ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere P-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova Scritta del 29–11-2011

1.1. Spazio vettoriale numerico reale $V=\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U(h)=\text{Span}((u_1(h),u_2(h),u_3(h),u_4(h))$, essendo $u_1(h)=(1,1,h,h)$, $u_2(h)=(1,1,h+1,h)$, $u_3(h)=(1,1,h+2,h)$, $u_4(h)=(-1,h,h,-h)$, dove h è un parametro reale, e W: $x_2+x_3-x_4=0$, $2x_2+x_3-2x_4=0$, $x_2+2x_3-x_4=0$.

(a) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di U(h) al variare del parametro h.

(b) Detto h_0 il valore di h in corrispondenza del quale U(h) abbia dimensione 2 ed indicati d'ora in poi semplicemente con U il sottospazio vettoriale $U(h_0)$ e semplicemente con u_1, u_2, u_3, u_4 i vettori $u_1(h_0)$, $u_2(h_0)$, $u_3(h_0)$, $u_4(h_0)$, determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.

(c) Determinare una base e la dimensione di W.

(d) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(e) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(f) Dire se V è oppure non è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W, giustificando la risposta.

Soluzione

(a) L'algoritmo di Gauss-Jordan per l'estrazione di una base dal sistema di generatori $\{(u_1(h),u_2(h),u_3(h),u_4(h)\}$ di U(h) dà $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h),u_4(h))$ se $h\neq-1$ e $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h))$ se $h=-1$.

(b) Tenuto conto del punto (a), si ha che risulta dim(U(h)=2 se e soltanto se è h=-1. Pertanto $h_0=-1$ è il valore richiesto di h. Essendo la base B_U costituta dai vettori $u_1=(1,1,-1,-1)$ e $u_2=(1,1,0,-1)$, si ha che equazioni cartesiane di U si possono ottenere imponendo che sia minore di 3 il rango della matrice che ha come colonne le colonne delle coordinate dei vettori u_1, u_2 e del vettore incognito $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Tale procedimento dà immediatamente $U:x_1-x_2=0$, $x_1+x_4=0$.

(c) Utilizzando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan, si ha che il sistema di equazioni lineari omogenee che rappresenta W è equivalente, per esempio, al sistema lineare compatibile a scala $x_2+x_3-x_4=0$, $-x_3=0$, che dà $x_1=t_1$, $x_2=t_2$, $x_3=0$, $x_4=t_2$, essendo t_1 e t_2 parametri reali. Pertanto è $W=\{(t_1,t_2,0,t_2)\,|\,t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}=\{t_1(1,0,0,0)+t_2(0,1,0,1)\,|\,t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$, onde una base di W è, per esempio, $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(1,0,0,0)$ e $w_2=(0,1,0,1)$, e quindi è dim(W)=2.

(d) Un sistema di generatori di U+W è, per esempio, $\{u_1,u_2,w_1,w_2\}$. Applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan per l'estrazione di una base da tale sistema di generatori si ha che $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1,w_2)$ è una base di U+W, onde dim(U+W)=4.

(e) Equazioni cartesiane di $U\cap W$ sono, per esempio,

$x_1-x_2=0$, $x_1+x_4=0$, $x_2+x_3-x_4=0$, $2x_2+x_3-2x_4=0$, $x_2+2x_3-x_4=0$.

Utilizzando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan, si ha che il sistema costituito da tali equazioni risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare compatibile a scala

$x_1-x_2=0$, $x_2+x_4=0$, $x_3-2x_4=0$, $-2x_4=0$, che dà $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$. Allora è

$U\cap W=\{(0,0,0,0)\}$, onde $U\cap W$ non ha basi ed è $\dim(U\cap W)=0$.

(f) Nel punto (d) abbiamo già ottenuto che è $U\cap W=\{(0,0,0,0)\}$. Inoltre nel punto (c) abbiamo visto che è dim(U+W)=4 e quindi, essendo dim(V)=4, è anche U+W =V onde V è somma diretta di U e W.

1.2. Spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario. Base $B_V=(i,j,k)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$$hx+z=h,\ hy+hz=0,\ hx-hy+2(1-h)z=h,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Discutere la compatibilità del sistema al variare di h.

(b) Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistano.

