RENZO MAZZOCCO

CORSO DI GEOMETRIA
(PER FISICI)

RACCOLTA DEGLI ESERCIZI D'ESONERO E D'ESAME DI ALGEBRA LINEARE DEGLI ANNI ACCADEMICI 2003-2004 E 2005-2006

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO"
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
Ottobre 2007

Algebra Lineare (A-Z)
Soluzioni della prova in itinere del 18.11.2003

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ la seguente matrice A è invertibile.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix}.$$

Scrivere per tali valori k la sua inversa A^{-1} e verificare che $AA^{-1} = I$.

Soluzione. Sia $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Denotando con $A\vec{x}$ il prodotto righe per colonna, si ha che i tre sistemi

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hanno soluzione se e solo se $k \neq= 0$, e in questo caso le soluzioni sono rispettivamente:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue, nei tre casi, e sempre con notazione di prodotto righe per colonna:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \\ 0 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e ciò fornisce subito gli elementi di

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}:$$

$$a_{11} = 0, a_{21} = -\frac{1}{k}, a_{31} = \frac{1}{k}, a_{12} = -\frac{1}{k}, a_{22} = \frac{1}{k}, a_{32} = 0, a_{13} = \frac{1}{k}, a_{23} = 0, a_{33} = 0.$$

Ne segue che A^{-1} è invertibile per ogni $k \neq 0$ e per tali k è:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k} & \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{1}{k} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo del prodotto righe per colonne mostra d'altronde che:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k} & \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{1}{k} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Esercizio 2. Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, la compatibilità del sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + \ \ x_3 = k \\ x_1 \qquad\quad - kx_3 = k \\ kx_1 \qquad\ - \ \ x_3 = k+2 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistono.

Soluzione. La riduzione a scala del sistema si ottiene mediante i seguenti passi successivi:

$$\begin{cases} x_1 + \ kx_2 + \qquad\qquad x_3 = k \\ \quad - \ kx_2 - (k+1)x_3 = 0 \\ \quad - k2x_2 - (k+1)x_3 = -k^2+k+2 \end{cases},$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + \qquad\quad x_3 = k \\ \quad - kx_2 - \ (k+1)x_3 = 0 \\ \qquad\qquad (k^2-1)x_3 = -(k+1)(k-2) \end{cases}.$$

Se ne deduce che, per $k \neq -1, 0, 1$ si hanno i tre pivots $p_1 = 1, p_2 = -k, p_3 = k^2 - 1$, e il sistema ammette l'unica soluzione:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{k}{k-1}, \frac{(k+1)(k-2)}{k(k-1)}, -\frac{k-2}{k-1}\right).$$

I tre casi $k = -1, 0, 1$ vanno considerati singolarmente.

Come si vede dal sistema ridotto a scala, per $k = -1$ sia la matrice dei coefficienti che la matrice dei coefficienti e termini noti hanno rango 2. Dunque per $k = -1$ il sistema ammette infinite soluzioni, ottenibili p. es. ponendo $x_3 = t$ e risolvendo rispetto alle altre due incognite. Si ottengono così per $k = -1$ le infinite soluzioni:

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1-t, 0, t),$$

al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$.

Per gli altri due valori $k = 0, 1$ si riconosce dal sistema ridotto a scala che la matrice dei coefficienti ha rango 2, mentre la matrice dei coefficienti e termini noti ha rango 3. Ne segue che per $k = 0, 1$ il sistema non ammette alcuna soluzione.

Esercizio 3. Si considerino, nello spazio vettoriale $M_2(\mathbf{R})$ delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali, i sottoinsiemi U e W costituiti rispettivamente dalle matrici simmetriche e dalle matrici antisimmetriche.

i) Verificare che U e W sono sottospazi vettoriali di $M_2(\mathbf{R})$.

ii) Determinare la dimensione e una base di U e di W.

iii) Verificare che $M_2(\mathbf{R}) = U \oplus W$ (somma diretta).

Soluzione. Una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ è simmetrica se e solo se $A^t = A$, ovvero $b = c$, antisimmetrica se $A^t = -A$, ovvero $a = d = 0, b = -c$.

i) Verifichiamo che U è un sottospazio di $M_2(\mathbf{R})$: se $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \in U$ è anche $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in U$; inoltre se $\lambda \in \mathbf{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} U$, risulta $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix} \in U$.

Similmente se $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} \in W$ è anche $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ -(a_1 + a_2) & 0 \end{pmatrix} \in U$; inoltre se $\lambda \in \mathbf{R}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} U$, risulta $\lambda A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ -\lambda a & 0 \end{pmatrix} \in W$.

ii) Una base di U è data dalle matrici $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, e U ha dunque dimensione 3. Una base di W è invece data dalla singola matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, e W ha dunque dimensione 1.

iii) Da quanto sopra si ha che la sola matrice simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla. Dunque $U \cap W = 0$ e dalla formula di Grassmann $U + W = U \oplus W = M_2(\mathbf{R})$.

Esercizio 4. Si considerino in $\mathbf{R}^4$ i vettori $\vec{u}_1 = (1,1,0,0), \vec{u}_2 = (0,1,1,0), \vec{u}_3 = (0,0,1,1)$, il sottospazio $U = Span(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, e il sottospazio W di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare la dimensione e una base per ciascuno dei sottospazi U, W, $U + W$, $U \cap W$.

Soluzione. La matrice delle componenti di $\vec{u}_1 = (1,1,0,0), \vec{u}_2 = (0,1,1,0), \vec{u}_3 = (0,0,1,1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è già ridotta a scala e, avendo tre pivots ha rango 3. Ne segue che dim $U = 3$ e che $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ ne è una base.

La riduzione a scala della matrice dei coefficienti del sistema che definisce W fornisce invece:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui rg $A = 2$ e dim W =3-1=2. Il sistema della equazioni di W può dunque essere risolto aasumendo come parametri $x_3 = t, x_4 = s$ e si ottiene $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}, t, s)$. Una base di W si ottiene in corrispondenza delle scelte $(t, s) = (1, 0)$ e $(t, s) = (0, 1)$: $\vec{w}_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0), \vec{w}_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1)$. Per ottenere una base e la dimensione di $U + W$ riduciamo a scala la matrice 5×4 delle componenti dei vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{w}_1, \vec{w}_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $U + W = \mathbf{R}^4$, e una base è p. es. la base canonica. Dalle formula di Grassmann segue che dim $U \cap W$ =1. Poiché risulta $-\frac{1}{2}\vec{u}_1 + \vec{u}_3 = \vec{w}_1$, si ha che $\vec{w}_1 \in U \cap W$ e ne è quindi una base.

Algebra Lineare (A-Z)
Soluzioni della prova in itinere del 19.1.2004

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Piano affine - RA (Oxy). Si considerino i fasci di rette

$$F_1: \ (2x - y + 3) + h_1(x + y - 1) = 0,$$

$$F_2: \ (x - y + 2) + h_2(x + 2y - 1) = 0,$$

$$F_3: \ (x - y + 3) + h_3(-x - y + 3) = 0.$$

i) Verificare che F_1, F_2, F_3 sono fasci propri e determinare le coordinate dei rispettivi centri C_1, C_2, C_3.

ii) Verificare che i punti C_1, C_2, C_3 sono allineati e scrivere l'equazione della retta comune ai tre fasci.

iii) Determinare quali relazioni intercorrono tra i valori dei parametri h_1, h_2, h_3 di rette r_1, r_2, r_3 appartenenti ai tre fasci e che siano tra loro parallele.

Soluzione. i) Risolvendo i tre sistemi lineari formati ognuno dalle due equazioni delle rette che generano i fasci F_1, F_2, F_3 si ottengono le coordinate dei tre centri, rispettivamente $C_1 = (-\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$, $C_2 = (-1, 1)$, $C_3 = (0, 3)$.

ii) Poiché i vettori $\overrightarrow{C_1C_2} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ e $\overrightarrow{C_1C_3} = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ sono paralleli (con fattore di proporzionalitá -2), C_1, C_2, C_3 sono allineati. La retta che li unisce, unica retta comune ai tre fasci, si ottiene p. es. come retta per due punti, e risulta $2x - y + 3 = 0$.

iii) Scrivendo le equazioni dei tre fasci nella forma:

$$F_1: \ (2 + h_1)x + (h_1 - 1)y + (3 - h_1) = 0,$$

$$F_2: \ (1 + h_2)x + (2h_2 - 1)y + (2 - h_2) = 0,$$

$$F_3: \ (1 - h_3)x - (1 + h_3)y + (3 + 3h_3) = 0,$$

si vede subito che le relazioni di parallelismo $r_1 \parallel r_2$ e $r_2 \parallel r_3$ corrispondono alle condizioni analitiche rispettivamente $(2 + h_1)(2h_2 - 1) = (h_1 - 1)(h_2 + 1)$ e $(1 + h_2)(1 + h_3) = (1 - 2h_2)(1 - h_3)$. Esplicitamente tali condizioni sono:

$$h_2 = \frac{2h_1 + 1}{h_1 + 5}, \qquad h_3 = \frac{3h_2}{h_2 - 2}, \qquad h_3 = -\frac{2h_1 + 1}{3}.$$

Esercizio 2. Spazio affine - RA $(Oxyz)$. Si considerino le rette $r : x - 2y + z - 1 = 0, x + 3y - z = 0$ e $r' : x - y + 2z - 1 = 0, x + y + 2z = 0$.

i) Verificare che r, r' sono sghembe.

ii) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per $A = (1, -1, 1)$ e complanare sia con r che con r'.

iii) Verificare che s non é parallela né a r né a r' e dedurne che s è incidente le due rette r e r'.

Soluzione. Risulta:

$$det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 5 \neq 0,$$

e quindi le rette r e r' sono sghembe. Detto α il piano passante per A e contenente la retta r, e detto α' il piano passante per A e contenente r', risulta $s = \alpha \cap \alpha'$. Per ottenere il piano α consideriamo il fascio di piani F di asse la retta r e imponiamo il passaggio per A. L'equazione cartesiana di F è $x-2y+z-1+k(x+3y-z) = 0$, $k \in \mathbb{R}$. Il passaggio per A fornisce $1+2+1-1+k(1-3-1) = 0$, ossia $3-3k = 0$, da cui $k = 1$. Risulta allora $\alpha : 2x + y - 1 = 0$. Analogamente si ottiene $\alpha' : x + 5y + 2z + 2 = 0$. Pertanto equazioni cartesiane di s sono: $2x + y - 1 = 0, x + 5y + 2z + 2 = 0$.

Parametri direttori della retta r sono:

$$l = det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -1, \quad m = -det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2, \quad n = det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 5.$$

Parametri direttori della retta r' sono:

$$l' = det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -4, \quad m' = -det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0, \quad n' = det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Parametri direttori di s sono infine:

$$l_s = det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 2, \quad m_s = -det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -4, \quad n_s = det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 9.$$

Essendo:

$$rg\begin{pmatrix} l & l_s \\ m & m_s \\ n & n_s \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = 2,$$

risulta che s non è parallela a r: Analogamente, essendo:

$$rg\begin{pmatrix} l' & l_s \\ m' & m_s \\ n' & n_s \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} = 2,$$

s è non parallela anche con r'. Ne segue che s è incidente sia a r che a r'.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ di equazioni:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{18}{5}x_1 - x_2 + \frac{9}{4}x_3 \\ y_2 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{5}{12}x_2 + \frac{15}{16}x_3 \end{cases},$$

i) Determinare una base e la dimensione di $kerT$.

ii) Determinare una base e la dimensione di imT.

iii) Scrivere l'equazione cartesiana dell'immagine $imT \subset \mathbb{R}^2$.

Soluzione. Poiché

$$rg \begin{pmatrix} \frac{18}{5} & -1 & \frac{9}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{12} & \frac{15}{16} \end{pmatrix} = 1,$$

si ha dim $imT = 1$ e dim $kerT = 3 - 1 = 2$.

