\vec{v},\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_1>\vec{u}_1 + <\vec{v},\vec{v}_2>\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x_1 + x_3)\vec{u}_1 + (x_2+x_4)\vec{u}_2$. Indicate con (y_1,y_2) le coordinate di un vettore di W rispetto alla base ortonormale $\mathcal{C}$, le equazioni di P_W rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono allora $y_1 = \sqrt{2}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3$, $y_2 = x_2 + x_4$.

Esercizio 3. Piano vettoriale euclideo V. Base ortonormale $\mathcal{B} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2)$.

Siano $S, S' : V \to V$ le simmetrie ortogonali rispetto alle rette vettoriali rispettivamente $W : x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0$ e $W' : \sqrt{3}x_1 - x_2 = 0$.

i) Determinare le matrici ortogonali A, A' associate rispettivamente a S, S' nella base ortonormale $\mathcal{B}$.

ii) Considerata la composizione $R = S' \circ S : V \to V$, verificare che R è una rotazione di V.

iii) Determinare l'angolo ϕ della rotazione R.

Soluzione.

i) Un vettore non nullo di W è $\vec{w} = \sqrt{3}\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, quindi per ogni $\vec{v} \in V$ risulta:

$$S(\vec{v}) = 2\frac{<\vec{v},\vec{w}>}{<\vec{w},\vec{w}>}\vec{w} - \vec{v} = \frac{<\vec{v},\sqrt{3}\vec{u}_1 + \vec{u}_2>}{2}(\sqrt{3}\vec{u}_1 + \vec{u}_2) - \vec{u}_1$$

Un vettore non nullo di W' è invece $\vec{w}' = \vec{u}_1 + \sqrt{3}\vec{u}_2$, da cui per ogni $\vec{v} \in V$:

$$S'(\vec{v}) = 2\frac{<\vec{v},\vec{w}'>}{<\vec{w}',\vec{w}'>}\vec{w}' - \vec{v} = \frac{<\vec{v},\vec{u}_1 + \sqrt{3}\vec{u}_2>}{2}(\vec{u}_1 + \sqrt{3}\vec{u}_2) - \vec{v}$$

Dunque:

$$S(\vec{u}_1) = \frac{<\vec{u}_1,\sqrt{3}\vec{u}_1 + \vec{u}_2>}{2}(\sqrt{3}\vec{u}_1 + \vec{u}_2) - \vec{u}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\vec{u}_1 + \vec{u}_2) - \vec{u}_1 =$$

$$= \frac{3\vec{u}_1 + \sqrt{3}\vec{u}_2 - 2\vec{u}_1}{2} = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_2$$

$$S(\vec{u}_2) = \frac{<\vec{u}_2,\sqrt{3}\vec{u}_1 + \vec{u}_2>}{2}(\sqrt{3}\vec{u}_1 + \vec{u}_2) - \vec{u}_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{u}_1 + \vec{u}_2) - \vec{u}_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2.$$

Quindi la matrice ortogonale associata a S rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Similmente:

$$S'(\vec{u}_1) = \frac{\vec{u}_1 + \sqrt{3}\vec{u}_2 - 2\vec{u}_1}{2} = -\frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_2$$

$$S'(\vec{u}_2) = \frac{\sqrt{3}\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 - 2\vec{u}_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2$$

e la matrice ortogonale associata a S' rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $A' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

ii) Pertanto la matrice associata a $R = S' \circ S$ è

$$A'A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tale matrice è ortogonale con determinante $+1$ e quindi, essendo la base $\mathcal{B}$ ortonormale, si ha che $R = S' \circ S$ è una rotazione di V.

iii) Risulta: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$, da cui l'angolo di rotazione $\phi = \frac{\pi}{3}$.

Esercizio 4. Piano proiettivo reale P(V). Coordinate omogenee (x_0, x_1, x_2).
Sia assegnata la conica

$$\mathcal{C}: \quad x_0^2 - 2x_0x_1 + 2x_1x_2 - x_2^2 = 0.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è una conica semplicemente degenere.

ii) Determinare un sistema opportuno di coordinate proiettive omogeneè (x_0', x_1', x_2') rispetto a cui $\mathcal{C}$ ha equazione canonica proiettiva e scrivere tale equazione.

iii) Determinare le equazioni delle due rette in cui si spezza $\mathcal{C}$.

Soluzione.

i) La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, ed essendo nullo il suo determinante la conica $\mathcal{C}$ è degenere. La matrice A ha infatti rango 2, e $\mathcal{C}$ è dunque semplicemente degenere.

ii) La forma quadratica q associata all'equazione di $\mathcal{C}$ è $q = x_0^2 - 2x_0x_1 + 2x_1x_2 - x_2^2$. La forma bilineare simmetrica polare di q è $b = x_0y_0 - x_0y_1 - x_1y_0 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$. Un vettore non isotropo per b è p. es. $w_0 = (1,0,0)$, essendo $q(1,0,0) = 1$. Risulta $w_0^\perp : x_0 - x_1 = 0$ e quindi $w_0^\perp := \{(t_1, t_1, t_2\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}}$. Un vettore non isotropo di $w_0^\perp$ è p. es. $w_1 = (0,0,1)$; infatti risulta $q(0,0,1) = -1$. Si ha poi $w_0^\perp \cap w_1^\perp : x_0 - x_1 = 0, x_1 - x_2 = 0$. Dunque $w_0^\perp \cap w_1^\perp = \{(t,t,t))\}_{t \in \mathbf{R}}$. Posto $w_2 = (1,1,1)$ risulta che $\mathcal{B}' = (w_o, w_1, w_2)$ è una base b-ortogonale. Essendo $q(w_0) = 1, q(w_1) = -1, q(w_2) = 0$, si ha che rispetto a tale base l'espressione di q è canonica. Indicate con (x_0', x_1', x_2') le coordinate rispetto a tale base, risulta $q = (x_0')^2 - (x_1')^2$. Dunque in tali coordinate proiettive omogenee la conica $\mathcal{C}$ ha equazione canonica $(x_0')^2 - (x_1')^2 = 0$.

iii) Dall'equazione canonica di $\mathcal{C}$ si ha che $\mathcal{C}$ si spezza nelle rette $r : x_0' - x_1' = 0$ e $s : x_0' + x_1' = 0$. Vogliamo ora ottenere le equazioni di r e s nelle coordinate (x_0, x_1, x_2). A tal fine osserviamo che, posto $\mathcal{B} = (v_0, v_1, v_2)$ con $v_0 = (1,0,0), v_1 = (0,1,0), v_2 = (0,0,1)$, vale la relazione matriciale $\mathcal{B}' = \mathcal{B}M$, essendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le formule di trasformazione di coordinate proiettive omogenee sono dunque $x_0 = x_0' + x_2', x_1 = x_2', x_2 = x_1' + x_2'$, con inverse $x_0' = x_0 - x_1, x_1' = -x_1 + x_2, x_2' = x_1$. Sostituendo queste ultime trasformazioni nelle equazioni di r e di s si ottiene che $r : x_0 - x_2 = 0$ e $s : x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$.

Geometria Analitica (A-Z)
Soluzioni della prova scritta del 14.2.2005

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Spazio euclideo E^3 - $RC(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Sia assegnato il piano $p: \ x-2y+3z-1=0$. Considerati i punti $A(1,0,0)$ e $C(0,1,1)$ appartenenti a p, determinare i punti B e D di p in modo che $ABCD$ sia un quadrato avente A e C come vertici opposti.

Soluzione.

Il punto medio M di AC ha coordinate $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. La retta r passante per A e C ha parametri direttori $(l,m,n)=(-1,1,1)$. Osserviamo ora che i punti B e D devono appartenere all'asse r' del segmento AC ed avere distanza da M uguale alla distanza di A e di C da M. L'asse r' ha equazioni sotto forma di rapporti uguali $\frac{x-\frac{1}{2}}{l'}=\frac{y-\frac{1}{2}}{m'}=\frac{z-\frac{1}{2}}{n'}$, dove i parametri direttori (l',m',n') devono soddisfare le condizioni $-l'+m'+n'=0$ e $l'-2m'+3n'=0$, esprimenti rispettivamente la perpendicolarità tra r e r' e il parallelismo tra p e r'. Parametri direttori di r' sono allora $(l',m',n')=(5,4,1)$, da cui le equazioni parametriche di $r': \ x=\frac{1}{2}+5t, y=\frac{1}{2}+4t, z=\frac{1}{2}+t$, $t\in\mathbf{R}$. Il punto generico di r' è quindi $P'(\frac{1}{2}+5t,\frac{1}{2}+4t,\frac{1}{2}+t)$ e la condizione $d(M,P')=d(M,A)=d(M,C)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ fornisce $\sqrt{42t^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, da cui $t=\pm\frac{1}{2\sqrt{14}}$. Dunque $B(\frac{1}{2}+\frac{5}{2\sqrt{14}},\frac{1}{2}+\frac{4}{2\sqrt{14}},\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{14}})$ e $D(\frac{1}{2}-\frac{5}{2\sqrt{14}},\frac{1}{2}-\frac{4}{2\sqrt{14}},\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{14}})$.

Esercizio 2. Piano euclideo E^2 - $RC(O;\vec{i},\vec{j})$.

Sia assegnata l'applicazione $f:\mathbf{E}^2\to\mathbf{E}^2$ di equazioni

$$x'=\frac{7}{25}x+\frac{24}{25}y+\frac{3}{25}, \quad y'=\frac{24}{25}x-\frac{7}{25}y-\frac{4}{25}.$$

i) Verificare che f è una riflessione.

ii) Determinare l'equazione cartesiana dell'asse r di riflessione.

iii) Considerata la retta $s: 3x-4y=0$, scrivere l'equazione cartesiana della retta s' simmetrica di s rispetto a r.

Soluzione.

i) La matrice dei coefficienti associata ad f rispetto a $RC(O;\vec{i},\vec{j})$ è $A=\begin{pmatrix}\frac{7}{25} & \frac{24}{25}\\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25}\end{pmatrix}$, che si verifica subito essere ortogonale con determinante -1. Ne segue che f è un'isometria inversa. Per verificare che f è una riflessione resta da mostrare che il sistema

$$x=\frac{7}{25}x+\frac{24}{25}y+\frac{3}{25}, \quad y=\frac{24}{25}x-\frac{7}{25}y-\frac{4}{25},$$

che fornisce i punti uniti di f, è compatibile. Il sistema è infatti equivalente a $-18x + 24y + 3 = 0$, $\quad 24x - 32y - 4 = 0$, che essendo formato di equazioni proporzionali , è compatibile.

ii) Di fatto ognuna delle due precedenti equazioni, ovvero l'equazione semplificata $6x - 8y - 1 = 0$, rappresenta il luogo dei punti uniti, ovvero la retta r asse di riflessione.

iii) Poiche' la retta $s : 3x - 4y = 0$ è parallela all'asse r, essa è trasformata da f in una retta s' parallela. Un punto di s è p. es. l'origine O. Le coordinate di $f(O)$ sono $(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25})$, e imponendo alla generica retta $3x - 4y + k = 0$ parallela as s il passaggio per $f(O)$ si ottiene $s' : 3x - 4y - 1 = 0$.

Esercizio 3. Piano euclideo E^2 - $RC(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Sia assegnata la conica

$$\mathcal{C} : \quad x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4x + 3 = 0.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è un'iperbole equilatera.

ii) Determinare il centro C di $\mathcal{C}$.

iii) Determinare un riferimento cartesiano opportuno rispetto al quale $\mathcal{C}$ abbia equazione canonica euclidea e scrivere tale equazione.

Soluzione.

i) La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ e dunque gli invarianti cubico, quadratico e lineare di $\mathcal{C}$ sono rispettivamente $\mathcal{A} = \det A = -8 \neq 0$, $\mathcal{A}_{00} = \det A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = -4 < 0$, $\mathcal{I} = 1 - 1 = 0$. Dunque $\mathcal{C}$ è un'iperbole equilatera (non degenere).

ii) Il centro C di $\mathcal{C}$ ha coordinate $x = \frac{\mathcal{A}_{01}}{\mathcal{A}_{00}} = -\frac{1}{2}, \frac{\mathcal{A}_{02}}{\mathcal{A}_{00}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

iii) La forma quadratica $q : V_0' \to \mathbf{R}$ associata ai termini di secondo grado dell'equazione di $\mathcal{C}$ è tale che $q(\vec{v}) = x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2$, essendo $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. L'operatore simmetrico $F : V_0' \to V_0'$ associato a q ha come matrice $A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di F sono le soluzioni dell'equazione caratteristica di A_{00}, ossia di $\lambda^2 - 4 = 0$, dunque $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. I corrispondenti autospazi si ottengono dai sistemi lineari omogenei rispettivamente $-x - \sqrt{3}y = 0, -\sqrt{3}x - 3y = 0$, da cui $V_2 = \{t(\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j})\}_{t \in \mathbf{R}}$ e $3x - \sqrt{3}y = 0, -\sqrt{3}x + y = 0$, da cui $V_{-2} = \{t(\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})\}_{t \in \mathbf{R}}$. Una base ortonormale di autovettori per F è quindi data da $\vec{i}' = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$, $\vec{j}' = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$. Le corrispondenti formule di trasformazione di coordinate di punto sono, essendo $O' = O$:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y', \qquad y = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y',$$

e sostituendo tali formule nell'equazione di $\mathcal{C}$, si ottiene la sua equazione

$$2(x')^2 - 2(y')^2 + 2\sqrt{3}x' + 2y' + 3 = 0$$

nelle nuove coordinate (x', y'). La traslazione di vettore $\vec{O'O''}$, essendo $O''(x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y' = \frac{1}{2})$ trasforma le coordinate (x', y') nelle (x'', y'') secondo le formule seguenti:

$x' = x'' - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y' = y'' + \frac{1}{2}$, e quindi l'equazione di $\mathcal{C}$ diventa:

$$2(x'')^2 - 2(y'')^2 + 2 = 0,$$

nel riferimento $RC(O'', \vec{i}', \vec{j}')$. Poiche' invertendo le coordinate: $x''' = y'', y''' = x''$, e dividendo per 2 tale equazione si ottiene l'equazione canonica di $\mathcal{C}$:

$$(x''')^2 - (y''')^2 - 1 = 0,$$

il riferimento richiesto è $RC(O''', \vec{i}''', \vec{j}''')$, essendo $O''' = O''(x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2})$, che necessariamente coincide con il centro C, e $\vec{i}''' = \vec{j}''$, $\vec{j}''' = \vec{i}''$.