(c) In corrispondenza di ogni valore del parametro h per cui il sistema assegnato sia compatibile, detta $U'(h)$ la sottovarietà lineare affine rappresentata dal sistema, determinare un vettore $v_0(h)$ appartenente a $U'(h)$ ed il sottospazio vettoriale U(h) parallelo a $U'(h)$.

(d) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di U(h).

(e) Determinare la dimensione di $U'(h)$.

Soluzione

(a) Osserviamo anzitutto che per h=0 il sistema assegnato risulta equivalente all'equazione lineare omogenea z=0 mentre per $h\neq 0$ risulta equivalente al sistema lineare hx+z=h, y+z=0, hx-hy+2(1-h)z=h. Analizziamo dunque separatamente i due casi che si presentano per h=0 e per $h\neq 0$.

Caso h=0. Il sistema è compatibile perché è tale l'equazione lineare omogenea z=0.

Caso $h\neq 0$. Utilizzando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan, si ha che per h=1 il sistema assegnato risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare compatibile a scala x+z=1, y+z=0 mentre per $h\neq 1$ risulta equivalente, per esempio, al sistema compatibile a scala hx+z=h, y+z=0, 2(1-h)z=h. In definitiva il sistema assegnato risulta compatibile per ogni valore di h.

(b) Caso h=0. L'equazione z=0 ammette come soluzioni $x=t_1$, $y=t_2$, z=0, essendo t_1, t_2 due parametri reali. L'insieme delle soluzioni del sistema assegnato in tal caso è $S(0)=S_0(0)==\{(t_1,t_2,0)\,|\,t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}=\{t_1(1,0,0)+t_2(0,1,0)\,|\,t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$.

Caso h=1. Il sistema lineare compatibile a scala x+z=1, y+z=0, equivalente al sistema assegnato per h=1, dà x=1-t, y=-t, z=t, essendo t un parametro reale. L'insieme delle soluzioni del sistema assegnato è allora $S(1)=\{(1-t,-t,t)\,|\,t\in \boldsymbol{R}\}=(1,0,0)+\{t(-1,-1,1)\,|\,t\in \boldsymbol{R}\}$.

Caso $0\neq h\neq 1$. In questo caso il sistema lineare compatibile a scala hx+z=h, y+z=0, 2(1-h)z=h, equivalente al sistema assegnato, dà x=1, y=0, z=0 e quindi l'insieme delle soluzioni è $S(h)=(1,0,0)+\{(0,0,0)\}$.

(c) Caso h=0. In questo caso la sottovarietà lineare affine $U'(0)$ coincide con il sottospazio vettoriale $U(0)=\{t_1i+t_2j)\,|\,t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi ogni vettore di U(0) appartiene anche a $U'(0)$.

Caso h=1. In questo caso un vettore appartenente a $U'(1)$ è, per esempio, $v_0(1)=i$ e risulta $U(1)=\{t(-i-j+k)\,|\,t\in \boldsymbol{R}\}$.

Caso $0\neq h\neq 1$. In questo caso l'unico vettore appartenente a $U'(h)$ è $v_0(h)=i$ e U(h) coincide con il sottospazio vettoriale nullo.

(d) Dalle espressioni di U(h) di cui al punto precedente si ha subito che, per esempio, una base di U(0) è $B_{U(0)}=(i,j)$ e una base di U(1) è $B_{U(1)}=(-i-j-k)$ mentre U(h), per $0\neq h\neq 1$, coincidendo con il sottospazio vettoriale nullo non ha alcuna base. Si ha allora dim(U(0)=2, dim(U(1)=1 e dim(U(h)=0 per $0\neq h\neq 1$.

(e) Tenuto conto dell punto (d), essendo la dimensione di una sottovarietà lineare affine uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale a cui essa è parallela, si ha $\dim(U'(0))=2$, $\dim(U'(1))=1$ e $\dim(U'(h))=0$ per $0\neq h\neq 1$.

2.1. Spazio vettoriale numerico reale $V=\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U(h)=\mathrm{Span}((u_1(h),u_2(h),u_3(h),u_4(h))$, essendo $u_1(h)=(1,1,h,h-1)$, $u_2(h)=(1,1,h+1,h-1)$, $u_3(h)=(1,1,h-1,h-1)$, $u_4(h)=(-1,h-1,h-1,1-h)$, dove h è un parametro reale, e $W: x_1+x_2-x_4=0,\ x_1+2x_2-2x_4=0,\ 2x_1+x_2-x_4=0$.