Una base di imT è p. es. $\vec{w} = (\frac{18}{5}, \frac{3}{2})$ (prima colonna della matrice), mentre una base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ di $kerT$ si ottiene dall'equazione lineare omogenea $\frac{18}{5}x_1 - x_2 + \frac{9}{4}x_3 = 0$, le cui soluzioni sono generate p. es. da $\vec{v}_1 = (\frac{5}{18}, 1, 0)$ e da $\vec{v}_2 = (-\frac{5}{8}, 0, 1)$.

Per ottenere l'equazione cartesiana di imT in $\mathbb{R}^2$ si possono considerare in primo luogo le equazioni parametriche della retta imT in $\mathbb{R}^2$. Tenuto conto della base $\vec{w}$, tali equazioni parametriche sono: $y_1 = \frac{18}{5}t, y_2 = \frac{3}{2}t$. Si ottiene dunque il valore $t = \frac{2}{3}y_2$ del parametro e sostituendo si ha che $y_1 = \frac{12}{5}y_2$ è l'equazione cartesiana di imT in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4. Si considerino le matrici:

$$A(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ h & 2+h & 2+h \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & 4 & 6+k \\ -1 & -1 & 2+k \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di h e k, i determinanti e le tracce di $A(h)$ e di $B(k)$.

ii) Verificare che esiste un'unica coppia (h_0, k_0) tale che det $A(h_0)$ = det $B(k_0)$ e tr$A(h_0)$ = tr $B(k_0)$.

iii) Stabilire se le matrici $A_0 = A(h_0)$ e $B_0 = B(k_0)$ hanno gli stessi autovalori.

iv) Stabilire infine se A_0 e B_0 sono matrici coniugate.

Soluzione. Risulta $detA(h) = 2h+2$, $detB(k) = 10k+24$, $trA(h) = 4+h$, $trB(k) = 7+k$, e il sistema $2h+2 = 10k+24$, $4+h = 7+k$ ammette l'unica soluzione $(h_0, k_0) = (1, -2)$. Per tali valori h_0 e k_0 i polinomi caratteristici di $A_0 = A(h_0)$ e di $B_0 = B(k_0)$ sono:

$$det(A_0 - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 3 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1),$$

$$det(B_0 - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 4-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-2)^2,$$

e pertanto A_0 e B_0 hanno gli stessi autovalori $\lambda = 1$ (di molteplicità algebrica 1) e $\lambda = 2$ (di molteplicità algebrica 2). I vettori $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ che sono autovettori corrispondenti a $\lambda = 2$ per le due matrici, si ottengono come soluzioni dei seguenti sistemi:

$$A_0 : \begin{cases} -x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}, \quad B_0 : \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

In tali due sistemi la matrice dei coefficienti ha rango rispettivamente 2 e 1. Ne segue che $\lambda = 2$ ha molteplicità geometrica 1 per A_0 e molteplicità geometrica 2 per B_0. Dunque la matrice A_0 è diagonalizzabile, al contrario di B_0, e A_0 e B_0 non sono coniugate.

Algebra Lineare (A-Z)
Soluzioni della prova scritta del 26 gennaio 2004

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + kx_3 + (k-2)x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + (k-1)x_3 + kx_4 = 0 \\ kx_1 + x_2 + (k^2-2k+2)x_4 = 0 \end{cases}$$

Discutere il sistema e determinarne le soluzioni al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & k-2 \\ 1 & 1 & k-1 & k \\ k & 1 & 0 & k^2-2k+2 \end{pmatrix}.$$

La sottomatrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo, e dunque per ogni $k \in \mathbf{R}$ si ha $2 \leq rg(A) \leq 3$. Per determinare il rango di A, orliamo B nei due modi possibili. Si ottengono così le due sottomatrici

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k-2 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & k^2-2k+2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & 1 & k-1 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta

$$\det A_3 = -2k+2 \quad \text{e} \quad \det A_4 = -2k^2+k+1.$$

Risulta $\det A_3 = 0$ per $k=1$ e $\det A_4 = 0$ per $k = -1/2, 1$. Per il teorema di Kronecker è dunque $rg\,A = 3$ per $k \neq 1$ e $rg\,A = 2$ per $k = 1$.

Caso A) $k \neq 1$. Avendo già calcolato $\det A_3$ e $det A_4$, calcoliamo anche

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -1 & k & k-2 \\ 1 & k-1 & k \\ 1 & 0 & k^2-2k+2 \end{vmatrix} = -2k^3+5k^2-3k$$

e

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & k & k-2 \\ 1 & k-1 & k \\ k & 0 & k^2-2k+2 \end{vmatrix} = 2k^2-2.$$

Se poniamo

$$\begin{aligned}(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) &= (\det A_1, -\det A_2, \det A_3, -\det A_4) \\ &= (-2k^3+5k^2-3k, -2k^2+2, -2k+2, 2k^2-k-1),\end{aligned}$$

si ha allora che ogni soluzione del sistema è proporzionale a tale quaterna, ovvero lo spazio delle soluzioni è

$$S_0 = \{t(-2k^3+5k^2-3k, -2k^2+2, -2k+2, 2k^2-k-1)\}_{t\in\mathbf{R}}.$$

Caso B) $k=1$. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Posto $x_3 = t_1$ e $x_4 = t_2$ si ha:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -t_1 + t_2 \\ x_1 + x_2 = -t_2 \end{cases}$$

Quindi $x_1 = -\frac{1}{2}t_1$, $x_2 = \frac{1}{2}t_1 - t_2$ e lo spazio delle soluzioni è

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) + t_2(0, -1, 0, 1) \right\}_{t_1, t_2 \in \mathbf{R}}.$$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale numerico reale $V = \mathbf{R}^4$ si considerino i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 1, 0)$ e $\mathbf{u}_3 = (1, 3, 2, -1)$. Sia $U = Span(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

1. Determinare una base $\mathcal{B}_U$ di U.
2. Ampliare la base $\mathcal{B}_U$ in una base $\mathcal{B}_V$ di V.
3. Determinare un sottospazio W di V tale che $V = U \oplus W$.

Soluzione. La matrice A che ha per colonne le coordinate di $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, e $\mathbf{u}_3$ rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La sottomatrice B di ordine 2 evidenziata ha determinante non nullo, quindi è $r = rgA \geq 2$. Le sottomatrici quadrate di ordine 3 che orlano B hanno determinante rispettivamente

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Per il teorema di Kronecker è allora $r = 2$. Allora i vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, e $\mathbf{u}_3$ sono linearmente dipendenti, mentre i primi due sono linearmente indipendenti. Ne segue che $\mathcal{B}_U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ è una base di U.

Un sistema di generatori di V è costituito dai vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_4$, essendo $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ la base canonica di V. La matrice che ha per colonne le coordinate di tali generatori rispetto alla base canonica è

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo a C l'algoritmo di Gauss per estrarre una base da tale sistema di generatori. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = S,$$

dove S è una matrice a scala che ha i pivots sulle colonne 1, 2, 3 e 4. Ne segue che una base $\mathcal{B}_V$ di V che completa $\mathcal{B}_U$ è quella costituita dai vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$.

Un sottospazio supplementare di U in V è allora $W = Span(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Esercizio 3. Nello spazio affine $RA(Oxyz)$, si considerino il piano $\alpha : x - 2y + z - 1 = 0$ e il suo punto $A(1, 0, 0)$.

1. Scrivere le equazioni cartesiane del fascio di rette di centro A e giacenti su α.
2. Determinare la retta r del fascio che è parallela al piano $\beta : 2x + y - z = 0$.

Soluzione. Una retta passante per A ma non giacente nel piano α è ad esempio la retta

$$s : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Infatti tale retta passa evidentemente per A ma non giace su α perchè i suoi parametri direttori $(l, m, n) = (1, -2, 1)$ non soddisfano la condizione di parallelismo $al + bm + cn = 0$, essendo $(a, b, c) = (1, -2, 1)$. Le equazioni cartesiane di s sono dunque $x - z - 1 = 0$, $y + 2z = 0$ e l'equazione del fascio di piani di asse s è $x - z - 1 + k(y + 2z) = 0$. Il fascio di rette richiesto, chiamiamolo $\mathcal{F}$, è l'insieme di rette di equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + ky + (2k-1)z - 1 = 0 \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$.

La retta generica di $\mathcal{F}$ ha parametri direttori

$$l' = \begin{vmatrix} k & 2k-1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5k - 2, \quad m' = -\begin{vmatrix} 1 & 2k-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2k - 2, \quad n' = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -k - 2.$$

La condizione di parallelismo con β dà

$$2(5k - 2) + (2k - 2) - (-k - 2) = 0,$$

ovvero $13k - 4 = 0$. Quindi $k = 4/13$ e la retta richiesta ha dunque equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ 13x + 4y - 5z - 13 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Siano U, V e W spazi vettoriali reali aventi rispettivamente dimensioni 3, 2 e 3 e basi $\mathcal{B}_U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, $\mathcal{B}_V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ e $\mathcal{B}_W = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$.
Si considerino le applicazioni lineari $F : U \to V$, definita da

$$F(x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3) = (x_1 - x_2 + x_3)\mathbf{v}_1 + (x_1 - x_3)\mathbf{v}_2,$$

$G : V \to W$, definita da

$$G(y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2) = (y_1 - y_2)\mathbf{w}_1 + (y_1 + y_2)\mathbf{w}_2 + (2y_1 + 3y_2)\mathbf{w}_3,$$

e la loro composizione $G \circ F : U \to W$.

1. Scrivere le equazioni di $G \circ F$ rispetto alle basi $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_W$.
2. Determinare il nucleo $ker(G \circ F)$ e l'immagine $Im(G \circ F)$ indicando per ciascuno di tali sottospazi una base e la dimensione.
3. Dire se $G \circ F$ è un isomorfismo.

Soluzione. La matrice associata ad F rispetto alle basi $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_V$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice associata ad G rispetto alle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice associata a $G \circ F$ rispetto alle basi $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_W$ è allora

$$C = BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che equazioni di $G \circ F$ sono

$$\begin{cases} z_1 = -x_2 + 2x_3 \\ z_2 = 2x_1 - x_2 \\ z_3 = 5x_1 - 2x_2 - x_3. \end{cases}$$

Equazioni cartesiane di $ker(G \circ F)$ sono

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Lo spazio delle soluzioni di tale sistema lineare omogeneo è $\mathcal{S}_0 = \{t(1,2,1)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e quindi

$$ker(G \circ F) = \{t(\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3)\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Una base di $ker(G \circ F)$ è costituita dal solo vettore $\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ e quindi $dim(ker(G \circ F)) = 1$.

Un sistema di generatori di $Im(G \circ F)$ è costituito dai vettori $(G \circ F)(\mathbf{u}_1)$, $(G \circ F)(\mathbf{u}_2)$ e $(G \circ F)(\mathbf{u}_3)$, le cui coordinate coincidono rispettivamente con le colonne della matrice C. Essendo $rg(C) = 2$, si ha che una base di $Im(G \circ F)$ è, per esempio, quella costituita dai vettori indipendenti

$$(G \circ F)(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{w}_2 + 5\mathbf{w}_3 \quad \text{e} \quad (G \circ F)(\mathbf{u}_2) = -\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 - 2\mathbf{w}_3.$$

Infine $G \circ F$ non è un isomorfismo poiché la matrice quadrata C ad esso associata è singolare.

Algebra Lineare (A-Z)
Soluzioni della prova scritta del 16.2.2004

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & k+1 & 1 & k & k \end{pmatrix}.$$

i) Calcolare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il rango di A.

ii) Considerata l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ associata ad A, determinare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, la dimensione e le equazioni del nucleo $kerF \subset \mathbf{R}^5$.

iii) Determinare, sempre al variare di k, una base di $kerF$.