Esercizio 4. Piano proiettivo numerico reale $P(\mathbf{R}^3)$.

Siano assegnati i punti $P'_0 = [1,1,1]$, $P'_1 = [1,1,-1]$, $P'_2 = [1,-1,1]$, $U' = [1,-1,-1]$.

i) Verificare che P'_0, P'_1, P'_2, U' sono in posizione generale.

ii) Determinare il riferimento proiettivo che ammette i punti P'_0, P'_1, P'_2 come punti fondamentali e U' come punto unità e stabilire le formule di trasformazione di coordinate di punto dalle sue coordinate omogenee (x'_0, x'_1, x'_2) a quelle (x_0, x_1, x_2) del riferimento canonico.

iii) Scrivere nelle coordinate (x'_0, x'_1, x'_2) l'equazione cartesiana della retta $r : x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

Soluzione.

i) I punti assegnati sono in posizione generale, in quanto a tre a tre linearmente indipendenti: det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$, det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$, det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$, det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$.

ii) Posto $\vec{w}_0 = (1,1,1)$, $\vec{w}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{w}_2 = (1,-1,1)$, $\vec{u}' = (1,-1,-1)$, risulta $P'_0 = [\vec{w}_0]$, $P'_1 = [\vec{w}_1]$, $P'_2 = [\vec{w}_2]$, $U' = [\vec{u}']$. Essendo linearmente indipendenti i punti P'_0, P'_1, P'_2 si ha che i vettori $\vec{w}_0, \vec{w}_1, \vec{w}_2$ sono linearmente indipendenti e quindi una base di $\mathbf{R}^3$. Quindi l' equazione vettoriale $\vec{u}' = \lambda_0\vec{w}_0 + \lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2$ ammette un' unica soluzione, costituita da tre reali non nulli. La traduzione scalare della precedente equazione vettoriale fornisce la soluzione $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (-1,1,1)$. I vettori $\vec{v}'_0 = -\vec{w}_0 = (-1,-1,-1)$, $\vec{v}'_1 = -\vec{w}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{v}'_2 = -\vec{w}_2 = (1,-1,1)$ sono allora tali che $P'_0 = [\vec{v}'_0]$, $P'_1 = [\vec{v}'_1]$, $P'_2 = [\vec{v}'_2]$, $U' = [\vec{v}'_0 + \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2]$ e quindi $RP(\vec{v}'_0, \vec{v}'_1, \vec{v}'_2)$ è un riferimento proiettivo del tipo richiesto. Considerato il riferimento proiettivo canonico $RP(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ di $P(\mathbf{R}^3)$, si ha che le formule di trasformazione di coordinate proiettive omogenee di punto nel passaggio da $RP(\vec{v}'_0, \vec{v}'_1, \vec{v}'_2)$ a $RP(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sono $x_0 = -x'_0 + x'_1 + x'_2, x_1 = -x'_0 + x'_1 - x'_2, x_2 = x'_0 - x'_1 + x'_2$.

iii) Sostituendo queste ultime trasformazioni nell' equazione di r si ottiene che r : $3x'_0 + x'_1 + x'_2 = 0$.

Geometria Analitica (A-Z)
Soluzioni della prova scritta del 13.6.2005

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Spazio euclideo $RC(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Siano assegnate le rette

$$r: \quad x - y + z - 1 = 0, \quad x + z = 0, \qquad r': \quad x + y + 3z = 0, \quad x - z = 0.$$

i) Verificare che r e r' sono sghembe.

ii) Determinare la retta s incidente e perpendicolare a r e r'.

iii) Determinare i punti $P = r \cap s$, $P' = r' \cap s$.

iv) Determinare la distanza $d(r, r')$ tra r e r'.

Soluzione.
i) Risulta:

$$det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0,$$

e le rette r e r' sono pertanto sghembe.

ii) I punti generici delle due rette sono rispettivamente $P(t) = (-t, -1, t)$, $P'(t') = (t', -4t', t')$. La generica retta $\overline{r}$ incidente r e r' ha dunque equazioni cartesiane:

$$\frac{x + t}{t' + t} = \frac{y + 1}{-4t' + 1} = \frac{z - t}{t' - t},$$

di parametri direttori $(\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}) = (t + t', -4t' + 1, t' - t)$. Le condizioni di perpendicolarità tra r e $\overline{r}$ e tra r' e $\overline{r}$ forniscono rispettivamente $-(t' + t) + t' - t = 0$ e $t' + t - 4(-4t' + 1) + t' - t = 0$, da cui $t = 0, t' = \frac{2}{9}$. La retta s ha dunque equazioni

$$\frac{x}{2} = y + 1 = \frac{z}{2}.$$

iii) Risulta $P = P(0) = (0, -1, 0)$ e $P' = P'(\frac{2}{9}) = (\frac{2}{9} - \frac{8}{9}, \frac{2}{9})$.

iv) Risulta $d(r, r') = d(P, P') = \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{1}{81} + \frac{4}{81}} = \frac{1}{3}$.

Esercizio 2. Spazio vettoriale reale V **di dimensione tre. Base** $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.
Sia assegnata la forma bilineare $b : V \times V \to \mathbf{R}$, $b(\vec{v}, \vec{w}) = X^t A Y$, essendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ed essendo X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

le colonne delle coordinate di $\vec{v}$, $\vec{w}$.

i) Verificare che $b =<,>$ è un prodotto scalare, ovvero che b è simmetrica e definita positiva.

ii) Determinare $|\vec{v}|^2$.

iii) Determinare gli angoli convessi tra i vettori della base $\mathcal{B}$.

iv) Assegnato $W =$ Span $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$, essendo $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$, determinare una base ortonormale $\mathcal{B}'_W$ di W rispetto al prodotto scalare indotto da b.

Soluzione.

i) La forma bilineare b risulta simmetrica essendolo la matrice A. Inoltre b risulta definita positiva in quanto le tre sottomatrici di ordine 2 A_{kk}, $k = 1,2,3$ di A e A stessa hanno tutte determinante positivo: det $A_{11} = 2$, det $A_{22} = 3$, det $A_{33} =$ det A $= 1$.

ii) Posto $b(\vec{v}, \vec{w}) =< \vec{v}, \vec{w} >$, si ha:

$$|\vec{v}|^2 =< \vec{v}, \vec{v} >= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

iii) Risulta $\cos \vec{v}_1\vec{v}_2 = \frac{<\vec{v}_1,\vec{v}_2>}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} = \frac{1}{2}$, $\cos \vec{v}_1\vec{v}_3 = \frac{<\vec{v}_1,\vec{v}_3>}{|\vec{v}_1||\vec{v}_3|} = 0$, $\cos \vec{v}_2\vec{v}_3 = \frac{<\vec{v}_2,\vec{v}_3>}{|\vec{v}_2||\vec{v}_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Si ha allora $\vec{v}_1\vec{v}_2 = \frac{\pi}{3}$, $\vec{v}_1\vec{v}_3 = \frac{\pi}{2}$, $\vec{v}_2\vec{v}_3 = \frac{\pi}{4}$.

iv) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt applicato alla base $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ di W fornisce la base ortogonale costituita dai vettori $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = \vec{v}_1$, $\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{<\vec{w}_1,\vec{w}_2>}{<\vec{w}_1,\vec{w}_1>}\vec{w}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3 - \frac{1}{2}\vec{v}_1$. Normalizzando si ha la base ortonormale: $\vec{u}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_1$, $\vec{u}'_2 = \frac{-\sqrt{2}}{6}\vec{v}_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\vec{v}_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\vec{v}_3$.

Esercizio 3. Piano affine A^2 - $RA(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Sia assegnata la conica

$$\mathcal{C}: \quad 5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y = 0.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è un'ellisse generale.

ii) Determinare il centro P_0 di $\mathcal{C}$.

iii) Determinare un riferimento affine opportuno rispetto al quale $\mathcal{C}$ abbia equazione canonica affine e scrivere tale equazione.

Soluzione.

i) La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ con det $A = -9 \neq 0$, e dunque $\mathcal{C}$ è generale. Risulta poi $\mathcal{A}_{00} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, con det $\mathcal{A}_{00} = 9 > 0$, e pertanto $\mathcal{C}$ è un ellisse.

ii) Il centro P_0 di $\mathcal{C}$ ha coordinate $x_0 = \frac{\mathcal{A}_{01}}{\mathcal{A}_{00}} = \frac{1}{3}$, $y_0 = \frac{\mathcal{A}_{02}}{\mathcal{A}_{00}} = \frac{2}{3}$.

iii) La forma quadratica $q : V \to \mathbf{R}$ associata ai termini di secondo grado dell'equazione di $\mathcal{C}$ è tale che $q(\vec{v}) = 5x^2 - 2xy + 2y^2$, essendo $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. La forma bilineare simmetrica associata è $b : V \times V \to \mathbf{R}$, ~~associata a q è~~ $b(\vec{v}, \vec{v}') = 5xx' - xy' - yx' + 2yy'$, essendo $\vec{v}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Un vettore non isotropo rispetto a b è $\vec{i}$, essendo $q(\vec{i}) = 5 \neq 0$. Assumiamo dunque $\vec{i}' = \vec{i}$. Risulta $(\vec{i}')^{\perp} = (\vec{i})^{\perp} : 5x - y = 0$, e quindi $(\vec{i}')^{\perp} = \{t(\vec{i} + 5\vec{j})\}_{t \in \mathbf{R}}$. Poniamo dunque $\vec{j}' = \vec{i} + 5\vec{j}$, e osserviamo che $q(\vec{j}') = 45 \neq 0$, e quindi anche $\vec{j}'$ non è isotropo. Le formule di trasformazione di coordinate di vettore dalla base $(\vec{i}', \vec{j}')$ a $(\vec{i}, \vec{j})$ sono

$$x = x' + y', \qquad y = 5y'.$$

Tali formule sono anche di trasformazione di coordinate di punto da RA' $= (O', \vec{i}', \vec{j}')$ a RA $= (O, \vec{i}, \vec{j})$ con $O' = O$. Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$, si ottiene la sua equazione

$$5(x')^2 + 45(y')^2 - 2x' - 12y' = 0$$

nelle nuove coordinate (x', y'). La traslazione di vettore $\vec{O'O''}$, essendo $O'' = P_0$ consente di eliminare i termini di primo grado attraverso le sostituzioni $x' = x'' + \frac{1}{5}$, $y' = y'' + \frac{2}{15}$. Di qui, normalizzando, si ottiene l'equazione canonica.

Esercizio 4. Spazio affine ampliato $A^3 \cup p_\infty$. Coordinate affini omogenee (x_0, x_1, x_2, x_3).

Siano assegnati i punti $P_1(0, -1, 1, 1)$, $P_2(0, 1, 1, 0)$ ed il piano $p : x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

i) Scrivere equazioni cartesiane in coordinate affini omogenee della retta r passante per P_1 e P_2 e dedurne che r è una retta impropria.

ii) Scrivere equazioni parametriche omogenee di r.

iii) Determinare il punto $P = r \cap p$..

Soluzione.

i) Le equazioni cartesiane della retta r si possono ottenere dalla condizione analitica $\text{rg}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} < 3$. Essendo non nullo il determinante della sottomatrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, le equazioni sono date dalle condizioni: $\det\begin{pmatrix} x_0 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$, $\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$, ovvero $x_0 = 0, -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. La prima equazione mostra che r è una retta impropria.

ii) Equazioni parametriche omogenee di r sono $x_0 = 0, x_1 = -\lambda_0 + \lambda_1, x_2 = \lambda_0 + \lambda_1, x_3 = \lambda_0$, essendo $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbf{R}^2 - (0, 0)$.

iii) Imponendo al punto generico $P(\lambda_0, \lambda_1) = (0, -\lambda_0 + \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, \lambda_0)$ di r di appartenere a p si ottiene $\lambda_0 + 2\lambda_1 = 0$, da cui $(\lambda_0, \lambda_1) = \rho(2, -1)$. Pertanto $P = P(2, -1) = (0, -3, 1, 2)$.

Geometria Analitica (A-Z)
Soluzioni della prova scritta del 26.9.2005

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Spazio euclideo $RC(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Sia assegnato il paraboloide iperbolico $\Sigma: \ x^2 - y^2 = z$.

i) Scrivere equazioni cartesiane della coniche $\mathcal{C}_{xy}, \mathcal{C}_{yz}, \mathcal{C}_{xz}$ che si ottengono come intersezione di Σ con i piani risp. xy, yz, xz.

ii) Studiare le coniche $\mathcal{C}_{xy}, \mathcal{C}_{yz}, \mathcal{C}_{xz}$.

iii) Scrivere equazioni cartesiane delle due schiere di rette che rigano Σ.

iv) Determinare le due rette di Σ che passano per il punto $P_0(1,1,0)$ di Σ.

