ESERCIZI DI GEOMETRIA (Per FISICI)
CORSO DEL PROF. RENZO MAZZOCCO
A.A. 2009-2010

Foglio N. 2

1. Calcolare il rango della matrice A col metodo dei pivots, sapendo che le righe di A sono $A^{(1)}=(1,-1,0,k+1)$, $A^{(2)}=(0,1,1,-1)$, $A^{(3)}=(-1,2,1,2k-2)$ e $A^{(4)}=(1,1,2,k-1)$.

2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$. Determinare per quale valore del parametro reale k i vettori

$$\mathbf{w}_1(1,0,-1,2),\ \mathbf{w}_2(2,-1,1,2),\ \mathbf{w}_3(-1,2,k,k+7)$$

risultano linearmente dipendenti. In tal caso, posto $W=\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3)$, determinare una base B_W di W e scrivere equazioni parametriche e cartesiane di W.

3. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$.
Sia $U=\mathrm{Span}(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$, essendo $\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_4$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_3=2\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_4$.
Determinare una base B_U di U e completarla in una base di V. Determinare un sottospazio vettoriale W tale che $V=U\oplus W$.

4. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$. Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale $U\cap W$, essendo
U: $x_1+x_2-x_4=0$,
W: $x_1-x_2+x_3=0$, $x_2-x_3-x_4=0$, $kx_1+x_2+x_3-x_4=0$
e k un parametro reale.

5. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$. Assegnati i sottospazi vettoriali

$$U:\ x_1-x_2+x_4=0,\ x_1+x_2+x_3-x_4=0 \text{ e } W=\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3),$$

essendo $\mathbf{w}_1(1,1,-1,-1)$, $\mathbf{w}_2(-1,-1,1,-1)$, $\mathbf{w}_3(0,1,1,0)$,
determinare una base e la dimensione di U+W. Dedurne che U+W=V.

6. Verificare che la matrice A avente come righe $A^{(1)}=(1,-1,0)$ $A^{(2)}=(0,1,1)$ e $A^{(3)}=(1,2,1)$ è invertibile e determinarne l'inversa A^{-1}.

7. Discutere la compatibilità del sistema lineare

$$3x_1-2x_2+kx_3=3,\ 2kx_1+x_2-x_3=4,\ kx_1-4x_2+2kx_3=2,$$

essendo k un parametro reale, e determinare le soluzioni nei casi in cui esse esistano, usando il metodo dei determinanti.

8. Risolvere il sistema lineare omogeneo
$x_1-x_2+x_3-kx_4=0$, $x_2+x_2-2x_3=0$, $kx_1-x_2+x_3-kx_4=0$,
dove k è un parametro reale, usando il metodo dei determinanti.