Soluzione. La riduzione a scala di A, effettuata per $k \neq 1$, fornisce:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & k+1 & 1 & k & k \end{pmatrix} \to A' = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 & k & k \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & k-1 & 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to A'' = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 & k & k \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2-k & k & 3(k-1) \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq 1$ vi sono quindi 3 pivots (risp. $1, 1, 2-k$ se $k \neq 2$, e $1, 1, 2$ se $k = 2$) e $rgA = 3$. Per $k = 1$ la matrice diventa:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

riducibile a scala per semplice scambio tra la prima e terza riga. Si vede così che anche in questo caso è $rgA_1 = 3$, e dunque $rgA = 3$ per ogni k.

In alternativa alla riduzione a scala si può osservare che la sottomatrice quadrata B di A formata dalla prima, terza e quinta colonna di A ha determinante:

$$detB = det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} = -3 \neq 0.$$

Ne segue $rgA = 3$ per ogni k.

Dunque dim $imF = 3$, dim $kerF = 5 - 3 = 2$ e il nucleo di F si rappresenta nelle coordinate $(x_1, ..., x_5)$ di $\mathbf{R}^5$ con le tre equazioni

$$\begin{cases} (k-1)x_2 + x_3 + kx_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + (k+1)x_2 + x_3 + kx_4 + kx_5 = 0 \end{cases}$$

che, essendo $rgA = 3$, sono linearmente indipendenti per ogni k. Per determinare una base di $kerF$ si può prima risolvere il sistema delle sue equazioni, p. es. rispetto a x_1, x_3, x_5 (incognite i cui coefficienti costituiscono la sottomatrice B sopra considerata). Con questa scelta si ottiene:

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{k^2-2k-6}{3}t + \frac{k^2}{3}s \\ x_2 &= t \\ x_3 &= (1-k)t - ks \\ x_4 &= s \\ x_5 &= \frac{2-k}{3}t - \frac{k}{3}s \end{cases}$$

Per $(t,s) = (1,0)$ e $(t,s) = (0,1)$ si ottengono i due vettori rispettivamente $\vec{v}_1 = (\frac{k^2-2k-6}{3}, 1, 1-k, 0, \frac{2-k}{3})$ e $\vec{v}_2 = (\frac{k^2}{3}, 0, -k, 1, -\frac{k}{3})$, base di $kerF$.

Esercizio 2. Siano $U = Span\{\vec{u}\}$ e $W = Span\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ generati rispettivamente dal vettore $\vec{u} = (1,2,3)$ e dai vettori $\vec{w}_1 = (3,2,1), \vec{w}_2 = (1,1,1)$

i) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.

ii) Stabilire se lo spazio vettoriale somma $U + W$ è una somma diretta.

iii) Scrivere le equazioni cartesiane delle sottovarietà affini $U' = \vec{v}_0 + U$ e $W' = \vec{v}_0 + W$ di $\mathbf{R}^3$, essendo $\vec{v}_0 = (4,1,-5)$.

Soluzione. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ha determinante nullo e, come subito si vede, rango 2. Di fatto si riconosce che sussiste la relazione $\vec{u} = 4\vec{w}_2 - \vec{w}_1$. Ne segue che la retta U, generata da $\vec{u}$, è contenuta nel piano W, generato da $\vec{w}_1, \vec{w}_2$. Dunque il sottospazio $U \cap W$ coincide con U, e ha quindi dimensione 1 e base $\vec{u}$. La stessa inclusione $U \subset W$ mostra anche che la somma $U + W$ coincide con W e non è quindi una somma diretta.

Le equazioni parametriche di U' si ottengono subito assumendo $\vec{u}$ come vettore direttore di U' e sono, nelle coordinate (x,y,z) di $\mathbf{R}^3$:

$$x - 4 = t, y - 1 = 2t, z + 5 = 3t,$$

da cui per eliminazione del parametro t le equazioni cartesiane della retta U':

$$y - 1 = 2(x-4), z + 5 = 3(x-4).$$

Le equazioni parametriche di W' si ottengono invece imponendo la dipendenza lineare del vettore $(x-4, y-1, z+5)$ con $\vec{w}_1 = (3,2,1)$ e $\vec{w}_2 = (1,1,1)$. Di qui anche l'equazione cartesiana di W':

$$det \begin{pmatrix} x-4 & y-1 & z+5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (x-4) - 2(y-1) + (z+5) = 0.$$

Esercizio 3. Spazio affine, $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si considerino i quattro punti:

$$P_1(-1,1,1), \ P_2(4,1,0), \ P_3(1,0,0), \ P_4(-4,0,1).$$

i) Verificare che P_1, P_2, P_3, P_4 sono complanari e scrivere l'equazione del piano α da essi individuato.

ii) Verificare che P_1, P_2, P_3, P_4 sono vertici consecutivi di un parallelogramma contenuto in α.

iii) Scrivere le equazioni dei piani $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, contenenti le facce laterali della piramide di base il parallelogramma $P_1P_2P_3P_4$ e vertice nell'origine O.

Soluzione. L'appartenenza di P_1, P_2, P_3, P_4 al generico piano $ax + by + cz + d = 0$ fornisce il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} -a & b & +c & +d & = & 0 \\ 4a & +b & & +d & = & 0 \\ a & & & +d & = & 0 \\ -4a & & +c & +d & = & 0 \end{cases},$$

la cui matrice dei coefficienti si riconosce facilmente avere rango 3 (si osservi p. es. che la somma della prima e terza equazione coincide con la somma della seconda e quarta equazione, e che le prime tre equazioni sono linearmente indipendenti). Dunque il sistema ammette infinite soluzioni proporzionali, e una di esse è $a = 1, b = -3, c = 5, d = -1$. Il piano α ha dunque equazione $x - 3y + 5z - 1 = 0$.

Le rette orientate P_1P_2 e P_4P_3 hanno entrambe vettore direttore $(5, 0, -1)$ e le rette orientate P_1P_4 e P_2P_3 hanno entrambe vettore direttore $(-3, -1, 0)$, e ciò basta per concludere che P_1, P_2, P_3, P_4 sono vertici consecutivi di un parallelogramma. Le quattro facce laterali della piramide sono contenute nei quattro piani $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ per tre punti risp. OP_1P_2, OP_2P_3, OP_3P_4; OP_4P_1, essendo O l'origine del riferimento. Le equazioni di tali quattro piani per l'origine si scrivono facilmente sotto forma di determinante e sono:

$$\beta_1 : det \begin{pmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \beta_2 : det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\beta_3 : det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \beta_4 : det \begin{pmatrix} x & y & z \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Sviluppando i determinanti si ottiene:

$$\beta_1 : -x + 4y - 5z = 0, \ \beta_2 : z = 0, \ \beta_3 : y = 0, \ \beta_4 : -x + 3y - 4z = 0.$$

Esercizio 4. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Mostrare che A e B sono invertibili e calcolare $B^{-1}AB$ e $A^{-1}BA$.

ii) Stabilire se qualcuna tra le matrici A, B, $B^{-1}AB$, $A^{-1}BA$ è diagonalizzabile.

Soluzione. Risulta $detA = 2$, $detB = 1$ e ciò mostra che A e B sono invertibili. Le matrici aggiunte di A e di B hanno per elementi i complementi algebrici delle rispettive trasposte. Pertanto:

$$AggA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad AggB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni caratteristiche di A e di B sono rispettivamente $det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$ e $det(B - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 = 0$.

Gli autovalori di A sono dunque $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$, e il fatto che essi sono distinti mostra che A è diagonalizzabile. Ma allora anche la matrice $B^{-1}AB$, coniugata di A mediante B, è diagonalizzabile.

La matrice B ha invece come unico autovalore $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 2. La sua molteplicità geometrica è la dimensione dello spazio dei corrispondenti autovettori, che sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 - x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}.$$

Tale dimensione è evidentemente 1, dunque minore della molteplicità algebrica, e ciò mostra che sia B che la matrice $A^{-1}BA$, ad essa coniugata, non sono diagonalizzabili.

Algebra Lineare (A-Z)
Prova scritta del 16.6.2004

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. **Spazio vettoriale numerico reale** $V = \mathbf{R}^4$. Siano assegnati i sottospazi $U = Span(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, essendo $\vec{u}_1 = (1,-1,0,1)$, $\vec{u}_2 = (1,1,0,0)$, $\vec{u}_3 = (2,0,0,1)$, e

$$W : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 & = 0. \end{cases}$$

i) Determinare una base B_U di U.

ii) Determinare una base B_W di W.

iii) Determinare una base B_{U+W} di $U + W$.

iv) Determinare la dimensione di $U \cap W$.

Soluzione.

i) La matrice che ha per colonne le coordinate di $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Essendo le prime due colonne di A non proporzionali e la terza colonna somma delle prime due, si ha che i vettori $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ costituiscono una base B_U di U.

ii) Risulta facilmente $W = \{(t_1, t_2, -t_1+t_2, t_1+t_2)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}} = \{t_1(1,0,-1,1)+t_2(0,1,1,1)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}}$. Una base B_W di W è quindi costituita dai vettori $\vec{w}_1 = (1,0,-1,1)$, $\vec{w}_2 = (0,1,1,1)$.

iii) Un sistema di generatori di $U + W$ è costituito dai vettori $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$. La matrice che ha per colonne le coordinate di tali vettori è:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Riducendo a scala si ottiene:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = S$$

La matrice a scala S ha rango 4, e quindi i vettori $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ costituiscono una base B_{U+W} di $U+W$. Ne segue $V = U \oplus W$.

iv) Avendo osservato che $V = U \oplus W$, risulta $U \cap W = \{0\}$, quindi dim $U \cap W = 0$.

Esercizio 2. Discutere la compatibilita' del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = -k \\ x_1 & +3x_2 & +kx_3 & = k \\ kx_1 & +3x_2 & +kx_3 & = 1, \end{cases}$$

essendo k un parametro reale, e determinare le soluzioni nei casi in cui esse esistono.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & k \\ k & 3 & k \end{pmatrix}$$

Essendo det $A = k^2 - 4k + 3$, si ha che det A =0 per $k = 1, 3$, e quindi rg $A = 3$ per $k \neq 1, 3$. Per $k = 1, 3$ si vede subito che rg $A = 2$.

Consideriamo ora la matrice completa del sistema

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -k \\ 1 & 3 & k & k \\ k & 3 & k & 1 \end{pmatrix}$$

Per $k \neq 1, 3$ è ovviamente rg $A =$ rg $A' = 3$. Per $k = 1$ si ha invece rg $A =$ rg $A' = 2$, e per $k = 3$ si ha rg A =2 e rg $A' = 3$. Ne segue che per $k \neq 1, 3$ il sistema ammette un'unica soluzione, che può essere scritta usando le formule di Cramer:

$$(x_1, x_2, x_3) = \Big(\frac{-k^2 + 4k - 3}{k^2 - 4k + 3}, \frac{-k^3 + k^2 - k + 1}{k^2 - 4k + 3}, \frac{4k^2 - 6k + 2}{k^2 - 4k + 3}\Big) = (-1, -\frac{k^2 + 1}{k - 3}, \frac{4k - 2}{k - 3}).$$

Per $k = 1$, essendo rg $A =$ rg $A' = 2$, is sistema ammette ∞^1 soluzioni. In questo caso il sistema è equivalente a quello formato dalle prime due equazioni, scritte per $k = 1$, ovvero:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = -1 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & = 1. \end{cases}$$

Posto $x_3 = t$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & = -t & -1 \\ x_1 & +3x_2 & = -t & +1, \end{cases}$$

da cui le soluzioni $x_1 = -2 - t, x_2 = 1, x_3 = t$.

Per $k = 3$, essendo rg A =2 e rg $A' = 3$, il sistema non ammette soluzioni.

Esercizio 3. Spazio affine, $RA(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per il punto $A=(1,-1,1)$, incidente la retta

$$s:\begin{cases} 2x+y-3z &= 0,\\ x+2y-z &= 0\end{cases}$$

e parallela al piano $p: x-2y+z=0$. Determinare inoltre le coordinate del punto $B=r\cap s$.