Soluzione.

i) Risulta immediatamente:

$$\mathcal{C}_{xy}: \begin{cases} x^2 - y^2 = z \\ z = 0 \end{cases}, \quad \mathcal{C}_{yz}: \begin{cases} x^2 - y^2 = z \\ x = 0 \end{cases}, \quad \mathcal{C}_{xz}: \begin{cases} x^2 - y^2 = z \\ y = 0 \end{cases}.$$

ii) Dalle equazioni di $\mathcal{C}_{xy}$ sia ha subito che essa è una conica semplicemente degenere, che si spezza nelle due rette $r_1: x - y = 0, z = 0$ e $r_2: x + y = 0, z = 0$. Dalle equazioni di $\mathcal{C}_{yz}$ si ha invece subito che essa è la parabola $y^2 = -z, x = 0$ con asse l'asse z, vertice nell'origine e concavità verso il basso. Similmente $\mathcal{C}_{xz}$ è la parabola $x^2 = z, y = 0$ con asse l'asse z, vertice nell'origine e concavità verso l'alto .

iii) L'equazione cartesiana di Σ può anche scriversi nella forma: $(x+y)(x-y) = z$, che si presta a individuare le due schiere di rette. Infatti quest'ultima equazione può essere ottenuta eliminando il parametro t_1 (o, rispettivamente t_2) tra ognuna delle coppie di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x - y = t_1 \\ z = t_1(x+y) \end{cases}, \quad \text{rispettivamente} \quad \begin{cases} x - y = t_2 z \\ 1 = t_2(x+y) \end{cases}.$$

Pertanto, al variare dei parametri $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ tali sistemi descrivono le due schiere di rette che rigano Σ.

iv) Le due rette di Σ che passano per $P_0(1,1,0)$ appartengono all'una e all'altra schiera si ottengono sostituendo nelle equazioni delle due schiere le coordinate di P_0. Si ottiene in questo modo rispettivamente $t_1 = 0$ e $t_2 = \frac{1}{2}$. Le equazioni delle due rette richieste sono quindi:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2(x-y) = z \\ x + y = 2 \end{cases}.$$

Esercizio 2. Spazio vettoriale reale V di dimensione tre, dotato di prodotto scalare $< \ , \ >$. Base ortonormale $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Sia assegnato l'endomorfismo $F: V \to V$ definito dalla formula:

$$F(\vec{v}) = (x_1 - x_2 + 2x_3)\vec{v}_1 + (-x_1 + x_2 - 2x_3)\vec{v}_2 + 2(x_1 - x_2 + 2x_3)\vec{v}_3,$$

essendo $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3$.

i) Scrivere la matrice A associata a F nella base $\mathcal{B}$.

ii) Verificare che l'operatore F è autoaggiunto.

iii) Determinare una base ortonormale di V formata da autovettori di F.

Soluzione.

i) La matrice associata ad F nella base ortonormale $\mathcal{B}$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

ii) Essendo la matrice A simmetrica e $\mathcal{B}$ una base ortonormale, si ha che l'endomorfismo F è autoaggiunto.

iii) L'equazione caratteristica di F è: $det\ (A-\lambda I) = \ det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$ $-\lambda^3 + 6\lambda^2 = 0$, da cui gli autovalori $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 6$ con molteplicità algebrica 1.

L'autospazio V_0 è dato dalle soluzioni del sistema: $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$, ed è quindi $V_0 = \{t_1(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + t_2(-2\vec{v}_1 + \vec{v}_3)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}}$. Una base di V_0 è costituita dagli autovettori $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}_2 = -2\vec{v}_1 + \vec{v}_3$. Tale base non è ortogonale: p. es. $< \vec{w}_1, \vec{w}_2 >= -2$. Applicando il procedimento di Gram-Schmidt si ottiene la base ortogonale costituita dai vettori $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{<\vec{w}_2,\vec{u}_1>}{<\vec{u}_1,\vec{u}_1>}\vec{u}_1 = -2\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + \frac{2}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$. Normalizzando tale base ortogonale si ha la base ortonormale di autovettori di V_0 costituita dai vettori $\vec{u}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$, $\vec{u}'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3)$.

L'altro autospazio V_6 è dato dalle soluzioni del sistema: $-5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, -x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0, 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$, ed è quindi $V_6 = \{t(\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3)\}_{t \in \mathbf{R}}$. Una base ortonormale di V_6 è costituita dal solo vettore $\vec{u}'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3)$, che è ortogonale a V_0. Una base ortonormale di V è allora costituita da $\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3$.

Esercizio 3. Piano euclideo E^2 - $RC(O;\vec{i},\vec{j})$.

Sia assegnata l'applicazione $f : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ di equazioni

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}, \quad y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

i) Verificare che f è una rotazione e determinarne il suo punto fisso C, centro di rotazione.

ii) Determinare l'angolo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, della rotazione.

iii) Considerata la retta $r : y - 1 = 0$, scrivere l'equazione cartesiana della retta $r' = f(r)$.

Soluzione.

i) La matrice associata ad f rispetto a $RC(O;\vec{i},\vec{j})$ è $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, che si verifica subito essere ortogonale con determinante 1. Ne segue che f è un'isometria diretta.

Da $A \neq I_2$ si trae che f non è una traslazione ed è quindi una rotazione. Le equazioni che danno le coordinate del centro di rotazione C sono:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

le cui soluzioni forniscono $C = (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1, \frac{1}{2})$.

ii) Da $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$, si ha subito che l'angolo di rotazione è $\theta = \frac{\pi}{6}$.

iii) La retta r passa per il centro di rotazione C, e quindi la sua trasformata $r' = f(r)$ passa ancora per C. Essendo r parallela all'asse x, e supponendola con la stessa orientazione di tale asse, si ha che $\frac{\pi}{6}$ è l'angolo formato da r e r' (quest'ultima orientata verso l'alto). Dunque il coefficiente angolare di r' è $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e la sua equazione è $r' : y' = \frac{1}{\sqrt{3}}x'$.

Esercizio 4. Piano proiettivo reale P(V). Coordinate omogenee (x_0, x_1, x_2).
Sia assegnata la conica

$$\mathcal{C}: \quad x_0^2 - 2x_0x_1 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è una conica generale a supporto non vuoto.

ii) Determinare un opportuno sistema di coordinate proiettive omogenee (x_0', x_1', x_2') rispetto a cui $\mathcal{C}$ ha equazione canonica proiettiva e scrivere tale equazione.

Soluzione.

i) La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ed essendo $\mathcal{A} = \det A = -2 \neq 0$, la conica $\mathcal{C}$ è generale. Un punto di $\mathcal{C}$ è p. es. $P(2,1,2)$, e quindi $\mathcal{C}$ è a supporto non vuoto.

ii) La forma quadratica q associata all'equazione di $\mathcal{C}$ è $q = x_0^2 - 2x_0x_1 - 2x_1x_2 + x_2^2$. La forma bilineare simmetrica polare di q è $b = x_0y_0 - x_0y_1 - x_1y_0 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$. Un vettore non isotropo per b è p. es. $w_0 = (1,0,0)$, essendo $q(1,0,0) = 1$. Risulta $w_0^\perp : x_0 - x_1 = 0$ e quindi $w_0^\perp := \{(t_1, t_1, t_2\}_{t_1, t_2 \in \mathbf{R}}$. Un vettore non isotropo di $w_0^\perp$ è p. es. $w_1 = (0,0,1)$; infatti risulta $q(0,0,1) = 1$. Si ha poi $w_0^\perp \cap w_1^\perp : x_0 - x_1 = 0, -x_1 + x_2 = 0$. Dunque $w_0^\perp \cap w_1^\perp = \{(t,t,t))\}_{t \in \mathbf{R}}$. Posto $w_2 = (1,1,1)$ risulta che $\mathcal{B}' = (w_0, w_1, w_2)$ è una base b-ortogonale. Essendo $q(w_0) = 1, q(w_1) = 1, q(w_2) = -2$, si ha che rispetto alla base $\mathcal{B}'' = (v_0' = w_0, v_1' = w_1, v_2' = \frac{w_2}{\sqrt{2}})$ l'espressione di q deve risultare canonica. Per ottenere esplicitamente tale equazione canonica poniamo $\mathcal{B} = (v_0, v_1, v_2)$ con $v_0 = (1,0,0), v_1 = (0,1,0), v_2 = (0,0,1)$, da cui la relazione $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}M$, essendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Le formule di trasformazione di coordinate proiettive omogenee sono dunque date dalla relazione matriciale $X = MX'$, ovvero $x_0 = x_0' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2', x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2', x_2 = x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2'$. Sostituendo queste ultime trasformazioni nell' equazione di $\mathcal{C}$ si ottiene facilmente l'equazione canonica $(x_0')^2 + (x_1')^2 - (x_2')^2 = 0$, in accordo con il fatto che $\mathcal{C}$ è generale a supporto non vuoto.

Geometria Analitica 2006/2007

Soluzioni della prova in itinere del 13 novembre

Proff. Renzo Mazzocco e Paolo Piccinni

Tutor: Federico Incitti

Esercizio 1. Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione 4, con base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$. Sia assegnata la forma quadratica $q\colon \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ che a $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 \in \mathbf{V}$ associa

$$q(\mathbf{v}) = -4x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_4 - x_3^2 + 4x_4^2.$$

(a) Scrivere la matrice associata a q rispetto alla base $\mathcal{B}$ e determinare il rango di q.

(b) Determinare l'espressione della forma bilineare simmetrica $b\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ polare di q.

(c) Determinare una base di $\mathbf{V}$ rispetto alla quale q abbia forma canonica e scrivere tale forma.

(d) Dalla forma canonica di q dedurre gli indici di positività, negatività e nullità di q.

Soluzione. **(a)** La matrice associata a q rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Infatti si ha $q(\mathbf{v}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$. Il rango di A, e dunque quello di q, è 2.

(b) La forma bilineare simmetrica $b : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ polare di q è data da

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{y} = -4x_1y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + x_2y_2 - 2x_2y_4 - 2x_4y_2 - x_3y_3 + 4x_4y_4,$$

dove $\mathbf{x}^t = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $\mathbf{y}^t = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ sono, risp., le coordinate di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nella base $\mathcal{B}$.

(c) Presentiamo due metodi alternativi per trovare una base di $\mathbf{V}$ ortonormale.

Primo metodo. Un vettore non isotropo è, ad esempio, $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$, essendo $q(\mathbf{v}_1) = -4 \neq 0$. Risulta

$$\mathbf{w}_1^\perp\colon\ -4x_1 + 2x_3 = 0, \quad \text{ovvero} \quad 2x_1 - x_3 = 0.$$

Lo spazio delle soluzioni di tale equazione cartesiana è $\{(\lambda, \mu, 2\lambda, \nu) : \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}\}$. Dunque

$$\mathbf{w}_1^\perp = \{\lambda(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3) + \mu\mathbf{v}_2 + \nu\mathbf{v}_4 : \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4).$$

Un vettore non isotropo di $\mathbf{w}_1^\perp$ è, ad esempio, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$, essendo $q(\mathbf{v}_2) = 1 \neq 0$. Si ha

$$\mathbf{w}_1^\perp \cap \mathbf{w}_2^\perp\colon \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Essendo $\{(\lambda, 2\mu, 2\lambda, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$ lo spazio delle soluzioni di questo sistema, risulta

$$\mathbf{w}_1^\perp \cap \mathbf{w}_2^\perp = \{\lambda(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3) + \mu(2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4) : \lambda, \mu \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4).$$

Poiché il rango di b è 2, si ha che ogni vettore di $\mathbf{W} = \mathbf{w}_1^\perp \cap \mathbf{w}_2^\perp$ è necessariamente isotropo. Dunque la forma bilineare $b' = b|_{\mathbf{W}\times\mathbf{W}}$ è la forma nulla ed ogni base di $\mathbf{W}$ è ortogonale rispetto a b. Una base di $\mathbf{W}$ è data, ad esempio, dai vettori (isotropi) $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{w}_4 = 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$. Allora una base ortogonale di $\mathbf{V}$ è data da $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4)$.

Secondo metodo. Un vettore non isotropo è $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$. Il vettore $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$ è non isotropo e ortogonale a $\mathbf{w}_1$ e , esssendo $q(\mathbf{v}_2) = 1 \neq 0$ e $b(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$. Ora, essendo 2 il rango di b, si ha che tutti i vettori di $\mathbf{W} = \mathbf{w}_1^\perp \cap \mathbf{w}_2^\perp$ sono isotropi. Tra questi, due indipendenti si possono ottenere togliendo a $\mathbf{v}_3$ e a $\mathbf{v}_4$ le loro componenti parallele a $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$. Si ottiene, rispettivamente,

$$\mathbf{w}_3' = \mathbf{v}_3 - \frac{b(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1)}{b(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1)}\mathbf{w}_1 - \frac{b(\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2)}{b(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2)}\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_1, \quad \text{scegliamo allora } \mathbf{w}_3 = 2\mathbf{w}_3' = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3,$$

$$\mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{b(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1)}{b(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1)}\mathbf{w}_1 - \frac{b(\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2)}{b(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2)}\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_4 + 2\mathbf{v}_2,$$

arrivando alla stessa base ortogonale trovata con il primo metodo.