(a) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di U(h) al variare del parametro h.

(b) Detto h_0 il valore di h in corrispondenza del quale U(h) abbia dimensione 2 ed indicati d'ora in poi semplicemente con U il sottospazio vettoriale $U(h_0)$ e semplicemente con u_1, u_2, u_3, u_4 i vettori $u_1(h_0)$, $u_2(h_0)$, $u_3(h_0)$, $u_4(h_0)$, determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.

(c) Determinare una base e la dimensione di W.

(d) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(e) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(f) Dire se V è oppure non è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W, giustificando la risposta.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:

(a) $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h),u_4(h))$ se $h\neq 0$ e $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h))$ se h=0;

(b) $h_0=0$, $U: x_1-x_2=0,\ x_1+x_4=0$;

(c) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(0,0,1,0)$, $w_2=(0,1,0,1)$, dim(W)=2;

(d) $B_{U+W}= (u_1,u_2,w_2)$, dim(U+W)=3;

(e) $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dal solo vettore $w=w_1=(0,0,1,0)$, $\dim(U\cap W)=1$;

(f) V non è somma diretta di U e W perché, per esempio, è $U\cap W\neq\{(0,0,0,0)\}$ essendo $\dim(U\cap W)=1$.

2.2. Spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario. Base $B_V=(i,j,k)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$$x+(1-h)z=1-h,\ (1-h)x+(1-h)y=0,\ 2hx-(1-h)y+(1-h)z=1-h,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Discutere la compatibilità del sistema al variare di h.
(b) Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistano.
(c) In corrispondenza di ogni valore del parametro h per cui il sistema assegnato sia compatibile, detta $U'(h)$ la sottovarietà lineare affine rappresentata dal sistema, determinare un vettore $v_0(h)$ appartenente a $U'(h)$ ed il sottospazio vettoriale U(h) parallelo a $U'(h)$.
(d) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di U(h).
(e) Determinare la dimensione di $U'(h)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) il sistema è compatibile per ogni valore del parametro h;

(b) caso h=1: si ottiene x=0, $y=t_1$, $z=t_2$, essendo t_1, t_2 parametri reali,
caso h=0: si ottiene x=-t+1, y=t-1, z=t, essendo t un parametro reale,
caso $0\neq h\neq 1$: si ottiene x=0, y=0, z=1;

(c)) caso h=1: in questo caso la sottovarietà lineare affine $U'(1)$ coincide con il sottospazio vettoriale $U(1)=\{t_1j+t_2k \mid t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$ e quindi ogni vettore di U(1) appartiene anche a $U'(1)$,
caso h=0: In questo caso un vettore appartenente a $U'(0)$ è, per esempio, $v_0(0)=i-j$ e risulta $U(0)=\{t(-i+j+k) \mid t\in\boldsymbol{R}\}$,

caso $0\neq h\neq 1$: in questo caso l'unico vettore appartenente a $U'(h)$ è $v_0(h)$=k e U(h) coincide con il sottospazio vettoriale nullo;
(d) dalle espressioni di U(h) di cui al punto precedente si ha subito che, per esempio, una base di U(1) è $B_{U(1)}$=(j,k) e una base di U(0) è $B_{U(0)}$=(-i+j+k) mentre U(h), per $0\neq h\neq 1$, coincidendo con il sottospazio vettoriale nullo non ha alcuna base. Si ha allora dim(U(1)=2, dim(U(0)=1 e dim(U(h)=0 per $0\neq h\neq 1$;
(e) tenuto conto del punto (d), essendo la dimensione di una sottovarietà affine uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale a cui essa è parallela, si ha $\dim(U'(1))=2$, $\dim(U'(0))=1$ e $\dim(U'(h))=0$ per $0\neq h\neq 1$.