Soluzione. I parametri direttori della retta s sono:

$$l=det\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=5,\quad m=-det\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}=-1,\quad n=det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=3.$$

Osservato che s passa per l'origine, le sue equazioni parametriche sono quindi:

$$s:\begin{cases} x &= 5t\\ y &= -t\\ z &= 3t\end{cases}$$

con $t\in\mathbf{R}$. Un punto generico $P(t)\in s$ ha coordinate $(5t,-t,3t)$. Una retta generica per A incidente la retta s ha allora equazioni in forma di rapporti uguali:

$$\frac{x-1}{5t-1}=\frac{y+1}{-t+1}=\frac{z-1}{3t-1},$$

dove $(5t-1,-t+1,3t-1)$ hanno il significato di parametri direttori di tale retta. La condizione di parallelismo tra tale retta e il piano p dà $5t-1-2(-t+1)+3t-1=0$, da cui $t=\frac{2}{5}$. La retta r richiesta è quindi:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{\frac{3}{5}}=\frac{z-1}{\frac{1}{5}},$$

ovvero

$$\begin{cases} x &= 5z \quad -4\\ y &= 3z \quad -4.\end{cases}$$

Il punto di intersezione tra r e s è $P(\frac{2}{5})$, ovvero il punto di coordinate $(2,-\frac{2}{5},\frac{6}{5})$.

Esercizio 4. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_4)$.

Sia $F:V\longrightarrow V$ l'endomorfismo definito da

$$F(\vec{v})=(x_1-2x_3+2x_4)\vec{v}_1-x_2\vec{v}_2+(-x_3+2x_4)\vec{v}_3+x_4\vec{v}_4,$$

essendo (x_1,x_2,x_3,x_4) le coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base B. Determinare:

i) Una base $B' = (\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3', \vec{v}_4')$ formata da autovettori di F;

ii) La matrice A' associata a F rispetto alla base B';

iii) Una matrice non singolare C tale che $A' = C^{-1}AC$.

iv) Scrivere l'espressione di $F(\vec{v})$ rispetto alla base B'.

Soluzione. i) La matrice associata a F rispetto alla base B è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di F è dunque:

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)^2.$$

Esso si annulla per $\lambda = -1, 1$, che ne sono zeri di molteplicità due. Pertanto gli autovalori di F sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, entrambi con molteplicità algebrica 2.

Calcoliamo ora la molteplicità geometrica, dimensione dei rispettivi autospazi. Risulta:

$$V_{\lambda_1} : \begin{cases} 2x_1 \quad -2x_3 \quad +2x_4 & = 0 \\ \qquad\qquad\qquad 2x_4 & = 0. \end{cases}$$

Lo spazio delle soluzioni di questo sistema è $V_{-1} = \{(t_1, t_2, t_1, 0\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}} = \{t_1(1,0,1,0)+ t_2(0,1,0,0)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}} = \{t_1(\vec{v}_1 + \vec{v}_3) + t_2\vec{v}_2\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}}$. Una base di V_{-1} è costituita dagli autovettori $\vec{v}_1' = \vec{v}_1 + \vec{v}_3, \vec{v}_2' = \vec{v}_2$. Risulta poi:

$$V_{\lambda_2} : \begin{cases} -2x_3 \quad +2x_4 & = 0 \\ \qquad\quad -2x_2 & = 0. \end{cases}$$

Lo spazio delle soluzioni è ora $V_1 = \{(t_1, 0, t_2, t_2\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}} = \{t_1(1,0,0,0)+t_2(0,0,1,1)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}} = \{t_1\vec{v}_1 + t_2(\vec{v}_3 + \vec{v}_4)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}}$. Una base di V_1 è costituita dagli autovettori $\vec{v}_3' = \vec{v}_1, \vec{v}_4' = \vec{v}_3 + \vec{v}_4$. Una base di autovettori di V è dunque $B' = (\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3', \vec{v}_4'))$.

ii) La matrice associata a F rispetto a B' è la matrice diagonale:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) La matrice C richiesta è la matrice del cambiamento di base da B a B'. Quindi:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iv) L'espressione di $F(\vec{v})$ rispetto a B' è:

$$F(\vec{v}) = -x_1'\vec{v}_1' - x_2'\vec{v}_2' + x_3'\vec{v}_3' + x_4'\vec{v}_4',$$

essendo (x_1', x_2', x_3', x_4') le coordinate di $\vec{v}$ rispetto a B'.

Algebra Lineare (A-Z)
Soluzioni della prova scritta del 27.9.2004

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. **Spazio vettoriale numerico reale** $V = \mathbb{R}^4$. Assegnati i sottospazi

$$U : x_1 - x_4 = 0, \qquad W : \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

determinare una base B_U di U e una base B_W di W. Verificare che $V = U \oplus W$.

Soluzione.
Risulta immediatamente $U = \{t_1, t_2, t_3, t_1\}_{t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{R}} = \{t_1(1,0,0,1) + t_2(0,1,0,0) + t_3(0,0,1,0)\}_{t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{R}}$. Quindi una base B_U di U è costituita dai vettori $\vec{u}_1 = (1,0,0,1)$, $\vec{u}_2 = (0,1,0,0)$, $\vec{u}_3 = (0,0,1,0)$. Si ha poi $W = \{(t,0,0,-t)\}_{t\in\mathbb{R}} = \{t(1,0,0,-1)\}_{t\in\mathbb{R}}$, e quindi una base B_W di W è costituita dal vettore $\vec{w}_1 = (1,0,0,-1)$,.
Un sistema di generatori di $U + W$ è costituito dai vettori $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{w}_1$. La matrice che ha per colonne le coordinate di tali vettori è:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e risulta:

$$det\ C = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

e quindi i vettori $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{w}_1$ costituiscono una base B_{U+W} di $U+W$. Essendo dim $(U+W) = 4 =$ dim V, risulta $V = U + W$. La formula di Grassmann fornisce allora dim $(U \cap W) =$ dim U + dim W - dim $(U+W)$ = 3+1-4 =0, e quindi $V = U \oplus W$.

Esercizio 2. Determinare le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +kx_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +(k-1)x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & & +(k-1)x_3 & +x_4 & = 0, \end{cases}$$

essendo k un parametro reale.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k-1 & 0 \\ 2 & 0 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Detta B la sottomatrice quadrata di ordine 2 costituita dalle prime due righe e colonne di A, risulta evidentemente $\det B = 2 \neq 0$. Le sottomatrici quadrate di ordine 3 di A che orlano B sono:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & 1 & k-1 \\ 2 & 0 & k-1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tali sottomatrici hanno determinante uguale risp. a $-2k$ e 0. Pertanto risulta rg $A = 3$ se $k \neq 0$ e rg $A = 2$ se $k = 0$.

Per $k \neq 0$ le soluzioni sono dunque proporzionali ai minori di ordine 3, a segni alterni, della matrice dei coefficienti, ovvero l'insieme S_0 delle soluzioni è:

$$S_0 = \left\{ t \left(det \begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ 1 & k-1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 \end{pmatrix}, -det \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & k-1 & 0 \\ 2 & k-1 & 1 \end{pmatrix}, det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right.\right.$$

$$\left.\left. -det \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & 1 & k-1 \\ 2 & 0 & k-1 \end{pmatrix} \right) \right\}_{t \in \mathbb{R}} = \{ t(-k, k, 0, 2k) \}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Per $k = 0$ il sistema assegnato è equivalente a quello formato dalle prime due equazioni, scritte per $k = 0$, ovvero:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Posto $x_3 = t_1, x_4 = t_2$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -t_2 \\ x_1 + x_2 = t_1, \end{cases}$$

da cui le soluzioni $x_1 = \frac{1}{2}(t_1 - t_2), x_2 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$.

In tal caso dunque:

$$S_0 = \left\{ \frac{1}{2}(t_1 - t_2), \frac{1}{2}(t_1 + t_2), t_1, t_2 \right\}_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} = \left\{ t_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1 \right) \right\}_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}}.$$

Esercizio 3. Spazio affine, $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Verificare che le rette

$$r : \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \qquad r' : \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

sono tra loro parallele e non coincidenti. Determinare l'equazione cartesiana del piano p contenente r e r'.

Soluzione.
I parametri direttori della retta r sono:

$$l = det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2, m = -det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 4, n = det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

I parametri direttori di r' sono invece:

$$l' = det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -1, m' = -det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2, n' = det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Dunque $(l, m, n) = 2(l', m', n')$, e ne segue che r e r' sono parallele. Tali rette sono distinte poichè p. es. r passa per O mentre r' non passa per O. Il piano p richiesto può essere ottenuto come piano per un punto di r, p. es. O, e parallelo sia a r che alla retta s passante per O e per un punto $P' \in r'$, p. es. $P' = (0, 0, -1)$. I parametri direttori di s sono allora $(0, 0, -1)$. Risulta allora:

$$p : det\begin{pmatrix} x & y & z \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero $-4x - 2y = 0$.

Esercizio 4. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$.
Sia assegnato l'endomorfismo $F : V \to V$ definito da

$$F(\vec{v}) = -x_2\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 + (x_3 + 2x_4)\vec{v}_4,$$

essendo (x_1, x_2, x_3, x_4) le coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base B. Determinare la matrice A associata ad F rispetto a B. Determinare poi una base $B' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3, \vec{v}'_4)$ formata da autovettori di F, e detta A' la matrice diagonale associata a F rispetto alla base B', determinare la matrice non singolare C tale che $A' = C^{-1}AC$.

Soluzione. i) La matrice associata a F rispetto alla base B è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di F è dunque:

$$det(A-\lambda I) = det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Esso si annulla per $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, autovalori di molteplicità algebrica risp. $1, 2, 1$.

Risulta:

$$V_0 : \begin{cases} -x_2 & = 0 \\ x_2 & = 0 \\ x_3 & = 0 \\ x_3 + \quad 2x_4 & = 0. \end{cases}$$

Lo spazio delle soluzioni di questo sistema è $V_0 = \{t\vec{v}_1\}_{t\in\mathbf{R}}$ con base costituita dal vettore $\vec{v}'_1 = \vec{v}_1$. Risulta poi:

$$V_1 : \begin{cases} -x_1 \quad -x_2 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ x_3 + \quad x_4 & = 0, \end{cases}$$

e quindi $V_1 = \{(t_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + t_2(\vec{v}_3 + \vec{v}_4)\}_{t_1,t_2\in\mathbf{R}}$, con base costituita dagli autovettori $\vec{v}'_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}'_4 = \vec{v}_3 - \vec{v}_4$.

Si ha infine:

$$V_2 : \begin{cases} -2x_1 \quad -x_2 & = 0 \\ -x_2 & = 0 \\ -x_3 & = 0 \\ x_3 + & = 0, \end{cases}$$

e quindi $V_2 = \{t\vec{v}_4\}_{t\in\mathbf{R}}$, con base costituita dall' autovettore $\vec{v}'_4 = \vec{v}_4$.

Una base di autovettori di V è dunque $B' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3, \vec{v}'_4))$.

La matrice associata a F rispetto a B' è la matrice diagonale:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice C richiesta è la matrice del cambiamento di base da B a B'. Quindi:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Algebra Lineare (A-Z)
Soluzioni della prova in itinere del 14.11.2005

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Discutere la compatibilità del sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = & 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = & k+1 \end{cases}$$

essendo k un parametro reale, e determinarne le soluzioni nei casi in cui esse esistono.

Soluzione. La matrice dei coefficienti e dei coefficienti e termini noti del sistema sono rispettivamente:
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & k & k+1 \end{pmatrix}$. Applicando la riduzione a scala si perviene per esempio alla matrice $B' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & k+2 & k+2 \end{pmatrix}$. Se $k \neq -2$ il sistema assegnato è dunque equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 - \; x_2 \quad +x_3 = 1 \\ \qquad 3x_2 \quad -3x_3 = -2 \\ \qquad\qquad (k+2)x_3 = k+2 \end{cases},$$

il quale è compatibile ed ammette l'unica soluzione:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right).$$

Per $k = -2$ il sistema di partenza è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x_1 - \; x_2 \; +x_3 = 1 \\ \qquad 3x_2 \; -3x_3 = -2 \end{cases},$$

il quale è anch'esse compatibile ed ammette le ∞^1 soluzioni

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} + t, t\right),$$

al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

e dedurne che A è invertibile. Determinare la matrice A^{-1} inversa di A.