Infine, essendo $q(\mathbf{w}_1) = -4 < 0$, $q(\mathbf{w}_2) = 1 > 0$, $q(\mathbf{w}_3) = 0$ e $q(\mathbf{w}_2) = 0$, una base $\mathcal{B}'$ rispetto alla quale q abbia forma canonica è data dai quattro vettori

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_2}{\sqrt{q(\mathbf{w}_2)}} = \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_1}{\sqrt{-q(\mathbf{w}_1)}} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3 \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_4 = \mathbf{w}_4 = 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4.$$

Allora la forma canonica di q è data da $q(\mathbf{v}) = (x_1')^2 - (x_2')^2$, dove $\mathbf{v} = x_1'\mathbf{u}_1 + x_2'\mathbf{u}_2 + x_3'\mathbf{u}_3 + x_4'\mathbf{u}_4$.

(d) Gli indici di positività, negatività e nullità di q valgono, ripettivamente, 1, 1 e 2.

Esercizio 2. Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Sia assegnata la forma bilineare simmetrica $f\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$, definita da

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3,$$

dove $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{w} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3$.

- **(a)** Verificare che f è definita positiva, ovvero che è un prodotto scalare.
- **(b)** Scrivere l'espressione di $\|\mathbf{v}\|^2$ in termini delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
- **(c)** Determinare una base ortonormale, applicando il procedimento di Gram-Schmidt a $\mathcal{B}$.
- **(d)** Considerato il sottospazio vettoriale $\mathbf{U} = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ di $\mathbf{V}$, determinare il vettore $P_{\mathbf{U}}(\mathbf{v})$, proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{U}$, essendo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

Soluzione. **(a)** La matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Infatti si ha $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{y}$, dove $\mathbf{x}^t = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y}^t = (y_1, y_2, y_3)$.

La forma bilineare f è definita positiva se e solo se lo è la sua matrice associata A. Ma questa è definita positiva, essendo strettamente positivi gli elementi sulla diagonale principale, i tre minori principali di ordine 2 (che valgono, rispettivamente, 1, 3 e 1) e il determinante (che vale 1).

(b) D'ora in avanti scriveremo, per comodità, $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Risulta immediatamente

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2.$$

(c) Il procedimento di Gram-Schmidt applicato a $\mathcal{B}$ dà la base ortogonale costituita dai vettori

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1, \\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 - \frac{1/2}{1/2}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\right) = -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.
\end{aligned}$$

Normalizzando questa base ortogonale si ottiene una base ortonormale $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{w}_1\| &= \sqrt{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} = \sqrt{2} &&\Rightarrow \quad \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{v}_1, \\
\|\mathbf{w}_2\| &= \sqrt{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} = \frac{\sqrt{2}}{2} &&\Rightarrow \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{v}_1 + \sqrt{2}\,\mathbf{v}_2, \\
\|\mathbf{w}_3\| &= \sqrt{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle} = 1 &&\Rightarrow \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_3 = -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.
\end{aligned}$$

(d) Essendo $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ una base ortonormale di $\mathbf{U} = \text{Span}\,(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, risulta

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 \\
&= \left\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{v}_1 \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{v}_1 + \left\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{v}_1 + \sqrt{2}\,\mathbf{v}_2 \right\rangle \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{v}_1 + \sqrt{2}\,\mathbf{v}_2\right).
\end{aligned}$$

Il primo prodotto scalare vale 0 ($\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ è ortogonale a $\mathbf{v}_1$), mentre il secondo vale $\sqrt{2}$. Dunque

$$P_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{v}_1 + \sqrt{2}\,\mathbf{v}_2\right) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2.$$

Esercizio 3. Nel piano euclideo, con riferimento cartesiano $RC(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$, si considerino i quattro punti $P(2,0)$, $Q(1,0)$, $R(0,1)$ ed $S(0,2)$.

(a) Verificare che P, Q, R ed S appartengono ad una stessa circonferenza $\mathcal{C}$, e scrivere l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$.

(b) Determinare su $\mathcal{C}$, nell'arco tra P ed S che non contiene Q ed R, i punti distinti A e B tali che i pentagoni $PQRSA$ e $PQRSB$ abbiano area $7/2$.

(c) Determinare il centro C della circonferenza $\mathcal{C}$ e il punto C' simmetrico di C rispetto alla retta r passante per i punti Q ed R.

(d) Scrivere l'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}'$, simmetrica di $\mathcal{C}$ rispetto alla retta r.

Soluzione. (a) Sostituendo le coordinate dei punti P, Q, R ed S nella generica equazione della circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 4+2a+c=0, \\ 1+a+c=0, \\ 1+b+c=0, \\ 4+2b+c=0, \end{cases}$$

che è compatibile con soluzione $(a,b,c)=(-3,-3,2)$. La circonferenza $\mathcal{C}$ ha dunque equazione

$$x^2+y^2-3x-3y+2=0.$$

(b) Come si vede facilmente $PQRS$ è un trapezio isoscele (vedi Figura 1). La sua area si calcola facilmente come differenza tra l'area del triangolo OPS, che vale 2, e quella del triangolo OQR, che vale $1/2$. Dunque l'area di $PQRS$ è $3/2$. Quindi i punti A e B richiesti sono tali che l'area dei triangoli PSA e PSB abbiano area $7/2-3/2=2$. Per determinarli, imponiamo al generico punto $P_0(x_0,y_0)$ del piano di appartenere a $\mathcal{C}$ ($x_0^2+y_0^2-3x_0-3y_0+2=0$) e di verificare la condizione

$$\text{Area}(PSP_0)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PP_0}\wedge\overrightarrow{PS}|=2, \quad \text{cioè} \quad |\overrightarrow{PP_0}\wedge\overrightarrow{PS}|=4.$$

L'espressione analitica del prodotto vettoriale fornisce quindi la condizione

$$\left|\det\begin{pmatrix} x_0 & y_0-2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right|=4,$$

ovvero $|x_0+y_0-2|=2$. Si ottengono così due sistemi di equazioni nelle incognite x_0 e y_0:

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2-3x_0-3y_0+2=0, \\ x_0+y_0=4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_0^2+y_0^2-3x_0-3y_0+2=0, \\ x_0+y_0=0. \end{cases}$$

Il secondo sistema è privo di soluzioni reali (la retta $y=-x$ non interseca la circonferenza $\mathcal{C}$), mentre il primo sistema ha due soluzioni: $(1,3)$ e $(3,1)$. Inoltre, affinché P_0 appartenga all'arco richiesto, deve essere $x_0+y_0\geq 2$, condizione che i punti $(1,3)$ e $(3,1)$ verificano. Dunque i due punti richiesti sono $A(1,3)$ e $B(3,1)$, intersezioni della retta $x+y=4$ con la circonferenza $\mathcal{C}$ (Figura 2).

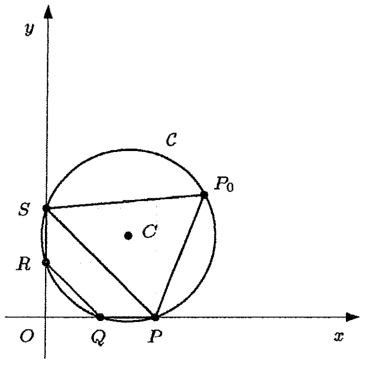

Figura 1.

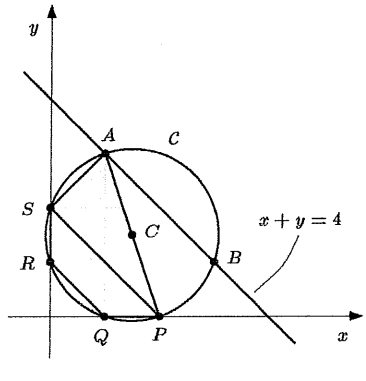

Figura 2.

(c) Il centro di $\mathcal{C}$ è $C(3/2, 3/2)$ e la retta r ha equazione $x + y = 1$ (vedi Figura 3). La retta s passante per C e perpendicolare ad r ha dunque equazione $x - y = 0$. Il piede della perpendicolare ad r condotta da C è il punto H di intersezione tra r ed s, dunque $H(1/2, 1/2)$. Osserviamo ora che H è il punto medio tra C e il suo simmetrico C' rispetto alla retta r. Dunque

$$x_H = \frac{x_C + x_{C'}}{2} \quad \text{e} \quad y_H = \frac{y_C + y_{C'}}{2},$$

da cui segue $x_{C'} = 2x_H - x_C = -1/2$ e $y_{C'} = 2y_H - y_C = -1/2$. Quindi $C' = (-1/2, -1/2)$.

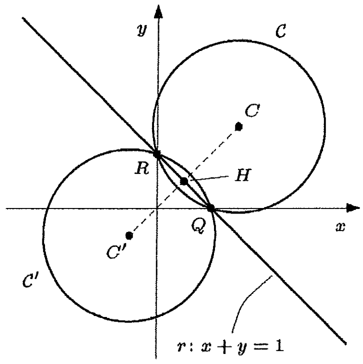

Figura 3.

(d) Il raggio di $\mathcal{C}'$ è lo stesso di $\mathcal{C}$, quindi il suo quadrato vale $\overline{CP}^{\,2} = 5/2$. Allora $\mathcal{C}'$ ha equazione

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}, \quad \text{ovvero} \quad x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

Esercizio 4. Nello spazio euclideo, con riferimento cartesiano $\mathrm{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si considerino le rette

$$r\colon \begin{cases} x = z + 1, \\ y = z \end{cases} \quad \text{ed} \quad s\colon \begin{cases} x = -z + 2, \\ y = 3z. \end{cases}$$

(a) Verificare che le rette r ed s sono sghembe.

(b) Determinare il coseno dell'angolo acuto formato dai loro vettori direttori.

(c) Scrivere le equazioni della retta t incidente e perpendicolare ad entrambe le rette r ed s.

(d) Determinare la distanza tra le rette r ed s.

Soluzione. **(a)** Ricordiamo che la condizione di complanarità tra due rette rappresentate con equazioni cartesiane ridotte del tipo

$$\begin{cases} x = lz + p, \\ y = mz + q \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = l'z + p', \\ y = m'z + q' \end{cases} \quad \text{è data da} \quad \det\begin{pmatrix} l - l' & p - p' \\ m - m' & q - q' \end{pmatrix} = 0.$$

Tale determinante, calcolato per le rette r ed s, vale $-2 \neq 0$, e pertanto r ed s sono sghembe.

(b) I vettori direttori di r ed s sono, rispettivamente, $\mathbf{v}_r = (l_r, m_r, n_r) = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_s = (-1, 3, 1)$. Allora, il coseno dell'angolo acuto θ tra $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}_s$ vale

$$\cos\theta = \frac{|\langle \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_s \rangle|}{\|\mathbf{v}_r\|\,\|\mathbf{v}_s\|} = \frac{|-1 + 3 + 1|}{\sqrt{3}\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{3}{11}}.$$

(c) Presentiamo due metodi alternativi.

Primo metodo. Scriviamo le equazioni cartesiane ridotte della retta t:

$$t\colon \begin{cases} x = lz + p, \\ y = mz + q. \end{cases}$$

Per quanto ricordato in **(a)**, le condizioni di complanarità di t con r ed s danno, rispettivamente,

$$\det\begin{pmatrix} l-1 & p-1 \\ m-1 & q \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \det\begin{pmatrix} l+1 & p-2 \\ m-3 & q \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero $q(l-1)-(m-1)(p-1)=0$ e $q(l+1)-(m-3)(p-2)=0$. D'altra parte, le condizioni di perpendicolarità di t con r ed s si traducono, rispettivamente, nelle equazioni $l+m+1=0$ e $-l+3m+1=0$. Queste ultime due equazioni danno $l=m=-1/2$. Sostituendo nelle prime due equazioni, si ottiene $p=15/8$ e $q=7/8$. Dunque la retta t ha equazioni cartesiane

$$t\colon \begin{cases} 8x+4z=15, \\ 8y+4z=7. \end{cases} \tag{1}$$

Secondo metodo. Il fascio di piani per r ha equazione $\lambda(x-z-1)+\mu(y-z)=0$, ovvero

$$\lambda x+\mu y+(-\lambda-\mu)z-\lambda=0. \tag{2}$$

Tra questi, il piano α parallelo ad s è quello per cui $(\lambda,\mu,-\lambda-\mu)\perp(-1,3,1)$, condizione che dà $\lambda=\mu$. Quindi $\alpha\colon x+y-2z=1$. Analogamente, il fascio di piani per s ha equazione $\nu(x+z-2)+\chi(y-3z)=0$, ovvero

$$\nu x+\chi y+(\nu-3\chi)z-2\nu=0. \tag{3}$$

Tra questi, il piano α' parallelo ad r è quello per cui $(\nu,\chi,\nu-3\chi)\perp(1,1,1)$, condizione che dà $\nu=\chi$. Quindi $\alpha'\colon x+y-2z=2$. I piani α ed α' contengono, rispettivamente, le rette r ed s e sono paralleli tra loro, entrambi perpendicolari al vettore $(1,1,-2)$.

Tra i piani per r (equazione (2)), il piano β perpendicolare ad α, quindi parallelo al vettore $(1,1,-2)$ è quello per cui $(\lambda,\mu,-\lambda-\mu)\perp(1,1,-2)$, condizione che dà $\lambda=-\mu$. Quindi $\beta\colon x-y=1$. Similmente, tra i piani per s (equazione (3)), il piano β' perpendicolare ad α è quello per cui $(\nu,\chi,-\nu-3\chi)\perp(1,1,-2)$, condizione che dà $\nu=7\chi$. Quindi $\beta'\colon 7x+y+4z=14$.

