ESERCIZI DI GEOMETRIA (Per FISICI)
CORSO DEL PROF. RENZO MAZZOCCO
A.A. 2009-2010

Foglio N.1

1. Assegnate la matrice A, le cui righe sono
$$A^{(1)}=(1,-2,0,1),\ A^{(2)}=(0,1,-1,2),\ A^{(3)}=(3,-1,0,1),$$
e la matrice B, le cui colonne sono
$$B_{(1)}={}^t(1,-1,2,0),\ B_{(2)}={}^t(3,-1,0,1),\ B_{(3)}={}^t(1,0,1,1),$$
calcolare i prodotti AB e BA.

2. Determinare la matrice
$$B = A^0 + A + A^2/2! + A^3/3! + A^4/4! + ... + A^9/9!,$$
sapendo che le righe della matrice A sono
$$A^{(1)}=(0,O,0),\ A^{(2)}=(1,0,0),\ A^{(3)}=(3,-2,0).$$

3. Risolvere il sistema lineare, a coefficienti reali,
$$x_1-x_2+x_3-x_4=1,\ x_1-x_3+x_4=0,\ 2x_1+x_2-x_4=1,$$
usando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan.

4. Risolvere il sistema lineare omogeneo, a coefficienti reali,
$$x_1-x_3+x_5=0,\ 3x_1-x_3+x_4+2x_5=0,$$
usando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan.

5. Discutere la compatibilità del sistema lineare
$$x_1-x_2+(k+1)x_3-x_4=k,\ x_1+x_2+x_4=1,\ 2x_1+x_2-kx_4=0,$$
dove k è un parametro reale, usando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan e determinare le soluzioni nei casi in cui esse esistano.

6. Sia V l'insieme dei numeri reali strettamente positivi. Posto $v+w=v\times w$, dove con $v\times w$ si indica il prodotto usuale di v e w, e posto $av=v^a$, dove con v^a si indica la potenza usuale di base v ed esponente reale a, verificare che V è uno spazio vettoriale reale.

7. Sia $V = M_2(\boldsymbol{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali del secondo ordine. Verificare che il sottoinsieme U delle matrici X che hanno come elementi
$$x_{11}=0,\ x_{12}=a-b,\ x_{21}=a,\ x_{22}=b,$$
essendo $a,b\in \boldsymbol{R}$,
è un sottospazio vettoriale di V. Determinare una base di U.

8. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K.
i) Verificare che è generalmente falsa l'affermazione: "se n vettori $v_1,v_2,\ldots,v_n$ sono linearmente dipendenti, allora ciascuno di essi è combinazione lineare dei rimanenti".
ii) Verificare che: "se due vettori v_1,v_2 non nulli sono linearmente dipendenti, allora ciascuno di essi è multiplo dell'altro".
iii) Verificare che è generalmente falsa l'affermazione: "se tre vettori v_1,v_2,v_3 non nulli sono linearmente dipendenti, allora ciascuno di essi è combinazione lineare degli altri due".