Soluzione. Una riduzione a scala di A è per esempio $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, che ha tre pivots e quindi rango 3. Ne segue che A è non singolare e invertibile. Per ottenere l'inversa

A^{-1} di A risolviamo l'equazione matriciale $AX = I$, essendo $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ una matrice incognita e I la matrice identica. Tale equazione matriciale è equivalente a tre sistemi lineari che hanno tutti A come matrice dei coefficienti e come colonne dei termini noti ordinatamente le colonne di I. Sia $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice che compendia le tre matrici dei coefficienti e termini noti dei tre sistemi.. Applicando prima l'algoritmo di Gauss-Jordan dall'alto verso il basso e poi quello dal basso verso l'altoi si perviene alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Dividendo ciascuna riga per il rispettivo pivot, si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$, la cui sottomatrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ costituita dalle ultime tre colonne è l'inversa A^{-1} di A.

Esercizio 3. Spazio vettoriale reale V di dimensione 4. Base $\mathcal{B}_V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$. Siano $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 - \vec{v}_4$, $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Si consideri il sottospazio $U = Span\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.
i) Determinare una base $\mathcal{B}_U$ di U.
ii) Considerato il vettore $\vec{u}(k) = 2\vec{v}_1 + k\vec{v}_2 - \vec{v}_3 + \vec{v}_4$, essendo k un parametro reale, si determini il valore k_0 del parametro per cui $\vec{u}(k_0) \in U$.
iii) Completare la base $\mathcal{B}_U$ in una base di V.

Soluzione. i) I vettori $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 - \vec{v}_4$, $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ sono per ipotesi un sistema di generatori di U. Tali vettori sono linearmente indipendenti, essendo non proporzionali, e costituiscono dunque una base $\mathcal{B}_U$ di U.
ii) Il vettore $\vec{u}(k) = 2\vec{v}_1 + k\vec{v}_2 - \vec{v}_3 + \vec{v}_4$ appartiene a U se e soltanto se i tre vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}(k)$ sono linearmente indipendenti. Questa condizione può imporsi richiedendo che $rg\ A(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & k \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} < 3$. Una riduzione a scala di $A(k)$ è per esempio $S(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & k-4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, che ha tre pivots per $k \neq 4$ e solo due per $k = 4$. Dunque $A(k)$ ha rango minore di 3 per $k = k_0 = 4$. Pertanto è $\vec{u}(k_0) \in U$ per $k_0 = 4$.
iii) Un sistema di generatori di V, i cui primi due vettori coincidono con $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, è per esempio $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$. Una base di V che completa la base $\mathcal{B}_U$ è quella che si estrae da tale sistema di generatori con l'algoritmo di Gauss-Jordan. Sia Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice che ha per colonne ordinatamente le colonne delle coordinate di $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$.
Una riduzione a scala di A è per esempio $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, che ha i pivots nella prima, seconda, terza e quinta colonna. Una base di V che completa la base $\mathcal{B}_U$ è quella costituita dai vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3$.

Esercizio 4. Spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$. Si considerino i sottospazi $U = Span(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, essendo $\vec{u}_1 = (1,-1,1,0)$, $\vec{u}_2 = (1,-1,0,-1)$, $\vec{u}_3 = (0,0,1,1)$, e

$$W : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 & = 0. \end{cases}$$

Determinare una base per ciascuno dei sottospazi U, W e $U \cap W$. Dedurne che $V = U \oplus W$.

Soluzione. La matrice delle componenti di $\vec{u}_1 = (1,-1,1,0), \vec{u}_2 = (1,-1,0,-1), \vec{u}_3 = (0,0,1,1)$ è$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, la cui riduzione a scala $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mostra che A ha rango 2 e dunque che i soli vettori $\vec{u}_1 = (1,-1,1,0), \vec{u}_2 = (1,-1,0,-1)$ costituiscono una base di U.

Per ottenere una base di W risolviamo il sistema lineare omogeneo che definisce W. Tale sistema è equivalente al sistema a scala:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & & = 0, \\ & 2x_2 & -x_3 - x_4 & & = 0. \end{cases}$$

che puo' dunque essere risolto assumendo come parametri $x_3 = t, x_4 = s$, ottenendo $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{-t+s}{2}, \frac{t+s}{2}, t, s)$. Una base di W si ottiene in corrispondenza delle scelte $(t,s) = (1,0)$ e $(t,s) = (0,1)$: $\vec{w}_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0), \vec{w}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)$. Per ottenere una base di $U \cap W$, scriviamo anzitutto le equazioni cartesiane di U, imponendo che sia

$$rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} < 3.$$

Tramite operazioni elementari sulle colonne, tale condizione è equivalente a:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_4 & -x_1 + x_3 - x_4 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} < 3,$$

che fornisce le equazioni cartesiane $-x_1 + x_3 - x_4 = 0$ e $x_1 + x_2 = 0$ di U. Mettendo a sistema tali ezuazioni con quelle di W otteniamo le equazioni di

$$U \cap W : \begin{cases} -x_1 & & +x_3 & -x_4 & = 0, \\ x_1 & +x_2 & & & = 0, \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & & = 0, \\ x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 0. \end{cases}$$

Ancora per riduzione a scala otteniamo il sistema equivalente:

$$U \cap W : \begin{cases} -x_1 & & +x_3 & -x_4 & = 0, \\ & x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0, \\ & & 3x_3 & -2x_4 & = 0, \\ & & & x_4 & = 0, \end{cases}$$

che mostra che la matrice dei coefficiente ha rango 4 e dunque che $U \cap W = 0$. Dalla formula di Grassmann segue allora che dim $U + W$ = dim U + dim W - dim $U \cap W = 2 + 2 - 0 = 4$, e quindi che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Algebra Lineare (A-Z)
Soluzioni della prova in itinere del 16.1.2006

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Piano affine ordinario - RA (Oxy). Sia assegnata la retta r: $3x-2y=0$.

i) Determinare equazioni parametriche di r.

ii) Detto P il punto generico di r, determinare equazioni parametriche e equazione cartesiana della retta s luogo del punto S simmetrico di P rispetto a $C(-1,1)$, al variare di P su r.

Soluzione. i) L'equazione cartesiana di r è omogenea, quindi soluzioni di tale equazione sono le coppie $(2t,3t)$, $t \in \mathbf{R}$. Pertanto equazioni parametriche di r sono $x=2t$, $y=3t$, $t \in \mathbf{R}$.

ii) Il punto generico $P \in r$ ha coordinate $(2t,3t)$. Allora, dette (x,y) le coordinate del punto S, simmetrico di P rispetto a C, imponendo che C sia il punto medio di P e S si hanno le condizioni $-1=\frac{2t+x}{2}, 1=\frac{3t+y}{2}$, ossia $x=-2-2t, y=2-3t$. Queste ultime, al variare di t in $\mathbf{R}$, sono equazioni parametriche della retta s. Risolvendo la prima equazione rispetto a t si ha $t=-1-\frac{1}{2}x$. Sostituendo nella seconda equazione si ha $y=2-3(-1-\frac{1}{2}x)$, ossia $3x-2y+10$, che è l'equazione cartesiana di s.

Esercizio 2. Spazio affine ordinario - RA $(Oxyz)$. Siano assegnati il punto $P_0(1,-1,-1)$ e le rette $r: x-y-1=0, y+z=0$ e $r': 2x+3y-2z=0, x-3y+z-1=0$.

i) Verificare che r, r' sono sghembe.

ii) Verificare che $P_0 \notin r$, $P_0 \notin r'$.

ii) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per P_0 e complanare sia con r che con r'.

iii) Verificare che s è incidente le due rette r e r'.

Soluzione. Risulta:

$$det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0,$$

e quindi le rette r e r' sono sghembe.

ii) Le coordinate di P_0 non soddisfano le equazioni di r, ne' di r'; dunque $P_0 \notin r$, e $P_0 \notin r'$,

iii) Detti p e p' i piani passanti per P_0 e contenenti rispettivamente r e r', risulta $s = p \cap p'$. Per ottenere l'equazione cartesiana del piano p consideriamo il fascio di piani F di asse la retta r e imponiamo il passaggio per P_0. L'equazione cartesiana di F è $x-y-1+k(y+z)=0$, $k \in \mathbb{R}$. Il passaggio per P_0 fornisce $-2k+1=0$, da cui $k=\frac{1}{2}$. Risulta allora $p: 2x-y+z-2=0$. Analogamente si ottiene $p': 3x+9y-5z+1=0$. Pertanto equazioni cartesiane di s sono: $2x-y+z-2=0, 3x+9y-5z+1=0$.

Parametri direttori della retta r sono:

$$l = det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1, \quad m = -det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1, \quad n = det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Parametri direttori della retta r' sono:

$$l' = det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -3, \quad m' = -det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4, \quad n' = det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -9.$$

Parametri direttori di s sono infine:

$$l_s = det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} = -4, \quad m_s = -det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 13, \quad n_s = det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = 21.$$

Essendo:

$$rg \begin{pmatrix} l & l_s \\ m & m_s \\ n & n_s \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 13 \\ 1 & 21 \end{pmatrix} = 2,$$

risulta che s non è parallela a r: Analogamente, essendo:

$$rg \begin{pmatrix} l' & l_s \\ m' & m_s \\ n' & n_s \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 13 \\ -9 & 21 \end{pmatrix} = 2,$$

s è non parallela anche con r'. Ne segue che s è incidente sia a r che a r'.

Esercizio 3. Spazio vettoriale reale V di dimensione 3, base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Siano assegnati i vettori $\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$, $\vec{v}'_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$, $\vec{v}'_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$.

i) Verificare che $\mathcal{B}' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3)$ è una base di V.

ii) Sia $\vec{v} = \vec{v}_1 x_1 + \vec{v}_2 x_2 + \vec{v}_3 x_3 = \vec{v}'_1 x'_1 + \vec{v}'_2 x'_2 + \vec{v}'_3 x'_3 \in V$. Determinare le formule di trasformazioni di coordinate di vettore da (x_1, x_2, x_3) a (x'_1, x'_2, x'_3).

iii) Assegnato il sottospazio vettoriale $U : x_1 - x_2 - x_3 = 0$, determinare l'equazione cartesiana di U nelle coordinate (x'_1, x'_2, x'_3).

Soluzione. i) Risulta

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0,$$

quindi i vettori $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3$ sono linermente indipendenti, ed essendo in numero di 3 costituiscono una base $\mathcal{B}'$ di V.

II) La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Allora le formule di trasformazione di coordinate di vettore nel passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ sono $X' = C^{-1}X$, avendo indicato con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e con $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ le colonne delle coordinate dei vettori $\vec{v}$ nelle due basi. Risulta

$$C^{-1} = \frac{Agg\ C}{det\ C} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

e quindi le formule richieste sono

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ x'_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ x'_3 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

iii) Le formule inverse sono:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 + x'_3 \\ x_2 = -x'_1 + x'_2 + x'_3 \\ x_3 = x'_1 - x'_2 + x'_3 \end{cases}$$

Sostituendo tali formule nell'equazione cartesiana di U si ha: $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_1 - x'_2 - x'_3 - x'_1 + x'_2 - x'_3 = 0$, ossia $x'_1 + x'_2 - x'_3 = 0$. Quest'ultima è l'equazione cartesiana di U rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

Esercizio 4. Spazio vettoriale numerico reale $V = \mathbb{R}^3$. Base canonica $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Sia assegnato l'endomorfismo $F : V \longrightarrow V$ definito da

$$F(\vec{v}) = (-x_1 - 3x_2 - 3x_3, 5x_2 + 6x_3, -3x_2 - 4x_3)$$

essendo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$.

i) Determinare la matrice A associata a F rispetto alla base canonica.

ii) Verificare che l'endomorfismo F è diagonalizzabile.

iii) Determinare una base $\mathcal{B}'$ di V costituita da autovettori di F.

iv) Detta A' la matrice diagonale associata a F rispetto alla base $\mathcal{B}'$, determinare una matrice non singolare C tale che $A' = C^{-1}AC$.