La retta t è allora l'intersezione dei piani β e β':

$$t\colon \begin{cases} x-y=1, \\ 7x+y+4z=14. \end{cases} \tag{4}$$

(Nonostante le equazioni per t ottenute in (1) e (4) non si somiglino affatto, queste rappresentano la stessa retta, infatti la prima equazione di (4) è la differenza tra le due equazioni di (1), mentre la seconda equazione di (4) è la combinazione lineare di queste con coefficienti 7/8 e 1/8.)

(d) Le coordinate dei punti R, intersezione di r e t, ed S, intersezione di s e t, si ottengono risolvendo i rispettivi sistemi lineari e si ha $R(19/12,7/12,7/12)$ ed $S(7/4,3/4,1/4)$. Allora

$$\operatorname{dist}(r,s)=\operatorname{dist}(R,S)=\sqrt{\left(\frac{21-19}{12}\right)^2+\left(\frac{9-7}{12}\right)^2+\left(\frac{3-7}{12}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Geometria Analitica 2006/2007

Soluzioni della seconda prova in itinere del 17 gennaio 2007

Proff. Renzo Mazzocco e Paolo Piccinni

Tutor: Federico Incitti

Esercizio 1. Nel piano euclideo ordinario $\mathbf{E}^2$, con riferimento cartesiano $\mathrm{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, si consideri l'applicazione $f \colon \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ definita da $f(x, y) = (x', y')$, con

$$\begin{cases} x' = (-x\sqrt{3} + y + 1)/2, \\ y' = (x + y\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2)/2. \end{cases}$$

(a) Verificare che f è una simmetria ortogonale rispetto ad una retta.

(b) Determinare l'equazione cartesiana dell'asse di simmetria.

(c) Determinare l'equazione cartesiana della retta r, immagine tramite f dell'asse y.

Soluzione. **(a)** La matrice asociata ad f nel riferimento cartesiano assegnato è

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Come si verifica facilmente, A è ortogonale e si ha $\det A = -1$, cioè $A \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$. Allora f è un'isometria inversa. Cerchiamo i punti fissati da f, che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = (-x\sqrt{3} + y + 1)/2, \\ y = (x + y\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2)/2, \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} (2 + \sqrt{3})x - y = 1, \\ x - (2 - \sqrt{3})y = 2 - \sqrt{3}. \end{cases}$$

Le due equazioni sono proporzionali (la seconda è $2 - \sqrt{3}$ per la prima), dunque f ammette punti fissi. Allora, per il teorema di Chasles, f è un'isometria ortogonale rispetto ad una retta.

(b) L'asse di simmetria di una riflessione f è luogo dei punti fissati da f. Quindi ciascuna delle due equazioni del precedente sistema rappresentano tale retta, che ha quindi equazione

$$y = (2 + \sqrt{3})x - 1.$$

(c) Due punti dell'asse y sono, ad esempio, $O \equiv (0, 0)$ e $P \equiv (0, 1)$. La retta r, immagine tramite f dell'asse y, è dunque la retta passante per i due punti $O' = f(O)$ e $P' = f(P)$. Si ottiene

$$O' \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3} - 2}{2}\right) \quad \text{e} \quad P' \equiv (1, \sqrt{3} - 1).$$

Dunque l'equazione di r è

$$\frac{x - 1/2}{1 - 1/2} = \frac{y - (\sqrt{3} - 2)/2}{\sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} - 2)/2},$$

ovvero

$$r \colon y = x\sqrt{3} - 1.$$

Esercizio 2. Si consideri la matrice simmetrica reale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di A.

(c) Mostrare che la matrice ortogonale C di passaggio dalla base canonica $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ di $\mathbf{R}^4$ alla base $\mathcal{B}'$, ottenuta da $\mathcal{B}$ riordinando opportunamente i suoi vettori, è il prodotto di due matrici C_1 e C_2 che inducono rotazioni rispettivamente sui piani x_1x_4 e x_2x_3 di $\mathbf{R}^4$.

(d) Determinare gli angoli orientati delle rotazioni nei piani x_1x_4 e x_2x_3 individuate da C_1 e C_2.

Soluzione. **(a)** Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)^4 - 2(\lambda-1)^2 + 1 = [(\lambda-1)^2 - 1]^2.$$

Dunque gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$, entrambi con molteplicità algebrica 2.

Gli autospazi $E(0)$ ed $E(2)$ hanno entrambi dimensione 2, essendo descritti, rispettivamente, da

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Quindi entrambi gli autovalori hanno molteplicità geometrica 2. Osserviamo che la coincidenza tra molteplicità algebriche e geometriche dei due autovalori implica il fatto che A è diagonalizzabile.

(b) Si ha $E(0) = \mathrm{Span}((1,0,0,-1),(0,1,-1,0)$ e $E(2) = \mathrm{Span}((1,0,0,1),(0,1,1,0))$. Inoltre i quattro vettori $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,-1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (1,0,0,1)$ e $\mathbf{v}_4 = (0,1,1,0)$ sono a due a due ortogonali. Quindi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ è una base ortogonale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di A. I vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ hanno tutti norma $\sqrt{2}$ e normalizzandoli otteniamo

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \; \mathbf{u}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \; \mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \; \mathbf{u}_4 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

La base $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ è una base ortonormale formata da autovettori di A.

(c) Se poniamo $\mathcal{B}' = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_3)$, la matrice di passaggio dalla base canonica a $\mathcal{B}'$ è

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Si ha allora $C = C_1C_2$, dove

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le matrici C_1 e C_2 inducono evidentemente rotazioni sui piani x_1x_4 e x_2x_3, rispettivamente.

(c) Essendo $1/\sqrt{2} = \cos(-\pi/4)$ e $-1/\sqrt{2} = \mathrm{sen}(-\pi/4)$, si ha che l'angolo orientato di entrambe le rotazioni associate alle matrici C_1 e C_2, rispettivamente sui piani x_1x_4 e x_2x_3, è di $-\pi/4$.

Esercizio 3. Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si considerino

$$r_1 : \begin{cases} x_0 + x_1 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x_0 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad r_1 : \begin{cases} x_0 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

(a) Verificare che le rette r_1, r_2 ed r_3 sono a due a due incidenti, determinando le coordinate omogenee dei punti di intersezione $A = r_1 \cap r_2$, $B = r_1 \cap r_3$ e $C = r_2 \cap r_3$.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente le rette r_1, r_2 ed r_3.

(c) Siano α, β e γ i piani di $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ le cui equazioni cartesiane hanno come coefficienti le coordinate omogenee dei punti A, B e C, rispettivamente. Verificare che i piani α, β e γ si intersecano in un punto P, determinando le sue coordinate omogenee.

(d) Interpretare, in termini della dualità in $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$, la coincidenza tra le coordinate omogenee di P e i coefficienti dell'equazione cartesiana di π.

Soluzione. **(a)** Le coordinate dei punti di intersezione si trovano risolvendo i seguenti sistemi:

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} x_0 + x_1 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_0 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \end{cases} \quad r_1 \cap r_3 : \begin{cases} x_0 + x_1 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_0 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \cap r_3 : \begin{cases} x_0 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_0 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Tutti e tre i sistemi ammettono soluzioni non nulle, dunque le rette r_1, r_2 ed r_3 sono a due a due incidenti. Risolvendoli si ottiene $A \equiv [1, -1, -1, 1]$, $B \equiv [1, -1, 1, -1]$ e $C \equiv [1, 1, -1, -1]$.

(b) Il piano π contenente le tre rette è il piano passante per A, B e C. La sua equazione è

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero

$$\pi : x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

(c) Dalla definizione dei piani α, β e γ si ha

$$\alpha : x_0 - x_1 - x_2 + x_3 = 0, \quad \beta : x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad \gamma : x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Le coordinate omogenee di $P = \alpha \cap \beta \cap \gamma$ sono le soluzioni non nulle del sistema lineare omogeneo formato dalle precedenti tre equazioni. Queste si ottengono, ad esempio, considerando i minori a segni alterni della matrice dei coefficienti del sistema. Si ha dunque $P \equiv [1, 1, 1, 1]$.

(d) I piani α, β e γ si $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ possono essere identificati con i punti A', B' e C' dello spazio proiettivo duale, che hanno come coordinate omogenee i coefficienti delle equazioni di α, β e γ, rispettivamente. Quindi $A' \equiv [1, -1, -1, 1]$, $B' \equiv [1, -1, 1, -1]$ e $C' \equiv [1, 1, -1, -1]$, ovvero A', B' e C' hanno le stesse coordinate dei punti A, B e C. Allora il punto $P = \alpha \cap \beta \cap \gamma$ corrisponde, nella dualità, al piano generato dai tre punti A', B' e C', che per quanto visto nel punto **(b)** ha nelle coordinate dello spazio duale la stessa equazione del piano π. A conferma di ciò osserviamo che le coordinate omogenee del punto P coincidono con i coefficienti dell'equazione cartesiana del piano π.

Esercizio 4. Nel piano affine reale $\mathbf{A}^2$, con piano vettoriale associato $\mathbf{V}$ e riferimento $\mathrm{RA}(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$, si consideri la conica di equazione

$$\mathcal{C}\colon 6x^2 + 6xy + 6y^2 + 6x + 6y + 1 = 0.$$

(a) Determinare il tipo affine di $\mathcal{C}$ e, se esiste, determinare il suo centro di simmetria.

(b) Sia $q\colon \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ la forma quadratica associata ai termini di secondo grado che compaiono nell'equazione di $\mathcal{C}$. Determinare una base $\mathcal{B}' = (\mathbf{i}',\mathbf{j}')$ di $\mathbf{V}$ che diagonalizzi q.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$ rispetto al riferimento $\mathrm{RA}(O,\mathbf{i}',\mathbf{j}')$.

(d) Determinare un opportuno riferimento affine rispetto al quale l'equazione di $\mathcal{C}$ assuma la sua forma canonica affine e scrivere tale equazione.

Soluzione. **(a)** La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & \boxed{\begin{matrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{matrix}} \end{pmatrix},$$

dove abbiamo evidenziato la sottomatrice A_0 associata alla parte quadratica della sua equazione. Si ha

$$\det A = -27 \neq 0 \quad \text{e} \quad \det A_0 = 27 > 0,$$

quindi la conica $\mathcal{C}$ è un'ellisse non degenere. Il centro C si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3 + 6x + 3y = 0, \\ 3 + 3x + 6y = 0, \end{cases} \quad \text{dunque} \quad C \equiv \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

(b) Si ha $q(\mathbf{v}) = 6x^2 + 6xy + 6y^2$, per $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \in \mathbf{V}$. Sia $b\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ la forma bilineare simmetrica associata a q, dunque $b(\mathbf{v},\mathbf{v}') = 6xx' + 3xy' + 3yx' + 6yy'$, per $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ e $\mathbf{v}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} \in \mathbf{V}$. Un vettore non isotropo rispetto a b è, ad esempio, il vettore $\mathbf{i}$, essendo $b(\mathbf{i},\mathbf{i}) = q(\mathbf{i}) = 6 \neq 0$. Lo spazio ortogonale $\mathbf{i}^\perp$ è l'insieme dei vettori $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ tali che $b(\mathbf{v},\mathbf{i}) = 0$, ovvero tali che $6x + 3y = 0$. Dunque si ha

$$\mathbf{i}^\perp = \mathrm{Span}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}).$$

Anche il vettore $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ è non isotropo, essendo $q(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = 18 \neq 0$. Se poniamo $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$ e $\mathbf{j}' = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, abbiamo che la base $\mathcal{B}' = (\mathbf{i}',\mathbf{j}')$ diagonalizza q.

(c) La matrice di passaggio dalla base $(\mathbf{i},\mathbf{j})$ alla base $(\mathbf{i}',\mathbf{j}')$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

quindi le formule di cambiamento di coordinate di vettore dalla base $(\mathbf{i},\mathbf{j})$ alla base $(\mathbf{i}',\mathbf{j}')$ sono

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = x' + y', \\ y = -2y'. \end{cases}$$

Poichè i due riferimenti affini $\mathrm{RA}(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$ e $\mathrm{RA}(O,\mathbf{i}',\mathbf{j}')$ hanno la stessa origine, tali formule danno anche la trasformazione di coordinate di punto dal primo al secondo riferimento. Effettuando le sostituzioni date da queste formule nell'equazione di $\mathcal{C}$, otteniamo

$$\mathcal{C}\colon 6(x')^2 + 18(y')^2 + 6x' - 6y' + 1 = 0.$$

(d) La traslazione del riferimento affine $\mathrm{RA}(O,\mathbf{i}',\mathbf{j}')$ di vettore $\overrightarrow{OC}$, descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} x' = x'' - 1/2, \\ y' = y'' + 1/6, \end{cases}$$

consente di eliminare i termini di primo grado. Sostituendo, otteniamo

$$\mathcal{C}\colon 6(x'')^2 + 18(y'')^2 - 1 = 0.$$

Infine, normalizzando attraverso le formule

$$\begin{cases} x'' = x'''/\sqrt{6}, \\ y'' = y'''/3\sqrt{2} \end{cases}$$

otteniamo l'equazione canonica affine della conica $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}\colon (x''')^2 + (y''')^2 = 1.$$

Questa è ottenuta rispetto al riferimento affine $\mathrm{RA}(C,\mathbf{i}''',\mathbf{j}''')$, dove $C \equiv (-1/3,-1/3)$ è il centro e

$$\mathbf{i}''' = \frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} \quad \text{e} \quad \mathbf{j}''' = \frac{\sqrt{2}}{6}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{j}.$$

Geometria Analitica 2006/2007

Primo appello - 23 gennaio - Testi e soluzioni

Proff. Renzo Mazzocco e Paolo Piccinni

Tutor: Federico Incitti

Esercizio 1. Nello spazio euclideo ordinario, con riferimento cartesiano $\mathrm{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si considerino i punti $A(1,1,1)$ e $C(2,0,1)$ e la retta $r\colon x = y = z$.