3.1. Spazio vettoriale numerico reale V=$\boldsymbol{R^4}$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U(h)=\mathrm{Span}((u_1(h),u_2(h),u_3(h),u_4(h))$, essendo $u_1(h)=(1,1,3-h,1-h)$, $u_2(h)=(1,1,2-h,1-h)$, $u_3(h)=(1,1,1-h,1-h)$, $u_4(h)=(-1,1-h,1-h,h-1)$, dove h è un parametro reale, e W: $x_1+x_3-x_4=0$, $2x_1+x_3-2x_4=0$, $x_1+2x_3-x_4=0$.

(a) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di U(h) al variare del parametro h.
(b) Detto h_0 il valore di h in corrispondenza del quale U(h) abbia dimensione 2 ed indicati d'ora in poi semplicemente con U il sottospazio vettoriale $U(h_0)$ e semplicemente con u_1, u_2, u_3, u_4 i vettori $u_1(h_0)$, $u_2(h_0)$, $u_3(h_0)$, $u_4(h_0)$, determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.
(c) Determinare una base e la dimensione di W.
(d) Determinare una base e la dimensione di U+W.
(e) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.
(f) Dire se V è oppure non è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W, giustificando la risposta.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:
(a) $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h),u_4(h))$ se $h\neq 2$ e $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h))$ se h=2;
(b) $h_0=2$, U:$x_1-x_2=0$, $x_1+x_4=0$;
(c) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(0,1,0,0)$, $w_2=(1,0,0,1)$, dim(W)=2;
(d) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1,w_2)$, dim(U+W)=4;
(e) non esistono basi di $U\cap W$, $\dim(U\cap W)=0$;
(f) V è somma diretta di U e W perché risulta V=U+W e $U\cap W=\{(0,0,0,0)\}$.

3.2. Spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario. Base B_V=(i,j,k). Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$$hy-z=h,\ hx+hz=0,\ hx-hy+2(1+h)z=-h,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Discutere la compatibilità del sistema al variare di h.
(b) Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistano.
(c) In corrispondenza di ogni valore del parametro h per cui il sistema assegnato sia compatibile, detta $U'(h)$ la sottovarietà lineare affine rappresentata dal sistema, determinare un vettore $v_0(h)$ appartenente a $U'(h)$ ed il sottospazio vettoriale U(h) parallelo a $U'(h)$.
(d) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di U(h).
(e) Determinare la dimensione di $U'(h)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) il sistema è compatibile per ogni valore del parametro h;

(b) caso h=0: si ottiene $x=t_1$, $y=t_2$, $z=0$ essendo t_1, t_2 parametri reali,

caso h=-1: si ottiene x=-t, y=1-t, z=t, essendo t un parametro reale,

caso $-1\neq h\neq 0$: si ottiene x=0, y=1, z=0;

(c)) caso h=0: in questo caso la sottovarietà lineare affine $U'(0)$ coincide con il sottospazio vettoriale $U(0)=\{t_1 i+t_2 j) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi ogni vettore di U(0) appartiene anche a $U'(0)$,

caso h=-1: In questo caso un vettore appartenente a $U'(-1)$ è, per esempio, $v_0(-1)=j$ e risulta $U(0)=\{t(-i-j+k) \mid t\in \boldsymbol{R}\}$,

caso $-1\neq h\neq 0$: in questo caso l'unico vettore appartenente a $U'(h)$ è $v_0(h)=j$ e U(h) coincide con il sottospazio vettoriale nullo;

(d) dalle espressioni di U(h) di cui al punto precedente si ha subito che, per esempio, una base di U(0) è $B_{U(0)}=(i,j)$ e una base di U(-1) è $B_{U(-1)}=(-i-j+k)$ mentre U(h), per $-1\neq h\neq 0$, coincidendo con il sottospazio vettoriale nullo non ha alcuna base. Si ha allora dim(U(0)=2, dim(U(-1)=1 e dim(U(h)=0 per $-1\neq h\neq 0$;

(e) tenuto conto del punto (d), essendo la dimensione di una sottovarietà affine uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale a cui essa è parallela, si ha $\dim(U'(0))=2$, $\dim(U'(-1))=1$ e $\dim(U'(h))=0$ per $0\neq h\neq 1$.

4.1. Spazio vettoriale numerico reale $V=\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U(h)=Span((u_1(h),u_2(h),u_3(h),u_4(h))$, essendo $u_1(h)=(1,1,h,h+1)$, $u_2(h)=(2,2,2h+1,2h+2)$, $u_3(h)=(1,1,h+3,h+1)$, $u_4(h)=(-1,h+1,h+1,-h-1)$, dove h è un parametro reale, e W: $x_1-x_2-x_3=0$, $2x_1-2x_2-x_3=0$, $x_1-x_2-2x_3=0$.