Soluzione. i) La matrice associata a F rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

ii) L'equazione caratteristica di F è quindi

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ 0 & 5-\lambda & 6 \\ 0 & -3 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0,$$

da cui gli autovalori $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 1.

Risulta:

$$V_{\lambda_1} : \begin{cases} -3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 6x_2 + 6x_3 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

e quindi $V_{\lambda_1} = \{(t_1, t_2, -t_2)\}_{t_1,t_2 \in \mathbb{R}} = \{t_1(1,0,0) + t_2(0,1,-1)\}_{t_1,t_2\in\mathbb{R}}$. Una base di V_{λ_1} è dunque costituita dagli autovettori $\vec{v}_1' = (1,0,0), \vec{v}_2' = (0,1,-1)$. Si ha allora $\dim V_{\lambda_1} = 2$ e quindi la molteplicità geometrica di λ_1 è 2.

Si ha poi:

$$V_{\lambda_2} : \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

e quindi $V_{\lambda_2} = \{t(1,-2,1)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Una base di V_{λ_2} è data dall' autovettore $\vec{v}_3' = (1,-2,1)$, e $\dim V_{\lambda_2} = 1$ e quindi la molteplicità geometrica di λ_2 è 1. Ne segue che F è diagonalizzabile.

iii) Una base di V costituita da autovettori di F è $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3')$.

iv) La matrice associata a F rispetto a tale base è $A' : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Una matrice non singolare C tale che $A' = C^{-1}AC$ è la matrice che ha per colonne rispettivamente le colonne dei vettori $\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3'$. Si ha dunque $C : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Algebra Lineare (A-Z)
Soluzioni della prova scritta del 23.1.2006

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Spazio vettoriale $V = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ = matrici quadrate reale di ordine 2.

Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, e si indichi con $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ una matrice variabile in V.

i) Verificare che il sottoinsieme $U = \{X \in V, AX = XA\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

ii) Determinare una base $\mathcal{B}_U$ di U.

iii) Completare la base $\mathcal{B}_U$ a una base $\mathcal{B}_V$ di V.

iv) Deteminare un sottospazio vettoriale W di V tale chbe $V = U \oplus W$.

Soluzione. i) Osserviamo in primo luogo che U non è vuoto, contenendo la matrice nulla e la matrice identica. Siano $X, Y \in U$, ovvero tali che $AX = XA, AY = YA$ e siano $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Allora, usando le proprietà del prodotto tra matrici: $A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda XA + \mu YA = (\lambda X + \mu Y)A$, ovvero $\lambda X + \mu Y \in U$. Pertanto U è un sottospazio vettoriale di V.

ii) Risulta:

$$AX = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_4 \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 - x_2 \\ x_3 + x_4 & x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

Dall'uguaglianza $AX = XA$ segue dunque il sistema:

$$\begin{cases} x_1 & +x_3 & = & x_1 & +x_2 \\ x_2 & +x_4 & = & x_1 & -x_2 \\ x_1 & -x_3 & = & x_3 & +x_4 \\ x_2 & -x_4 & = & x_3 & -x_4 \end{cases},$$

equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_2 & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & -x_4 & = 0 \end{cases},$$

il cui spazio delle soluzioni è $S_0 = \{(2t_1 + t_2, t_1, t_1, t_2)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}} = \{t_1(2,1,1,0) + t_2(1,0,0,1)\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}}$. Si ha pertanto $U = \{t_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}_{t_1,t_2 \in \mathbf{R}}$, e una base $\mathcal{B}_U$ di U è costituita dalle due matrici $X_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) Per completare $\mathcal{B}_U$ in una base $\mathcal{B}_V$ di V, consideriamo il sistema di generatori costituito da X_1, X_2 e dalle quattro matrici $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ che costituiscono la base canonica di V, ed applichiamo a esso l'algoritmo di Gauss-Jordan. Considerata la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha per colonne le coordinate, rispetto alla base canonica, delle sei matrici $X_1, X_2, E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, si ha con elementari passaggi che una sua riduzione a scala è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I pivots di tale matrice sono nella prima, seconda,terza e quarta colonna, e dunque un completamento $\mathcal{B}_V$ di $\mathcal{B}_U$ è dato da X_1, X_2, E_{11}, E_{12}.

iv) Essendo E_{11}, E_{12} le due matrici che completano la base $\mathcal{B}_U$ di U, si ha che $W = \text{Span}\,\{E_{11}, E_{12}\}$ è tale che $V = U \oplus W$.

Esercizio 2. Risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & 2x_2 & -x_3 & +kx_4 & = 0 \end{cases}$$

essendo k un parametro reale.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & k \end{pmatrix}$$

e una sua sottomatrice quadrata di ordine 2 a determinante non nullo è p. es. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le sottomatrici quadrate di ordine 3 che orlano B sono $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$. Tali sottomatrici hanno determinante rispettivamente 0 e $2k+2$. Allora per $k \neq -1$ risulta rg $A = 3$ e per il teorema di Kronecker è rg $A = 2$ se $k = -1$.

Nel caso $k \neq -1$ il sistema da risolvere ha tre equazioni, quattro incognite e rango massimo della matrice dei coefficienti. Una soluzione non banale è dunque data dai minori a segni alterni della matrice dei coefficienti, ovvero:

$$x_1 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & k \end{pmatrix} = -k-1, \quad x_2 = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix} = k+1,$$

$$x_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix} = 2k+2, \quad x_4 = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 0,$$

e ogni altra soluzione è del tipo $t(-k-1, k+1, 2k+2, 0), t \in \mathbf{R}$, o equivalentemente $t'(-1,1,2,0), t' \in \mathbf{R}$. Nel caso $k = -1$ il sistema assegnato è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 0 \end{cases}$$

Posto $x_3 = t_1, x_4 = t_2$, si ha subito $x_1 = -\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2$, $x_2 = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2$ e lo spazio delle soluzioni è $S_0 = \{(-\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2, -\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2, t_1, t_2)\}_{t_1,t_2 \in \mathbb{R}}$.

Esercizio 3. Spazio affine ordinario, $RA(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Siano assegnati il punto $P_0(1,0,1)$, la retta $r : x - y + z - 1 = 0, \quad x + y + z = 0$ e il piano $p : x + 3y - z = 0$.

i) Determinare equazioni parametriche della retta r.

ii) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per P_0, incidente la retta r e parallela al piano p.

iii) Determinare il punto A di intersezione tra r e s.

Soluzione. i) Per ottenere equazioni parametriche di r risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x & -y & +z & -1 & = & 0 \\ x & +y & +z & & = & 0 \end{cases}$$

Posto $z = t$, si ha immediatamente $x = \frac{1}{2} - t, y = \frac{1}{2}$. Allora equazioni parametriche di r sono $x = \frac{1}{2} - t, y = -\frac{1}{2}, z = t$ per $t \in \mathbb{R}$.

ii) Il punto generico P della retta r ha dunque coordinate $(\frac{1}{2} - t, -\frac{1}{2}, t)$. Ne segue che la retta generica passante per P_0 e incidente a r ha equazioni, in forma di rapporti uguali:

$$\frac{x-1}{-t-\frac{1}{2}} = \frac{y}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{t-1}.$$

Tale retta ha parametri direttori $(-t - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, t - 1)$. Imponendo il parallelismo con il piano p si ha la condizione $-t - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - t + 1 = 0$, da cui $t = -\frac{1}{2}$. La retta s richiesta ha dunque equazioni, in forma di rapporti uguali: $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{\frac{3}{2}}$, ovvero in forma più corretta equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x & -1 & & = & 0 \\ 3y & -z & +1 & = & 0 \end{cases}$$

iii) Il punto A di intersezione tra r e s è il punto di r che si ottiene poer $t = -\frac{1}{2}$. Le coordinate di A sono quindi $(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Esercizio 4. Spazi vettoriali numerici reali $U = \mathbb{R}^4$ e $V = \mathbb{R}^3$. Siano assegnate le applicazioni lineari $F : U \to V$ e $G : V \to U$, definite rispettivamente da

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = (y_1, y_2, y_3),$$

$$G(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2 - y_3, y_1 + y_2, y_2 - y_3, y_1 - y_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

i) Determinare la matrice A associata a F rispetto alle basi canoniche di U e di V, e la matrice B associata a G rispetto alle basi canoniche di V e di U.

ii) Considerato l'endomorfismo composto $G \circ F : U \to U$, determinare la matrice C associata a $G \circ F$ nella base canonica di U, e scrivere le equazioni di $G \circ F$.

iii) Determinare dimensione e basi dei due sottospazi vettoriali im $(G \circ F)$ e ker $(G \circ F)$. $G \circ F$ è un automorfismo?

Soluzione. i) Le matrici A e B richieste sono rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) La matrice C è invece:

$$C = BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e le equazioni ~~caratteristiche~~ di $G \circ F$ sono pertanto:

$$\begin{cases} z_1 = -x_2 - x_3 \\ z_2 = x_1 + x_4 \\ z_3 = -x_1 - x_3 \\ z_4 = x_1 - 2x_2 - x_4 \end{cases}$$

iii) Ne segue che ker $G \circ F$: $\begin{cases} -x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$, da cui ker $G \circ F = \{t(-1,-1,1,1)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Una base di ker $G \circ F$ è dunque costituita dal solo vettore $\vec{u}_1 = (-1,-1,1,1)$ ed è dim (ker $G \circ F$) =1. Pertanto dim (im $G \circ F$) = dim U - dim (ker $G \circ F$) $=4 - 1 = 3$. Il sottospazio im $G \circ F$ è generato dai quattro vettori riga della matrice C, e dunque una base di im $G \circ F$ è data da tre di essi linearmente indipendenti, p es. i primi tre: $\vec{w}_1 = (0,1,-1,0), \vec{w}_2 = (-1,0,0,-2), \vec{w}_3 = (-1,0,-1,0)$. Essendo ker $G \circ F \neq 0$, $G \circ F$ non è iniettivo, e dunque non è un automorfismo.

Algebra Lineare (A-Z)
Soluzioni della prova scritta del 10.2.2006

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Discutere la compatibilità del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +kx_3 & =1 \\ x_1 & +kx_2 & +x_3 & =-2 \\ kx_1 & +x_2 & +x_3 & =1, \end{cases}$$

essendo k un parametro reale, e determinare le soluzioni nei casi in cui esse esistono.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\det A = -k^3 + 3k - 2 = -(k+2)(k-1)^2$, si ha che $\det A = 0$ per $k = -2, 1$. Studiamo separatamente i tre casi $k \neq -2, 1$, $k = -2$ e $k = 1$.

Caso $k \neq -2, 1$. Essendo rg $A = 3$ il sistema è compatibile ed ammette un'unica soluzione, ottenibile p. es. con le formule di Cramer:

$$x_1 = \frac{det \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ -2 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{det\ A} = \frac{1}{k-1}, \quad x_2 = \frac{det \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}}{det\ A} = -\frac{2}{k-1},$$

$$x_3 = \frac{det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & -2 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}}{det\ A} = \frac{1}{k-1}.$$

Caso $k = -2$. La matrice dei coefficienti è in questo caso: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, che ha rango 2. La matrice completa del sistema, sempre per $k = -2$, ha l'ultima colonna uguale alla seconda, e quindi ha anch'essa rango 2. Il sistema è dunque compatibile e un sistema ad esso equivalente è

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & =1 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & =-2. \end{cases}$$

Posto $x_3 = t$, si ottiene facilmente $x_1 = t$, $x_2 = 1 + t$. Lo spazio delle soluzioni è $\mathcal{S} = \{(t, 1+t, t)\}_{t\in\mathbf{R}} = (0,1,0) + \{t(1,1,1)\}_{t\in\mathbf{R}}$.

