ESERCIZI DI GEOMETRIA (Per FISICI)
CORSO DEL PROF. RENZO MAZZOCCO
A.A. 2009-2010
Foglio N. 4

1. Spazi vettoriali reali V di dimensione tre e W di dimensione quattro. Basi $B_V=(v_1,v_2,v_3)$ e $B_W=(w_1,w_2,w_3,w_4)$. Sia $F:V\to W$ l'applicazione lineare tale che

$$F(v_1)=2w_1-w_2+w_3,\ F(v_2)=-w_1+2w_2-w_4,\ F(v_3)=w_1+w_2+w_3-w_4.$$

(a) Determinare la matrice e le equazioni di F rispetto alle basi B_V e B_W.
(b) Determinare il nucleo e l'immagine di F.
(c) Dire se F è iniettiva e/o surgettiva.

2. Spazi vettoriali numerici reali $V=R^2$ e $W=R^3$. Assegnata la matrice A di righe

$$A^{(1)}=(1,1,1)$$
$$A^{(2)}=(1,1,-1),$$

si consideri l'applicazione lineare $F:V\to W$ associata ad A rispetto alle basi canoniche di V e W.
(a) Scrivere l'espressione di F(v) rispetto alle basi canoniche di V e W.
(b) Calcolare il rango di A e dedurne se F è iniettiva e/o surgettiva.

3. Spazio vettoriale reale V di dimensione tre. Base $B=(v_1,v_2,v_3)$. Assegnati gli endomorfismi $F:V\to V$ e $G:V\to V$, definiti rispettivamente da

$$F(v)=(x_1-x_2+x_3)v_1+(x_1+x_2)v_2+(x_1+x_3)v_3$$

e

$$G(v)=(x_1+x_2+2x_3)v_1+(x_1-x_2)v_2+(2x_1+2x_3)v_3,$$

essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$, si consideri il prodotto operatorio G^oF: $V\to V$.
(a) Determinare la matrice C associata all'endomorfismo G^oF rispetto alla base B.
(b) Determinare il nucleo e l'immagine di G^oF.
(c) Dire se G^oF è un automorfismo.

4. Spazio vettoriale numerico reale $V=R^2$. Sia assegnata l'applicazione $F:V\to V$ definita da

$$F(v)=(x_1+x_2,x_1-x_2),$$

essendo $v=(x_1,x_2)$.
(a) Verificare che F è un automorfismo.
(b) Considerato l'automorfismo inverso $F^{-1}:V\to V$, scrivere l'espressione di $F^{-1}(v)$ rispetto alla base canonica di V.

5. Spazio vettoriale $V=M_2(R)$ delle matrici quadrate reali del secondo ordine. Sia assegnata l'applicazione $F:V\to V$, definita da

$$F(A)=(1/2)(A+{}^tA),$$

essendo $A\in V$.
(a) Verificare che F è un endomorfismo di V.
(b) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di V e scrivere le equazioni di F rispetto a tale base.
(c) Determinare il nucleo e l'immagine di F.
(d) Dire se F è un automorfismo.

6. Spazio vettoriale numerico reale $V=R^3$. Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\to V$ definito da

$$F(v)=(-x_1-3x_2-3x_3, 5x_2+6x_3, -3x_2-4x_3),$$

essendo $v=(x_1,x_2,x_3)$.

(a) Determinare la matrice A associata ad F rispetto alla base canonica di V.
(b) Verificare che l'endomorfismo F è diagonalizzabile.
(c) Determinare una base B′ di V costituita da autovettori rispetto ad F.
(d) Detta A′ la matrice associata ad F rispetto alla base B′, determinare una matrice non singolare C tale che $A'=C^{-1}AC$.
(e) Scrivere l'espressione di F(v) rispetto a B′.

7. Spazio vettoriale reale V di dimensione tre. Base $B=(v_1,v_2,v_3)$. Sia $F:V\to V$ l'endomorfismo tale che

$$F(v_1)=3v_1+2v_2+3v_3,\ F(v_2)=2v_1+2v_3,\ F(v_3)=-v_1-2v_2-v_3.$$

(a) Determinare la matrice A associata rispetto alla base B.
(b) Determinare gli autovalori con le rispettive molteplicità algebrica e geometrica.
(c) Dire se F è diagonalizzabile.

8. Spazio vettoriale numerico reale $V=R^4$. Sia $F:V\to V$ l'endomorfismo definito da

$$F(v)=(-x_1, 3x_2, 4x_2-x_3, x_4),$$

essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

(a) Determinare la matrice A associata a F rispetto alla base canonica di V.
(b) Determinare gli autovalori di F con le rispettive molteplicità algebrica e geometrica e dedurne che F è diagonalizzabile.
(c) Detta A′ la matrice associata ad F rispetto alla base B′, determinare una matrice non singolare C tale che $A'=C^{-1}AC$.
(d) Scrivere l'espressione di F(v) rispetto a B′.

9. Siano assegnate la matrice quadrata reale A di righe

$$A^{(1)}=(1,0,0)$$
$$A^{(2)}=(0,1,1)$$
$$A^{(3)}=(0,0,1)$$

e la matrice quadrata reale B di righe

$$B^{(1)}=(1,0,0),$$
$$B^{(2)}=(0,0,1),$$
$$B^{(3)}=(0,1,0).$$

(a) Verificare che le matrici A e B sono invertibili.
(b) Determinare le matrici inverse A^{-1} e B^{-1}.
(c) Verificare se le matrici A e B sono o non sono diagonalizzabili.
(d) Dire se le matrici $B^{-1}AB$ e $A^{-1}BA$ sono o non sono diagonalizzabili.

10. Spazio vettoriale numerico reale $V=R^3$. Sia assegnata la matrice quadrata reale A di righe

$$A^{(1)}=(-4-k, 0, -4-2k)$$
$$A^{(2)}=(0,-2,0)$$
$$A^{(3)}=(2+k, 0, 2+2k),$$

essendo k un parametro reale.

(a) Determinare il valore k_0 del parametro tale che la matrice corrispondente, che indicheremo soltanto con A, ammetta un autovalore coincidente con 0.
(b) Verificare che la matrice A è diagonalizzabile.
(c) Determinare una base di V costituita da autovettori rispetto ad A.
(d) Determinare una matrice non singolare C tale che $C^{-1}AC$ sia una matrice diagonale.

<