(a) Determinare il piano p passante per i punti A e C e perpendicolare alla retta r.

(b) Determinare su p due punti B e D in modo tale che $ABCD$ sia un rombo di area $\sqrt{3}$.

Soluzione. (a) Il piano p può essere ottenuto imponendo al generico piano del fascio di piani di asse la retta s passante per A e C, la perpendicolarità con r. La retta s ha equazioni cartesiane

$$s\colon \begin{cases} x + y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$$

Il fascio di piani di asse la retta r ha equazione cartesiana

$$x + y - 2 + k(z - 1) = 0, \quad \text{ovvero} \quad x + y + kz = k + 2.$$

La condizione di perpendicolarità con la retta r dà $k = 1$, dunque il piano richiesto p ha equazione

$$p\colon x + y + z = 3.$$

(b) Osserviamo prima di tutto che i punti B e D devono appartenere all'asse a del segmento AC sul piano p. Detto q il piano passante per il punto medio $M(3/2, 1/2, 1)$ di AC, si ha $a = p \cap q$. Essendo $\overrightarrow{AC} = (1, -1, 0)$, il piano q ha equazione cartesiana

$$q\colon \left(x - \frac{3}{2}\right) - \left(y - \frac{1}{2}\right) = 0, \quad \text{ovvero} \quad x - y = 1.$$

Allora le equazioni cartesiane della retta a sono

$$a\colon \begin{cases} x + y + z = 3, \\ x - y = 1 \end{cases}$$

e le sue equazioni parametriche sono

$$a\colon \begin{cases} x = t + 1, \\ y = t, \\ z = -2t + 2 \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Allora il punto generico dell'asse a è $P(t + 1, t, -2t + 2)$. Le lunghezze dei segmenti AC ed MP valgono, rispettivamente,

$$\overline{AC} = \sqrt{2} \quad \text{ed} \quad \overline{MP} = \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + (-2t + 1)^2} = \sqrt{\frac{3(2t^2 - 2t + 1)}{2}}.$$

Allora l'area del generico rombo sul piano p avente A e C come vertici opposti vale

$$\overline{AC} \cdot \overline{MP} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3(2t^2 - 2t + 1)}{2}} = \sqrt{3(2t^2 - 2t + 1)}.$$

La condizione sull'area dà

$$\sqrt{3(2t^2 - 2t + 1)} = \sqrt{3}, \quad \text{ovvero} \quad t^2 - t = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione sono $t = 0$ e $t = 1$, dunque i punti B e D richiesti si trovano sostituendo tali valori nell'equazione parametrica di a. Si ottiene $B(1, 0, 2)$ e $D(2, 1, 0)$.

Esercizio 2. Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, con prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$, e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ una sua base ortonormale. Sia assegnato l'endomorfismo $R\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definito da

$$R(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}z\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{\sqrt{3}}{4}z\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{3}{4}z\right)\mathbf{k}.$$

(a) Determinare la matrice associata ad R rispetto a $\mathcal{B}$.

(b) Verificare che R è una rotazione di $\mathbf{V}$.

(c) Determinare l'asse vettoriale $\mathbf{W}$ della rotazione R, indicandone un vettore unitario.

(d) Determinare l'angolo convesso della rotazione R.

Soluzione. (a) La matrice associata ad R rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

(b) Risulta

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre $\det A = 3/16 + 3/16 + 1/16 + 9/16 = 1$. Dunque $A \in \mathrm{SO}(3)$ ed R è una rotazione.

(c) L'asse $\mathbf{W}$ è l'autospazio relativo all'autovalore 1 di R, dunque si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -x - y\sqrt{3}/2 - z/2 = 0, \\ x\sqrt{3}/2 - 3y/4 - z\sqrt{3}/4 = 0, \\ x/2 - y\sqrt{3}/4 - z/4 = 0, \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} 2x + y\sqrt{3} + z = 0, \\ 2x\sqrt{3} - 3y - z\sqrt{3} = 0, \\ 2x - y\sqrt{3} - z = 0. \end{cases}$$

Sommando la prima e la terza equazione, si ottiene $x = 0$. Sostituendo $x = 0$ nelle tre equazioni, queste diventano tutte equivalenti a $y\sqrt{3} + z = 0$. Dunque

$$\mathbf{W} = \{y\mathbf{j} + z\mathbf{k} : y\sqrt{3} + z = 0\} = \{t(\mathbf{j} - \mathbf{k}\sqrt{3}) : t \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Span}(\mathbf{j} - \mathbf{k}\sqrt{3}).$$

Un vettore unitario di $\mathbf{W}$ è, ad esempio,

$$\frac{\mathbf{j} - \mathbf{k}\sqrt{3}}{\|\mathbf{j} - \mathbf{k}\sqrt{3}\|} = \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}.$$

(d) In generale, per una rotazione R con matrice associata A, si ha $\mathrm{trA} = 2\cos\varphi + 1$, con $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Nel nostro caso si ha $\mathrm{tr}A = 1$, dunque deduciamo $\cos\varphi = 0$, da cui segue $\varphi = \pi/2$.

Esercizio 3. Nel piano euclideo, con riferimento cartesiano $\mathrm{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, sia assegnata la conica

$$\mathcal{C}\colon 2x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + 2y - 1 = 0.$$

(a) Verificare che $\mathcal{C}$ è una parabola (generale).

(b) Determinare l'equazione canonica euclidea della parabola $\mathcal{C}$, preferibilmente usando il metodo dei seminvarianti metrici.

Soluzione. (a) Risulta

$$\mathcal{A} = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = -8 \neq 0 \quad \text{ed} \quad \mathcal{A}_{00} = \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

quindi $\mathcal{C}$ è una parabola generale.

(b) I seminvarianti metrici dell'equazione cartesiana assegnata di $\mathcal{C}$ sono

$$\mathcal{A} = -8, \quad \mathcal{A}_{00} = 0 \quad \text{ed} \quad \mathcal{I} = 2 + 2 = 4.$$

L'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}$ deve essere del tipo

$$(y')^2 - 2px' = 0 \quad (p > 0).$$

Ciò significa che effettuando un cambiamento di riferimento cartesiano opportuno l'equazione di $\mathcal{C}$ diventa $\rho((y')^2 - 2px') = 0$, essendo ρ un opportuno fattore di proporzionalità non nullo.

I seminvarianti metrici di questa nuova equazione sono

$$\mathcal{A}' = \det\begin{pmatrix} 0 & -\rho p & 0 \\ -\rho p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} = -\rho^3 p^2, \quad \mathcal{A}'_{00} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ed} \quad \mathcal{I}' = 0 + \rho = \rho.$$

Imponendo $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}'_{00} = \mathcal{A}_{00}$ ed $\mathcal{I}' = \mathcal{I}$, otteniamo

$$-\rho^3 p^2 = -8, \quad 0 = 0 \quad \text{e} \quad \rho = 4,$$

da cui segue $p^2 = 1/8$, ovvero $p = 1/2\sqrt{2}$. Pertanto l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}$ è

$$(y')^2 - \frac{x'}{\sqrt{2}} = 0.$$

Esercizio 4. Nello spazio euclideo, con riferimento $\mathrm{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Sia dato il paraboloide iperbolico

$$\Sigma \colon z = 3x^2 - 4y^2.$$

(a) Scrivere le equazioni cartesiane, rispettivamente nelle coordinate (x, y), (x, z), (y, z), delle tre coniche $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ intersezione di Σ rispettivamente con i piani coordinati $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

(b) Stabilire per ognuna delle tre coniche $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ se si tratta di conica generale, semplicemente degenere o doppiamente degenere.

(c) Scrivere le equazioni cartesiane delle due schiere di rette che rigano Σ.

(d) Determinare le due rette di Σ che passano per il punto $P(1/\sqrt{3}, 1/2, 0)$ di Σ.

Soluzione. **(a)** Le equazioni delle tre coniche richieste si ottengono subito dall'equazione assegnata di Σ ponendo in essa nell'ordine $z = 0$, $y = 0$ ed $x = 0$. Si ha quindi:

$$\mathcal{C}_1 \colon 3x^2 - 4y^2 = 0, \quad \mathcal{C}_2 \colon z = 3x^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_3 \colon z = -4y^2.$$

(b) L'equazione di $\mathcal{C}_1$ si può scrivere $(x\sqrt{3} + 2y)(x\sqrt{3} - 2y) = 0$, dunque $\mathcal{C}_1$ è l'unione delle due rette distinte $y = \pm x\sqrt{3}/2$. Si vede immediatamente che $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ sono parabole non degeneri.

(c) L'equazione cartesiana di Σ si può anche scrivere nella forma

$$z = (x\sqrt{3} + 2y)(x\sqrt{3} - 2y).$$

Poiché quest'ultima equazione può essere ottenuta eliminando il parametro t_1 (rispettivamente, t_2) in ognuna delle seguenti coppie di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} z = t_1(x\sqrt{3} + 2y), \\ t_1 = x\sqrt{3} - 2y, \end{cases} \quad \text{rispettivamente} \quad \begin{cases} z = t_2(x\sqrt{3} - 2y), \\ t_2 = x\sqrt{3} + 2y, \end{cases}$$

si ha che al variare di t_1 e t_2 in $\mathbf{R}$ tali sistemi descrivono le due schiere di rette che rigano Σ.

(d) Le due rette di Σ che passano per $P(1/\sqrt{3}, 1/2, 0)$ appartengono all'una e all'altra schiera. Sostituendo nelle equazioni delle due schiere le coordinate di P si ottiene rispettivamente $t_1 = 0$ e $t_2 = 2$. Le equazioni delle due rette richieste sono quindi

$$\begin{cases} z = 0, \\ x\sqrt{3} - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z = 2(x\sqrt{3} - 2y), \\ x\sqrt{3} + 2y = 2. \end{cases}.$$

Geometria Analitica 2006/2007

Secondo appello - 5 febbraio - Testi e soluzioni

Proff. Renzo Mazzocco e Paolo Piccinni

Tutor: Federico Incitti

Esercizio 1. Nello spazio euclideo ordinario, con riferimento cartesiano $\mathrm{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si considerino

$$\text{il piano} \quad p\colon 2(x+y+z) = 1 \quad \text{e la retta} \quad r\colon \begin{cases} x + z = 0, \\ y + z\sqrt{6} = 1. \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano q passante per l'origine O e perpendicolare ad r.

(b) Determinare la distanza di O da r.

(c) Calcolare l'angolo acuto φ formato da r e p.

(d) Calcolare l'angolo acuto θ formato dai piani p e q.

(e) Determinare il versore della retta r orientata verso l'alto.

Soluzione. (a) Le equazioni parametriche di r sono

$$r\colon \begin{cases} x = t, \\ y = 1 + t\sqrt{6}, \\ z = -t \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

quindi i parametri direttori di r sono, ad esempio, $(l, m, n) = (1, \sqrt{6}, -1)$. Dunque il piano q passante per O e perpendicolare ad r ha equazione cartesiana

$$q\colon x + y\sqrt{6} - z = 0.$$

(b) Il piede della perpendicolare condotta da O su r è il punto $H = r \cap q$. Allora le coordinate del punto H si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y + z\sqrt{6} = 1, \\ x + y\sqrt{6} - z = 0, \end{cases}$$

che fornisce $x = -\sqrt{6}/8$, $y = 1/4$ e $z = \sqrt{6}/8$. Dunque $H(-\sqrt{6}/8, 1/4, \sqrt{6}/8)$ e si ha

$$\mathrm{dist}(O, r) = \mathrm{dist}(O, H) = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{6}}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{32} + \frac{1}{16} + \frac{3}{32}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

(c) Un vettore ortogonale a p è $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e un vettore parallelo ad r è $\mathbf{i} + \mathbf{j}\sqrt{6} - \mathbf{k}$. Allora

$$\mathrm{sen}\varphi = \frac{|\langle \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{j}\sqrt{6} - \mathbf{k} \rangle|}{\|\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\| \cdot \|\mathbf{i} + \mathbf{j}\sqrt{6} - \mathbf{k}\|} = \frac{|1 + \sqrt{6} - 1|}{\sqrt{3}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}, \quad \text{quindi} \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

(d) Poichè q è perpendicolare ad r, si ha

$$\cos\theta = \mathrm{sen}\varphi = \frac{1}{2}, \quad \text{quindi} \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

(e) I versori che hanno la direzione della retta r sono

$$\pm \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}\sqrt{6} - \mathbf{k}}{\|\mathbf{i} + \mathbf{j}\sqrt{6} - \mathbf{k}\|} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}\sqrt{6} - \mathbf{k}) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} - \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{k}\right).$$

L'orientazione verso l'alto implica che la terza coordinata sia positiva, dunque il versore richiesto è

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{k}.$$

Esercizio 2. Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 4, con prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$, e sia $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ una sua base ortonormale. Sia $F\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ l'endomorfismo definito da

$$F(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \rangle (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4)$$

(si noti che a secondo membro ci sono due parentesi angolate seguite da due parentesi tonde).

(a) Determinare la matrice A associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(b) Verificare che F è un endomorfismo simmetrico.

(c) Determinare una base ortonormale di $\mathbf{V}$ costituita da autovettori di F.