Caso $k = 1$. In questo caso la matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 1, mentre la matrice completa $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha chiaramente rango 2. Ne segue che il sistema non ammette in questo caso soluzioni.

Esercizio 2. Spazio vettoriale reale V di dimensione 3. Base $B_V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Siano assegnati i sottospazi $U = Span(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, essendo $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$, $\vec{u}_3 = \vec{v}_1 - 5\vec{v}_2 + \vec{v}_3$, e

$$W : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 & = 0. \end{cases}$$

i) Determinare basi B_U di U e B_W di W.

ii) Determinare equazioni cartesiane di U e di $U \cap W$ e una base $B_{U\cap W}$ di $U \cap W$.

iii) Determinare una base B_{U+W} di $U + W$, e dire (giustificando la risposta) se $V = U \oplus W$.

Soluzione.

i) La matrice che ha per colonne le coordinate di $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Essendo uguali la prime e terza riga, A ha determinanbte nullo, e quindi $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ sono linearmente dipendenti. Essendo non proporzionali, e quindi indipendenti, i vettori $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, si ha che i vettori $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ costituiscono una base B_U di U. Osservato poi che il sistema che rappresenta W ha matrice dei coefficienti di rango 2, si ha facilmente $W = \{t(2,4,2)\}_{t\in\mathbf{R}} = \{t(\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3)\}_{t\in\mathbf{R}}$. Una base B_W di W è quindi costituita dal solo vettore $\vec{w} = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$.

ii) L'equazione cartesiana di U si ottiene imponendo che rg $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} < 3$, ovvero det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} = 0$, e quindi $U : x_1 - x_3 = 0$. Mettendo a sistema l'equazione cartesiana di U con quelle di W si ottiene

$$W : \begin{cases} x_1 - x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 & = 0. \end{cases}$$

La matrice associata a quest'ultimo sistema lineare omogeneo è:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

con det $C = 0$ e rg $C = 2$. Il sistema è dunque equivalente a quello che rappresenta W, e pertanto $U \cap W = W$. Ne segue che una base di $U \cap W$ è $\mathcal{B}_{U \cap W} = \mathcal{B}_W$.

iii) Da $U \cap W = W$ segue $W \subset U$, e quindi $U + W = U$. Dunque $\mathcal{B}_{U+W} = \mathcal{B}_U$. Infine V non è somma diretta di U e W, essendo $U \cap W = W \neq 0$.

Esercizio 3. Spazio affine ordinario, $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Siano assegnati il piano p : $x - 3y + 2z - 1 = 0$ e il punto $P_0 = (1, 2, 3)$.

i) Verificare che $P_0 \in p$.

ii) Scrivere equazioni cartesiane del fascio di rette di centro P_0 contenute in p.

iii) Determinare equazioni cartesiane della retta s del fascio parallela al piano p' : $y - z = 0$.

Soluzione. i) Basta sostituire le coordinate di P_0 nell'equazione di p e verificare che $1 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 1 = 0$.

ii) Per ottenere il fascio di rette richiesto, osserviamo che esso si può ottenere intersecando con il piano p un fascio di piani di asse una retta per P_0 e non contenuta in p. Una retta siffatta è una retta per P_0 non parallela a p, p. es. la retta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{2}$. Il fascio di piani di asse r ha quindi equazione cartesiana $2x - z + 1 + k(2y + 3z - 13) = 0$, ovvero $2x + 2ky + (3k - 1)z - 13k + 1 = 0$. Le equazioni richieste del fascio di rette sono quindi:

$$\begin{cases} 2x + 2ky - +(3k-1)z - 13k + 1 & = 0 \\ x - 3y + 2z - 1 & = 0. \end{cases}$$

iii) Parametri direttori della retta generica del fascio sono $l = \det \begin{pmatrix} 2k & 3k-1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 13k - 3$, $m =$ - $\det \begin{pmatrix} 2 & 3k-1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3k - 5$, $n = \det \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -2k - 6$. La condizione di parallelismo richiesta fornisce $3k - 5 - (-2k - 6) = 0$, ossia $k = -\frac{1}{5}$. Sostituendo tale valore di k nell'equazione cartesiana del fascio di rette e semplificando si ha:

$$s : \begin{cases} 5x - y - -4z + 9 & = 0 \\ x - 3y + 2z - 1 & = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia assegnata la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -1 & k & 0 \end{pmatrix}$, essendo k un parametro reale.

i) Determinare il valore di k per cui A_k ammette come autovalore $\lambda = 0$, e si denoti con A la matrice che si ottiene per tale valore di k.

ii) Verificare che A è una matrice diagonalizzabile.

iii) Determinare una matrice non singolare C che diagonalizza A, ossia tale che $C^{-1}AC$ sia una matrice diagonale.

Soluzione. i) L'equazione caratteristica di A_k è $\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 5 & -3 \\ -3 & 6-\lambda & -3 \\ -1 & k & -\lambda \end{pmatrix} = 0$, ovvero $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3k\lambda + 3k - 3 = 0$. Tale equazione ammette soluzione $\lambda = 0$ se e solo se $k = 1$. Pertanto la matrice richiesta è $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) L'equazione caratteristica di A è $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 4\lambda - 3) = 0$, da cui i tre autovalori distinti $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$. Ne segue che A è diagonalizzabile.

iii) Per ottenere una matrice non singolare C tale che $C^{-1}AC$ sia diagonale, determiniamo una base di autovettori. Risulta:

$$V_{\lambda_1} : \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi $V_{\lambda_1} = \{t(1,1,1)\}_{t\in\mathbf{R}}$. Una base di V_{λ_1} è dunque costituita dal solo autovettore $\vec{v}_1' = (1,1,1)$.

Si ha poi:

$$V_{\lambda_2} : \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

e quindi $V_{\lambda_2} = \{t(1,0,-1)\}_{t\in\mathbf{R}}$. Una base di V_{λ_2} è data dall' autovettore $\vec{v}_2' = (1,0,-1)$.

Infine:

$$V_{\lambda_3} : \begin{cases} -5x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

e quindi $V_{\lambda_3} = \{t(1,1,0)\}_{t\in\mathbf{R}}$. Una base di V_{λ_3} è data dall' autovettore $\vec{v}_3' = (1,1,0)$. Una base di autovettori è dunque $\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3'$ e la matrice C richiesta ha per colonne le coordinate di tale tre vettori. Dunque:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Algebra Lineare (A-Z)
Soluzioni della prova scritta del 12.6.2006

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Determinare le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +kx_3 & +x_4 & =0 \\ kx_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ (k-1)x_1 & +2x_2 & -(k+1)x_3 & +kx_4 & =0 \end{cases}$$

al variare di k parametro reale.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 1 \\ k & 1 & -1 & 1 \\ k-1 & 2 & -k-1 & k \end{pmatrix}.$$

Determiniamo il rango di A. La sottomatrice di A ottenuta considerando le prime due righe e la seconda e quarta colonna, ossia $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ha determinante $-2 \neq 0$, quindi A ha rango ≥ 2. Le sottomatrici di A che orlano B sono $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & 2 & k \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} -1 & k & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -k-1 & k \end{pmatrix}$. Risulta det $C = k^2 + k$ e det $D = -k^2 + k$. Allora è det $C = 0$ per kϑ0 e $k = -1$ e det $D = 0$ per $k = 0$ e $k = 1$. Dal teorema di Kronecker si ha che rg A $=3 per k \neq 0$ e rg $A = 2$ per $k = 0$. Esaminiamo distintamente questi due casi.

Caso $k \neq 0$. Essendo rg $A = 3$, il sistema di tre equazioni in quattro incognite ha ∞^1 soluzioni, tutte proporzionali ai minori di ordine tre, a segni alterni, della matrice dei coefficienti. Lo spazio delle soluzioni è dunque $\mathcal{S}_0 = \{t(-k^2 + k, k^3 + k, k^2 + k, 0)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Caso $k = 0$. Il sistema assegnato è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_4 & =0 \\ +x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \end{cases}$$

Ponendo $x_1 = t_1$ e $x_3 = t_2$, si ha subito $x_2 = \frac{t_1+t_2}{2}$, $x_4 = \frac{-t_1+t_2}{2}$. Lo spazio delle soluzioni è quindi $\mathcal{S}_0 = \{(t_1, \frac{t_1+t_2}{2}, t_2, \frac{-t_1+t_2}{2})\}_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}}$.

Esercizio 2. Spazio vettoriale reale V di dimensione 3. Base $\mathcal{B}_V = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Siano assegnati i vettori $\vec{u}_1(k) = k\vec{v}_1 - k\vec{v}_2$, $\vec{u}_2(k) = k\vec{v}_1 + k\vec{v}_3$, $\vec{u}_3(k) = k\vec{v}_2 - \vec{v}_3$, essendo k un parametro reale.

i) Determinare il valore k_0 di k per cui il sottospazio $U = \text{Span}\,(\vec{u}_1(k_0), \vec{u}_2(k_0), \vec{u}_3(k_0))$ abbia dimensione reale due.

ii) Determinare una base B_U di U.

iii) Determinare un sottospazio W di V tale che $V = U \oplus W$.

Soluzione. i) La matrice che ha per colonne le coordinate di $\vec{u}_1(k)$, $\vec{u}_2(k)$, $\vec{u}_3(k)$ è

$$A = \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ -k & 0 & k \\ 0 & k & -1 \end{pmatrix}$$

Risulta $\det A = -k^3 - k^2$, e quindi $\det A = 0$ per $k = 0$ e $k = -1$. per tali valori di k i tre vettori sono linearmente dipendenti. Più precisamente, per $k = 0$ i vettori $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ sono entrambi nulli, mentre $\vec{U}_3(0) = -\vec{v}_3$. In questo caso i tre vettori generano un sottospazio Span $(\vec{u}_1(0), \vec{u}_2(0), \vec{u}_3(0))$ di dimensione uno. Se $k0-1$, risulta $\vec{u}_1 = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{u}_2 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_3, \vec{u}_3 = -\vec{v}_2 - \vec{v}_3$ e siccome tra tali vettori ve ne sono due linearmente indipendenti, il valore richiesto k_0 è proprio -1.

ii) Dunque $U =$ Span $(\vec{u}_1(-1), \vec{u}_2(-1), \vec{u}_3(-1))$ ha dimensione due e una base è p. es. $B_U = (\vec{u}_1(-1), \vec{u}_2(-1)$.

iii) Per ottenere un sottospazio W di V tale che $V = U \oplus W$, completiamo la base B_U ad una base di V. Cio' può farsi p. es. seguendo l'algoritmo di Gauss al sistema di generatori dato da $\vec{u}_1(-1), \vec{u}_2(-1), \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Riducendo a scala la matrice che ha per colonne le coordinate di tali vettor, si ha subito che i vettori $\vec{u}_1(-1), \vec{u}_2(-1), \vec{v}_1$ costituiscono un completamento della base B_U. Ne segue che una possibile scelta di W è $W =$ Span $(\vec{v}_1)$.

Esercizio 3. Spazio affine ordinario, $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Siano assegnate le rette r_1 : $x - y + 2z = 0$, $x + y = 0$ e $r_2 : x + y - z = 0$, $x - y + z - 1 = 0$.

i) Verificare che le rette r_1 e r_2 sono sghembe.

ii) Scrivere equazioni parametriche di r_1 e r_2.

iii) Scrivere equazioni, in forma di rapporti uguali, della retta generica che incide sia r_1 che r_2.

iv) Scrivere equazioni cartesiane della retta r incidente sia r_1 che r_2 e che risulta parallela all'asse y.