(a) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di U(h) al variare del parametro h.

(b) Detto h_0 il valore di h in corrispondenza del quale U(h) abbia dimensione 2 ed indicati d'ora in poi semplicemente con U il sottospazio vettoriale $U(h_0)$ e semplicemente con u_1, u_2, u_3, u_4 i vettori $u_1(h_0)$, $u_2(h_0)$, $u_3(h_0)$, $u_4(h_0)$, determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.

(c) Determinare una base e la dimensione di W.

(d) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(e) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(f) Dire se V è oppure non è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W, giustificando la risposta.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:

(a) $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h),u_4(h))$ se $h\neq -2$ e $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h))$ se h=-2;

(b) $h_0=-2$, U: $x_1-x_2=0$, $x_1+x_4=0$;

(c) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=(1,1,0,0)$, $w_2=(0,0,0,1)$, dim(W)=2;

(d) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$, dim(U+W)=3;

(e) $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dal solo vettore w=(-1,-1,0,1), $\dim(U\cap W)=1$;

(f) V non è somma diretta di U e W perché, per esempio, è $U\cap W\neq\{(0,0,0,0)\}$ essendo $\dim(U\cap W)=1$.

4.2. Spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario. Base $B_V=(i,j,k)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$$(1+h)x+y=1+h,\ (1+h)y+(1+h)z=0,\ (1+h)x-2hy-(1+h)z=1+h,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Discutere la compatibilità del sistema al variare di h.
(b) Determinare le soluzioni del sistema nei casi in cui esse esistano.
(c) In corrispondenza di ogni valore del parametro h per cui il sistema assegnato sia compatibile, detta $U'(h)$ la sottovarietà lineare affine rappresentata dal sistema, determinare un vettore $v_0(h)$ appartenente a $U'(h)$ ed il sottospazio vettoriale $U(h)$ parallelo a $U'(h)$.
(d) Determinare una base $B_{U(h)}$ e la dimensione di $U(h)$.
(e) Determinare la dimensione di $U'(h)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) il sistema è compatibile per ogni valore del parametro h;

(b) <u>caso h=-1:</u> si ottiene $x=t_1$, $y=0$, $z=t_2$, essendo t_1, t_2 parametri reali,

<u>caso h=0</u>: si ottiene $x=1+t$, $y=-t$, $z=t$, essendo t un parametro reale,

<u>caso $-1\neq h\neq 0$:</u> si ottiene $x=1$, $y=0$, $z=0$;

(c)) <u>caso h=-1:</u> in questo caso la sottovarietà lineare affine $U'(-1)$ coincide con il sottospazio vettoriale $U(-1)=\{t_1i+t_2k) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi ogni vettore di $U(0)$ appartiene anche a $U'(0)$,

<u>caso h=0</u>: in questo caso un vettore appartenente a $U'(0)$ è, per esempio, $v_0(0)=i$ e risulta $U(0)=\{t(i-j+k) \mid t\in \boldsymbol{R}\}$,

<u>caso $-1\neq h\neq 0$:</u> in questo caso l'unico vettore appartenente a $U'(h)$ è $v_0(h)=i$ e $U(h)$ coincide con il sottospazio vettoriale nullo;

(d) dalle espressioni di $U(h)$ di cui al punto precedente si ha subito che, per esempio, una base di $U(-1)$ è $B_{U(-1)}=(i,k)$ e una base di $U(0)$ è $B_{U(0)}=(i-j+k)$ mentre $U(h)$, per $-1\neq h\neq 0$, coincidendo con il sottospazio vettoriale nullo non ha alcuna base. Si ha allora $\dim(U(-1)=2$, $\dim(U(0)=1$ e $\dim(U(h)=0$ per $-1\neq h\neq 0$;

(e) tenuto conto del punto (d), essendo la dimensione di una sottovarietà affine uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale a cui essa è parallela, si ha $\dim(U'(-1))=2$, $\dim(U'(0))=1$ e $\dim(U'(h))=0$ per $-1\neq h\neq 0$.