Soluzione. **(a)** Risulta

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad F(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1, \\
\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \rangle = 1 \quad &\Rightarrow \quad F(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4) = -\mathbf{v}_4, \\
\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad F(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3, \\
\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 \rangle = 1 \quad &\Rightarrow \quad F(\mathbf{v}_4) = \mathbf{v}_4 - (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4) = -\mathbf{v}_2.
\end{aligned}$$

Dunque la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) L'endomorfismo F è simmetrico, essendo simmetrica la matrice A ad esso associata.

(c) Il polinomio caratteristico di F è

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)[\lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda)] = (\lambda-1)^3(\lambda+1),$$

dunque gli autovalori di F sono $\lambda_1 = -1$, con molteplicità algebrica 1, e $\lambda_2 = 1$, con molteplicità algebrica 3. I rispettivi autospazi $\mathbf{V}_{-1}$ e $\mathbf{V}_1$ sono dati dalle soluzioni dei sistemi omogenei

$$\mathbf{V}_{-1}\colon \begin{cases} 2x_1 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_3 = 0, \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_1\colon \begin{cases} 0 = 0, \\ -x_2 - x_4 = 0, \\ 0 = 0, \\ -x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

I sistemi hanno risp. soluzioni $\{(0,t,0,t) : t \in \mathbf{R}\}$ e $\{(t_1, t_2, t_3, -t_2) : t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}\}$, dunque

$$\mathbf{V}_{-1} = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4) \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_1 = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3).$$

Allora una base ortonormale di $\mathbf{V}_{-1}$ è costituita dall'autovettore $\mathbf{v}'_1 = (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4)/\sqrt{2}$, e una base ortonormale di $\mathbf{V}_1$ è costituita dai tre autovettori $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}'_3 = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4)/\sqrt{2}$ e $\mathbf{v}'_4 = \mathbf{v}_3$. Inoltre sappiamo che, in generale, ad autovalori distinti corrispondono autovettori ortogonali. Dunque una base ortonormale di $\mathbf{V}$ formata da autovettori di F è $\mathcal{B}' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3, \mathbf{v}'_4)$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio affine ordinario ampliato, con riferimento $\mathrm{RA}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e coordinate affini omogenee (x_0, x_1, x_2, x_3), tali che $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$ e $z = x_3/x_0$.

(a) Verificare che i tre punti $P_0(1,-1,0,0)$, $P_1(0,1,1,0)$ e $P_2(0,1,1,1)$ sono in posizione generale, ovvero che sono linearmente indipendenti, e determinare l'equazione cartesiana omogenea e le equazioni parametriche omogenee del piano p da essi individuato.

(b) Determinare le equazioni cartesiane omogenee e le equazioni parametriche omogenee della retta r passante per i punti $Q_0(0,1,-1,0)$ e $Q_1(0,1,1,1)$.

(c) Determinare le coordinate affini omogenee del punto $A = p \cap r$.

Soluzione. **(a)** Risulta

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

dunque i punti assegnati sono linearmente indipendenti. L'equazione cartesiana del piano p è

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{ovvero} \quad p\colon x_0 + x_1 - x_2 = 0.$$

Le equazioni parametriche di p si possono ottenere, ad esempio, imponendo che la prima riga della precedente matrice sia combinazione lineare delle altre tre:

$$p\colon \begin{cases} x_0 = t_1, \\ x_1 = -t_1 + t_2 + t_3, \\ x_2 = t_2 + t_3, \\ x_3 = t_3 \end{cases} \qquad (t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}).$$

(b) Le equazioni cartesiane omogenee di r si possono ottenere a partire dalla condizione

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Da questa si ottiene

$$r\colon \begin{cases} x_0 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Le equazioni parametriche di r sono

$$r\colon \begin{cases} x_0 = 0, \\ x_1 = s_1 + s_2, \\ x_2 = -s_1 + s_2, \\ x_3 = s_2 \end{cases} \qquad (s_1, s_2 \in \mathbf{R}).$$

(d) Le coordinate affini omogenee di A si ottengono risolvendo il sistema delle equazioni di p ed r:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 - x_2 = 0, \\ x_0 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Si ottiene dunque $A(0,1,1,1)$, ovvero $A = Q_1$.

Esercizio 4. Nel piano proiettivo numerico reale $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$, con coordinate omogenee (x_0, x_1, x_2), si consideri la conica $\mathcal{C}$ descritta dall'equazione

$$x_0^2 - 2x_0x_1 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$

(a) Determinare il tipo proiettivo di $\mathcal{C}$.

(b) Determinare un sistema opportuno di coordinate proiettive omogenee (x_0', x_1', x_2'), rispetto al quale $\mathcal{C}$ abbia equazione canonica proiettiva, e scrivere tale equazione.

Soluzione. **(a)** La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\det A = -2 \neq 0$, la conica $\mathcal{C}$ è generale. Come si verifica facilmente, il punto $P(0,1,0)$, ad esempio, è un punto appartenente a $\mathcal{C}$, dunque $\mathcal{C}$ è una conica generale a supporto non vuoto.

(b) La forma quadratica q associata all'equazione di $\mathcal{C}$ è $q(\mathbf{v}) = x_0^2 - 2x_0x_1 + 2x_1x_2 + x_2^2$, dove $\mathbf{v} = (x_0, x_1, x_2)$. La forma bilineare simmetrica polare di q è

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = x_0y_0 - x_0y_1 - x_1y_0 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2,$$

dove $\mathbf{v} = (x_0, x_1, x_2)$ e $\mathbf{w} = (y_0, y_1, y_2)$. Un vettore non isotropo rispetto a b è, ad esempio, $\mathbf{w}_0 = (1, 0, 0)$, essendo $q(1, 0, 0) = 1$. Risulta

$$\mathbf{w}_0^\perp : x_0 - x_1 = 0, \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{w}_0^\perp = \{(t_1, t_1, t_2) : t_1, t_2 \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Span}((1,1,0), (0,0,1)).$$

Un vettore non isotropo di $\mathbf{w}_0^\perp$ è, ad esempio, $\mathbf{w}_1 = (0, 0, 1)$; infatti risulta $q(0, 0, 1) = 1$. Si ha poi

$$\mathbf{w}_0^\perp \cap \mathbf{w}_1^\perp : \begin{cases} x_0 - x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{w}_0^\perp \cap \mathbf{w}_1^\perp = \{(t, t, -t) : t \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Span}((1, 1, -1)).$$

Posto $\mathbf{w}_2 = (1, 1, -1)$, risulta che $\mathcal{B} = (\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ è una base b-ortogonale e si ha

$$q(\mathbf{w}_0) = 1, \quad q(\mathbf{w}_1) = 1 \quad \text{e} \quad q(\mathbf{w}_2) = -2.$$

Allora, posto $\mathbf{v}_0 = \mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$ e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2/\sqrt{2}$, risulta che nella base $\mathcal{B}' = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ l'espressione di q è canonica. Indicate con (x_0', x_1', x_2') le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a tale base $\mathcal{B}'$, risulta

$$q(\mathbf{v}) = (x_0')^2 + (x_1')^2 - (x_2')^2,$$

Dunque, interpretando (x_0', x_1', x_2') come coordinate proettive omogenee, $\mathcal{C}$ ha equazione canonica

$$(x_0')^2 + (x_1')^2 - (x_2')^2 = 0.$$

Geometria Analitica (A-Z)
Soluzioni della prova scritta del 19.6.2007

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Spazio vettoriale numerico reale $V = \mathbf{R}^4$ di dimensione quattro. Base canonica $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

Sia assegnata la forma quadratica $q : V \to \mathbf{R}$, $q(\vec{v}) = -2x_2x_3 + 2x_3^2$, essendo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

i) Determinare la forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbf{R}$ polare di q.

ii) Determinare una base opportuna di V rispetto alla quale l'espressione di q sia canonica.

iii) Scrivere l'espressione canonica di q e dedurne il tipo di q.

Soluzione.

i) Risulta immediatamente $b(\vec{v}, \vec{w}) = -x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$, essendo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{w} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

ii) Un vettore non isotropo rispetto a b è, per esempio, $\vec{w}_1 = \vec{e}_3$; infatti risulta $q(\vec{e}_3) = 2 \neq 0$. Si ha $\vec{w}_1^{\perp} : -x_2 + 2x_3 = 0$, e quindi $\vec{w}_1^{\perp} = \{t_1\vec{e}_1 + t_2(2\vec{e}_2 + \vec{e}_3) + t_3\vec{e}_4\}_{t_1,t_2,t_3 \in \mathbf{R}}$. Un vettore non isotropo di $\vec{w}_1^{\perp}$ è, per esempio $\vec{w}_2 = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, essendo $q(\vec{w}_2) = -2 \neq 0$. Si ha poi $\vec{w}_1^{\perp} \cap \vec{w}_2^{\perp} : -x_2 + 2x_3 = 0,\ -x_2 = 0$, e quindi $\vec{w}_1^{\perp} \cap \vec{w}_2^{\perp} = \{t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_4\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}}$. Ora osserviamo che qualunque vettore $\vec{v} \in \vec{w}_1^{\perp} \cap \vec{w}_2^{\perp}$ è tale che $q(\vec{v}) = 0$, ossia è isotropo. Allora una base b-ortogonale di V può essere ottenuta aggiungendo i vettori isotropi p. es. $\vec{w}_3 = \vec{e}_1$ e $\vec{w}_4 = \vec{e}_4$. Dunque una base ortonormale è data da $\vec{v}_1' = \frac{\vec{e}_3}{\sqrt{2}}, \vec{v}_2' = \frac{2\vec{e}_2 + \vec{e}_3}{\sqrt{2}}, \vec{v}_3' = \vec{e}_1, \vec{v}_4' = \vec{e}_4$.

iii) L'espressione canonica di q è dunque $q(v) = (x_1')^2 - (x_2')^2$, dove (x_1', x_2', x_3', x_4') sono le coordinate rispetto alla base $\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3', \vec{v}_4'$. Il rango di q è dunque $r = 2$ e gli indici sono $(p, r-p) = (1, 1)$. q è dunque degenere e indefinita.

Esercizio 2. Spazio euclideo $RC(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Siano assegnati i punti $A(1,2,0), C(3,2,2)$ e il piano $p:\ 2x - y - 2z = 0$.

i) Verificare che i punti A e C appartengono al piano p.

ii) Scrivere equazioni cartesiane dell'asse r del segmento AC.

iii) Determinare i punti B e D di r che hanno distanza 1 dal piano coordinato yz.

iv) Calcolare l'area del quadrilatero $ABCD$.

Soluzione.

i) Le coordinate dei punti A e C soddisfano l'equazione cartesiana di p e quindi A e C appartengono a p.

ii) Risulta $r = p \cap p'$, essendo p' il piano passante per il punto medio M di AC e perpendicolare al vettore $\vec{AC}$. M ha coordinate $(2,2,1)$, $\vec{AC}$ ha coordinate $(2,0,2)$. Si ha quindi $p' : 2(x-2) + 2(z-1) = 0$, ossia $p' : x + z - 3 = 0$. Dunque le equazioni cartesiane di r sono $2x - y - 2z = 0$, $x + z - 3 = 0$. Da esse si hanno le equazioni parametriche di $r : x = 3 - t, y = 6 - 4t, z = t,\ t \in \mathbf{R}$.

iii) Un punto generico di r è dunque $P(3 - t, 6 - 4t, t)$. La condizione sulla distanza, essendo $x = 0$ l'equazione del piano yz, si esprime con $|3 - t| = 1$. Si hanno quindi i valori $t_1 = 2$ e $t_2 = 4$. I punti richiesti sono pertanto $B(1, -2, 2)$ e $D(-1, -10, 4)$.

iv) Per ottenere l'area del quadrilatero basta osservare che essa coincide con il modulo del prodotto vettoriale $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$. Tale area è dunque $|\ det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 2 \\ -2 & -12 & 4 \end{pmatrix} | = 12$.

Esercizio 3. Piano euclideo E^2 - $RC(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Sia assegnata la conica

$$\mathcal{C} : \quad x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 2x - 2\sqrt{3}y = 0.$$

i) Riconoscere il tipo euclideo di $\mathcal{C}$ e, se a centro, determinare le coordinate del centro P_0 di $\mathcal{C}$.

ii) Determinare un riferimento cartesiano opportuno rispetto al quale $\mathcal{C}$ abbia equazione canonica euclidea e scrivere tale equazione.