Soluzione. i) Risulta $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0,$

e quindi le rette r_1, r_2 sono sghembe.

ii) Equazioni parametriche di r_1 sono, p. es. $x = -t_1, y = t_1, z = t_1$, $t_1 \in \mathbb{R}$. Equazioni parametriche di r_2 sono, p. es. $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2} + t_2, z = t_2$, $t_2 \in \mathbb{R}$.

iii) Detto $P_1(t_1)$ il punto generico di r_1 e $P_2(t_2)$ il punto generico di r_2, la generica retta incidente le due è la retta per $P_1(t_1)$ e $P_2(t_2)$, che ha equazioni, sotto forma di rapporti uguali

$$\frac{x + t_1}{\frac{1}{2} + t_1} = \frac{y - t_1}{-\frac{1}{2} - t_1 + t_2} = \frac{z - t_1}{-t_1 + t_2}$$

iv) I parametri direttori di quest'ultima retta sono $l = \frac{1}{2} + t_1$, $m = -\frac{1}{2} - t_1 + t_2$, $n = -t_1 + t_2$, mentre i parametri direttori dell'asse y sono $l' = 0, m' = 1, n' = 0$. La condizione di parallelismo è la proporzionalità tra queste due terne e fornisce subito $t_1 = t_2 = -\frac{1}{2}$. Dunque la retta s è $\frac{x+t_1}{0} = \frac{y-t_1}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-t_1}{0}$, ovvero $x = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Spazio vettoriale numerico reale $V = \mathbb{R}^4$. Sia assegnato l'endomorfismo $F : V \to V$, definito da

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, 3x_2, 4x_2 - x_3, x_4),$$

essendo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

i) Determinare la matrice A associata a F rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ di V.

ii) Determinare gli autovalori di F e le relative molteplicità algebriche e geometriche. Dedurne che F è diagonalizzabile.

iii) Determinare una base $\mathcal{B}' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3, \vec{v}'_4)$ di V costituita da autovettori di F.

iv) Detta A' la matrice diagonale associata a F nella base $\mathcal{B}'$, determinare una matrice non singolare C tale che $A' = C^{-1}AC$.

Soluzione. i) La matrice A associata a F è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) L' equazione caratteristica di F è:

$$det(A-\lambda I) = det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2(1-\lambda)(3-\lambda) = 0.$$

Gli autovalori di F sono quindi $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ con molteplicità algebrica rispettivamente $2, 1, 1$.

iii) Calcoliamo ora la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = -1$, quelle di $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ essendo necessariamente uno. Risulta:

$$V_{\lambda_1} : \begin{cases} 4x_2 &= 0 \\ 4x_2 &= 0 \\ 2x_4 &= 0. \end{cases}$$

Lo spazio delle soluzioni di questo sistema è $V_{-1} = \{(t_1, 0, t_2, 0\}_{t_1,t_2 \in \mathbb{R}} = \{t_1(1,0,0,0)+ t_2(0,0,1,0)\}_{t_1,t_2\in\mathbb{R}}$ e una base di V_{-1} è costituita dagli autovettori $\vec{v}_1 = \vec{e}_1, \vec{v}_2 = \vec{e}_3$. La molteplicità geometrica è dunque due e F è pertanto diagonalizzabile.

iv) Per determinare una base di autovettori, determiniamo:

$$V_{\lambda_2} : \begin{cases} -2x_1 & & = 0 \\ 2x_2 & & = 0 \\ 4x_2 & -2x_3 & = 0, \end{cases}$$

da cui $V_1 = \{0, 0, 0, t\}_{t\in\mathbb{R}} = \{t(0,0,0,1)\}_{t\in\mathbb{R}}$, con base il vettore $\vec{e}_4$. Similmente

$$V_{\lambda_3} : \begin{cases} -4x_1 & & = 0 \\ 4x_2 & -4x_3 & = 0 \\ & -2x_4 & = 0, \end{cases}$$

da cui $V_3 = \{0, t, t, 0\}_{t \in \mathbb{R}} = \{t(0, 1, 1, 0)\}_{t \in \mathbb{R}}$, con base il vettore $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Una base di autovettori di V è dunque $B' = (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3, \vec{v}'_4)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$.

v) La matrice associata a F rispetto a B' è la matrice diagonale:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

e una matrice C tale che $A' = C^{-1}AC$ è la matrice del cambiamento di base da B a B', ovvero

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Algebra Lineare (A-Z)
Soluzioni della prova scritta del 25.9.2006

Proff. R. Mazzocco - P. Piccinni

Esercizio 1. Discutere la compatibilità del sistema lineare

$$\begin{cases} kx_1 & +x_2 & +kx_3 & =k \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =k \\ x_1 & +kx_2 & +x_3 & =k, \end{cases}$$

essendo k un parametro reale, e determinare le soluzioni nei casi in cui esse esistono.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo det $A = -k-1+k^2+k-1+k^2 = 2k^2-2$, si ha che det A =0 per $k=-1,1$. Studiamo separatamente i tre casi $k \neq -1,1$, $k=-1$ e $k=1$.

Caso $k \neq -1,1$. Essendo rg $A=3$ il sistema è compatibile ed ammette un'unica soluzione, ottenibile p. es. con le formule di Cramer:

$$x_1 = \frac{det \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ k & k & 1 \end{pmatrix}}{det\ A} = \frac{k^2+3k}{2(k+1)}, \quad x_2 = \frac{det \begin{pmatrix} k & k & k \\ 1 & k & -1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}}{det\ A} = \frac{k}{k+1},$$

$$x_3 = \frac{det \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 1 & -1 & k \\ 1 & k & k \end{pmatrix}}{det\ A} = -\frac{1}{2}k.$$

Caso $k=-1$. La matrice dei coefficienti e termini noti del sistema è in questo caso: $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, che ha rango 3, essendo p. es. non nullo il minore di ordine 3 ottenuto cancellando la prima colonna. E' invece nullo il determinante dei coefficienti del sistema, la cui matrice ha in questo caso rango 2. Dal teorema di Rouche'-Capelli segue dunque che il sistema non ammette soluzioni.

Caso $k=1$. In questo caso la prima e terza equazione del sistema sono uguali, ed il sistema è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & =1. \end{cases}$$

Posto $x_3 = t$, si ottiene facilmente $x_1 = 1$, $x_2 = -t$. Lo spazio delle soluzioni è $\mathcal{S} = \{(1,-t,t)\}_{t \in \mathbf{R}}$.

Esercizio 2. Spazio vettoriale $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ = matrici quadrate reali di ordine 2.

i) Verificare che il sottoinsieme $U = \{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},\ x_2 + x_3 = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

ii) Determinare una base $\mathcal{B}_U$ di U.

iii) Deteminare un sottospazio vettoriale W di V tale che $V = U \oplus W$.

Soluzione. i) Osserviamo in primo luogo che U non è vuoto, contenendo la matrice nulla e la matrice identica. Siano $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \in U$, ovvero tali che $x_2 + x_3 = y_2 + y_3 = 0$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $aX + bY = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ ax_3 + by_3 & ax_4 + by_4 \end{pmatrix}$, e dunque $ax_2+by_2+ax_3+by_3 = a(x_2+x_3)+b(y_2+y_3) = 0$. Pertanto U è un sottospazio vettoriale di V.

ii) Posto $x_1 = t_1, x_2 = t_2, x_4 = t_3$ risulta:

$$U = \{\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ -t_2 & t_3 \end{pmatrix}\}_{t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}} = \{t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}_{t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}},$$

e ne segue che una base $\mathcal{B}_U$ di U è costituita dalle matrici $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) Per ottenere un sottospazio W supplementare di U entro V, completiamo la base $\mathcal{B}_U$ in una base $\mathcal{B}_V$ di V. Consideriamo quindi il sistema di generatori di V costituito dalle tre matrici J_1, J_2, J_3 che costituiscono $\mathcal{B}_U$ e dalle quattro matrici $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ che costituiscono la base canonica di V, ed applichiamo a esso l'algoritmo di Gauss-Jordan. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

che ha per colonne le coordinate, rispetto alla base canonica, di tali sette matrici si riduce facilmente alla matrice a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I pivots di tale matrice sono nella prima, seconda, terza e quinta colonna, e dunque un completamento $\mathcal{B}_V$ di $\mathcal{B}_U$ è dato aggiungendo la matrice che ha le componenti date dagli elementi della quinta colonna. Tale matrice è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e quindi $W = \{t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Esercizio 3. Spazio affine ordinario, $RA(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Siano assegnati il punto $P_0 = (1,1,0)$, la retta $r : x+y-z-4=0, x-y-3z-2=0$ ed il piano $p : x-y-2z+1=0$.

i) Verificare che $P_0 \notin r$ e $P_0 \notin p$.

ii) Scrivere equazioni parametriche della retta r.

iii) Scrivere equazioni in forma di rapportri uguali della retta generica passante per P_0 e incidente la retta r.

iv) Determinare la retta s passante per P_0, incidente la retta r e parallela al piano p.

Soluzione. i) Le coordinate di P_0 non soddisfano, p. es., la prima equazione di r, quindi $P_0 \notin r$. Le coordinate di P_0 non soddisfano neanche l' equazione di p, e dunque $P_0 \notin p$.

ii) Posto $z=t$ nelle equazioni cartesiane di r si ha il sistema:

$$\begin{cases} x + y = t + 4 \\ x - y = 3t + 2 \end{cases}$$

che fornisce $x = 2t+3$, $y = -t+1$. Ne segue che $x = 2t+3$, $y = -t+1$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, sono equazioni parametriche di r.

iii) Il punto generico $P(t)$ della retta r ha dunque coordinate $(2t+3, -t+1, t)$. Ne segue che la retta generica passante per P_0 e incidente a r ha equazioni, in forma di rapporti uguali:

$$\frac{x-1}{2t+2} = \frac{y-1}{-t} = \frac{z}{t}.$$

iv) Tale retta ha parametri direttori $(l(t) = 2t+2, m(t) = -t, n(t) = t)$. Imponendo il parallelismo con il piano p si ha la condizione $2t+2+t-2t=0$, da cui $t=-2$. La retta s richiesta ha dunque equazioni, in forma di rapporti uguali: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$.

Esercizio 4. Sia assegnata la matrice reale quadrata $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

i) Determinare gli autovalori di A, indicandone le rispettive molteplicità algebriche.

ii) Determinare la molteplicità geometrica di ciascun autovalore.

iii) Dedurne che A è una matrice diagonalizzabile.

iv) Scrivere una matrice diagonale A' simile ad A e determinare una matrice non singolare C tale che $A' = C^{-1}AC$.

Soluzione. i) L' equazione caratteristica di A è:

$$det(A-\lambda I) = det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2(-\lambda)^2 = 0.$$

Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica rispettivamente $a_1 = 2, a_2 = 2$.

ii) Calcoliamo ora la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = -1$ e di $\lambda_2 = 0$. Risulta V_{λ_1} : $x_3 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Lo spazio delle soluzioni di questo sistema è $V_{-1} = \{(t_1, 0, 0, t_2\}_{t_1,t_2\in\mathbf{R}} = \{t_1(1, 0, 0, 0) + t_2(0, 0, 0, 1)\}_{t_1,t_2\in\mathbf{R}}$ e una base di V_{-1} è costituita dagli autovettori $\vec{v}_1 = \vec{e}_1, \vec{v}_2 = \vec{e}_4$. La molteplicità geometrica di $\lambda_1 = -1$ è dunque $g_1 = 2$. Similmente abbiamo $V_{\lambda_2} : -x_1 + x_3 = 0, -x_4 = 0$, e quindi $V_0 = \{(t_1, t_2, t_1, 0\}_{t_1,t_2\in\mathbf{R}} = \{t_1(1, 0, 1, 0) + t_2(0, 1, 0, 0)\}_{t_1,t_2\in\mathbf{R}}$ e una base di V_0 è costituita dagli autovettori $\vec{v}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{v}_4 = \vec{e}_2$. Anche la molteplicità geometrica di $\lambda_2 = 0$ è dunque $g_2 = 2$.

iii) Essendo $a_1 + a_2 = 4$ e $a_1 = g_1, a_2 = g_2$, la matrice A è diagonalizzabile.

iv) Una matrice diagonale simile ad A è p. es.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

matrice associata nella base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ allo stesso endomorfismo $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ rappresentato da A nella base canonica $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ di $\mathbf{R}^4$. Una matrice C tale che $A' = C^{-1}AC$ è la matrice del cambiamento di base da B a B', ovvero

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$