Soluzione.

i) La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ e dunque gli invarianti cubico, quadratico e lineare di $\mathcal{C}$ sono rispettivamente $\mathcal{A} = \det A = -8 \neq 0$, $\mathcal{A}_{00} = \det A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = -4 < 0$, $\mathcal{I} = 1 - 1 = 0$. Dunque $\mathcal{C}$ è un'iperbole equilatera (non degenere). Il centro P_0 di $\mathcal{C}$ ha coordinate $x = \frac{\mathcal{A}_{01}}{\mathcal{A}_{00}} = \frac{1}{2}, \frac{\mathcal{A}_{02}}{\mathcal{A}_{00}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ii) La forma quadratica $q : V \to \mathbf{R}$ associata ai termini di secondo grado dell'equazione di $\mathcal{C}$ è tale che $q(\vec{v}) = x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2$, essendo $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. L'operatore simmetrico $F : V \to V$ associato a q ha come matrice $A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di F sono le soluzioni dell'equazione caratteristica di A_{00}, ossia di $\lambda^2 - 4 = 0$, dunque $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. I corrispondenti autospazi si ottengono dai sistemi lineari omogenei rispettivamente $-x+\sqrt{3}y = 0, \sqrt{3}x-3y = 0$, da cui $V_2 = \{t(\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j})\}_{t\in\mathbf{R}}$ e $3x+\sqrt{3}y = 0, \sqrt{3}x + y = 0$, da cui $V_{-2} = \{t(\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})\}_{t\in\mathbf{R}}$. Una base ortonormale di autovettori per F è quindi data da $\vec{i}' = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j},\ \vec{j}' = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$. Le corrispondenti formule di trasformazione di coordinate di punto sono, essendo $O' = O$:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y', \qquad y = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y',$$

e sostituendo tali formule nell'equazione di $\mathcal{C}$, si ottiene la sua equazione

$$2(x')^2 - 2(y')^2 + 4y' = 0$$

nelle nuove coordinate (x', y'). La traslazione di vettore $\vec{O'O''}$, essendo $O''(x' = 0, y' = 1)$ trasforma le coordinate (x', y') nelle (x'', y'') secondo le formule seguenti: $x' = x''$, $y' = y'' + 1$, e quindi l'equazione di $\mathcal{C}$ diventa:

$$2(x'')^2 - 2(y'')^2 + 2 = 0,$$

nel riferimento $RC(O'', \vec{i}', \vec{j}')$. Poiche' invertendo le coordinate: $x''' = y'', y''' = x''$, e dividendo per 2 tale equazione si ottiene l'equazione canonica di $\mathcal{C}$:

$$(x''')^2 - (y''')^2 - 1 = 0,$$

il riferimento richiesto è $RC(O''', \vec{i}''', \vec{j}''')$, essendo $O''' = O'' = P_0$ (centro della conica) e , e $\vec{i}''' = \vec{j}'$, $\vec{j}''' = \vec{i}'$.

Esercizio 4. Piano proiettivo reale P(V). Coordinate omogenee (x_0, x_1, x_2).

Siano assegnati i punti $P_0' = [1,0,1]$, $P_1' = [1,1,0]$, $P_2' = [0,1,0]$, $U' = [0,1,1]$.

i) Verificare che P_0', P_1', P_2', U' sono in posizione generale.

ii) Determinare il riferimento proiettivo che ammette i punti P_0', P_1', P_2' come punti fondamentali e U' come punto unità e stabilire le formule di trasformazione di coordinate di punto dalle sue coordinate omogenee (x_0', x_1', x_2') a quelle (x_0, x_1, x_2) del riferimento canonico.

iii) Scrivere nelle coordinate (x_0', x_1', x_2') l'equazione cartesiana della retta $r : x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

Soluzione.

i) I punti assegnati sono in posizione generale, in quanto a tre a tre linearmente indipendenti: $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$.

ii) Posto $\vec{w}_0 = (1,0,1)$, $\vec{w}_1 = (1,1,0)$, $\vec{w}_2 = (0,1,0)$, $\vec{u}' = (0,1,1)$, risulta $P_0' = [\vec{w}_0]$, $P_1' = [\vec{w}_1]$, $P_2' = [\vec{w}_2]$, $U' = [\vec{u}']$. Essendo linearmente indipendenti i punti P_0', P_1', P_2' si ha che i vettori $\vec{w}_0, \vec{w}_1, \vec{w}_2$ sono linearmente indipendenti e quindi una base di $\mathbf{R^3}$. Quindi l' equazione vettoriale $\vec{u}' = \lambda_0\vec{w}_0 + \lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2$ ammette un' unica soluzione, costituita da tre reali non nulli. La traduzione scalare della precedente equazione vettoriale fornisce la soluzione $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (1, -1, 2)$. I vettori $\vec{v}_0' = \vec{w}_0 = (1,0,1)$, $\vec{v}_1' = -\vec{w}_1 = (-1,-1,0)$, $\vec{v}_2' = 2\vec{w}_2 = (0,2,0)$ sono allora tali che $P_0' = [\vec{v}_0']$, $P_1' = [\vec{v}_1']$, $P_2' = [\vec{v}_2']$, $U' = [\vec{v}_0' + \vec{v}_1' + \vec{v}_2']$ e quindi $RP(\vec{v}_0', \vec{v}_1', \vec{v}_2')$ è un riferimento proiettivo del tipo richiesto.

iii) Considerato il riferimento proiettivo canonico $RP(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ di $P(\mathbf{R^3})$, si ha che le formule di trasformazione di coordinate proiettive omogenee di punto nel passaggio da $RP(\vec{v}_0', \vec{v}_1', \vec{v}_2')$ a $RP(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sono $x_0 = -x_0' - x_1', x_1 = -x_1' + 2x_2', x_2 = x_0'$. Sostituendo queste ultime trasformazioni nell' equazione di r si ottiene che $r : x_0' - x_1' + x_2' = 0$.

Geometria Analitica (A-Z)
Soluzioni della prova scritta del 18.9.2007

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Spazio vettoriale reale V di dimensione tre. Base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.
Sia $b : V \times V \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita da

$$b(\vec{v}, \vec{w}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2,$$

essendo $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3$ e $\vec{w} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + y_3\vec{v}_3$.

i) Verificare che l'applicazione b è una forma bilineare simmetrica.

ii) Determinare la forma quadratica $q : V \to \mathbf{R}$ associata alla forma bilineare simmetrica b.

iii) Assegnato il vettore $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$, verificare che $\vec{u}$ è un vettore non isotropo rispetto a b.

iv) Decomporre il vettore $\vec{z} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ nella somma di due vettori $\vec{z}_1$ e $\vec{z}_2$ rispettivamente parallelo e ortogonale ad $\vec{u}$.

Soluzione.

i) Considerata la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, risulta immediatamente $b(\vec{v}, \vec{w}) = X^tAY$, essendo $X^t = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y^t = (y_1, y_2, y_3)$. Ne segue che b è una forma bilineare, ed essendo la matrice A simmetrica, b è simmetrica.

ii) La forma quadratica $q : V \to \mathbf{R}$ associata a b è definita da $q(\vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{v}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3$.

iii) Essendo $(1, -1, 1)$ le coordinate di $\vec{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, risulta $q(\vec{u}) = 2 \neq 0$ e quindi $\vec{u}$ è un vettore non isotropo.

iv) Considerato il coefficiente di Fourier $a_{\vec{u}}(\vec{z})$, risulta $\vec{z}_1 = a_{\vec{u}}(\vec{z})\vec{u}$ e $\vec{z}_2 = \vec{z} - \vec{z}_1$. Allora, essendo $a_{\vec{u}}(\vec{z}) = \frac{b(\vec{u},\ vecz)}{b(\vec{u},\vec{u})} = \frac{3}{2}$, si ha $\vec{z}_1 = \frac{3}{2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3)$ e $\vec{z}_2 = \frac{1}{2}(-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 3\vec{v}_3)$.

Esercizio 2. Spazio euclideo $RC(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Siano assegnati il piano $p: \ x-2y-z+1 = 0$ e la retta $r: \ x+y+2z = 0, \ 2x-y+z = 0$.

i) Determinare equazioni cartesiane della retta s_1 passante per il punto $P_1(1, 0, 1)$ parallela al piano p e perpendicolare alla retta r.

ii) Determinare equazioni cartesiane della retta s_2 passante per il punto $P_2(0, 1, 0)$ e perpendicolare al piano p.

iii) Verificare che le rette s_1 e s_2 sono sghembe.

iv) Determinare la distanza $d(s_1, s_2)$ delle rette s_1 e s_2.

Soluzione.

i) La retta generica per il punto P_1 ha equazioni, sotto forma di rapporti uguali, $\frac{x-1}{l_1} = \frac{y}{m_1} = \frac{z-1}{n_1}$, essendo (l_1, m_1, n_1) parametri direttori. I coefficienti di giacitura del piano p sono $(a, b, c) = (1, -2, -1)$ e parametri direttori di r sono $(l, m, n) = (1, 1, -1)$. Le condizioni per la retta s_1 sono quindi $l_1 - 2m_1 - n_1 = 0, l_1 + m_1 - n_1 = 0$. Pertanto le equazioni di s_1, dedotte da quelle sopra scritte in forma di rapporti uguali, sono ad esempio $x - z = 0, y = 0$.

ii) La retta s_2, dovendo essere perpendicolare al piano p, ha parametri direttori (l_2, m_2, n_2) proporzionali a $(a, b, c) = (1, -2, -1)$. Dunque le equazioni di s_2, sotto forma di rapporti uguali, sono $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{-1}$, ovvero $x + z = 0, y - 2z - 1 = 0$.

iii) Le rette s_1 e s_2 sono non parallele, avendo parametri direttori non proporzionali, e non incidenti in quanto il sistema lineare $x - z = 0, y = 0, x + z = 0, y - 2z - 1 = 0$ non ammette soluzioni.

iv) La distanza $d(s_1, s_2)$ delle rette s_1 e s_2 può determinarsi per esempio considerando il piano q contenente s_1 e parallelo a s_2. Infatti tale distanza uguaglia la distanza di un qualsiasi punto di s_2, p. es. P_2, dal piano q. Essendo $\det \begin{pmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 0$, ossia $x + y - z = 0$ l'equazione cartesiana di q, risulta $d(s_1, s_2) = d(P_2, q) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Esercizio 3. Piano euclideo E^2 - $RC(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Sia assegnata la conica

$$\mathcal{C}: \quad 13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 + 16\sqrt{3}x + 16y = 0.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è un'ellisse generale a supporto non vuoto.

ii) Determinare la lunghezza dei semiassi a e b di $\mathcal{C}$, facendo preferibilmente uso del metodo dei semiinvarianti metrici.

Soluzione.

i) La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & 8\sqrt{3} & 8 \\ 8\sqrt{3} & 13 & 3\sqrt{3} \\ 8 & 3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$ e dunque i semiinvarianti cubico, quadratico e lineare di $\mathcal{C}$ sono rispettivamente $\mathcal{A} = \det A = -1024 \neq 0$, $\mathcal{A}_{00} = \det A_{00} = \begin{pmatrix} 13 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} = 64 > 0$, $\mathcal{I} = 16 + 7 = 20$. Dunque $\mathcal{C}$ è un'ellisse generale, il cui supporto è non vuoto, contenendo l'origine O.

ii) Dalla teoria e dal precedente calcolo dei semiinvarianti sappiamo che esiste un opportuno riferimento $RC(\tilde{O}, \tilde{i}, \tilde{j})$ tale che l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$ rispetto a tale riferimento sia del tipo $\rho(\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} - 1) = 0$. I semiinvarianti per tale equazione canonica valgono $\tilde{\mathcal{A}} = -\rho^3 \frac{1}{a^2}\frac{1}{b^2}$, $\tilde{\mathcal{A}}_{00} = \rho^2 \frac{1}{a^2}\frac{1}{b^2}$, $\tilde{\mathcal{I}} = \rho(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})$. Uguagliando le due terne di semiinvarianti si ottiene subito $\rho = 16$, $a = 2$, $b = 1$.

Esercizio 4. **Piano proiettivo reale $P(V)$ subordinato ad uno spazio vettoriale reale V di dimensione tre. Coordinate omogenee (x_0, x_1, x_2) definite dal riferimento proiettivo $RP(\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$.**

Sia assegnata la conica

$$\mathcal{C}: \quad x_0^2 - 2x_0x_2 - x_1^2 - 2x_1x_2 = 0.$$

i) Determinare un sistema opportuno di coordinate proiettive omogenee (x'_0, x'_1, x'_2) rispetto a cui $\mathcal{C}$ ha equazione canonica proiettiva e scrivere tale equazione.

ii) Dall'equazione canonica di $\mathcal{C}$ dedurre che la conica $\mathcal{C}$ si spezza in due rette reali e distinte e determinare tali rette.

Soluzione.

i) La forma quadratica q associata all'equazione di $\mathcal{C}$ è $q = x_0^2 - 2x_0x_2 - x_1^2 - 2x_1x_2$. La forma bilineare simmetrica polare di q è $b = x_0y_0 - x_0y_2 - x_2y_0 - x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1$. Un vettore non isotropo per b è p. es. $w_0 = (1, 0, 0)$, essendo $q(1, 0, 0) = 1$. Risulta $w_0^\perp : x_0 - x_2 = 0$ e quindi $w_0^\perp := \{(t_0, t_1, t_0\}_{t_0, t_1 \in \mathbf{R}}$. Un vettore non isotropo di $w_0^\perp$ è p. es. $w_1 = (0, 1, 0)$; infatti risulta $q(0, 1, 0) = -1$. Si ha poi $w_0^\perp \cap w_1^\perp : x_0 - x_2 = 0, -x_1 - x_2 = 0$. Dunque $w_0^\perp \cap w_1^\perp = \{(t, -t, t))\}_{t \in \mathbf{R}}$. Posto $w_2 = (1, -1, 1)$ risulta che $\mathcal{B}' = (w_o, w_1, w_2)$ è una base b-ortogonale: Essendo $q(w_0) = 1, q(w_1) = -1, q(w_2) = 0$, si ha che rispetto a tale base l'espressione di q è canonica. Indicate con (x'_0, x'_1, x'_2) le coordinate rispetto a tale base, risulta $q = (x'_0)^2 - (x'_1)^2$. Dunque in tali coordinate proiettive omogenee la conica $\mathcal{C}$ ha equazione canonica proiettiva $(x'_0)^2 - (x'_1)^2 = 0$.

ii) Dall'equazione canonica di $\mathcal{C}$ si ha che $\mathcal{C}$ si spezza nelle rette reali e distinte r : $x'_0 - x'_1 = 0$ e $s : x'_0 + x'_1 = 0$.