ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere P-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 27–1-2012

1.1. Spazio euclideo ordinario. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $Q_0(1,0,1)$, $Q_1(1,-h,0)$, $Q_2(0,h,1)$ essendo h un parametro reale, le rette r_1:x-2y=0, y-z+1=0, r_2:x+y=0, y+z+1=0 ed il piano p:x+z-2=0.

(a) Dire se le rette r_1 ed r_2 sono o non sono sghembe, giustificando la risposta.

(b) Determinare equazioni cartesiane della retta r incidente le rette r_1 ed r_2 e perpendicolare al piano p.

(c) Verificare che i tre punti Q_0, Q_1, Q_2 non sono allineati.

(d) Determinare l'equazione cartesiana del piano q_h passante per i tre punti Q_0, Q_1, Q_2.

(e) Determinare la mutua posizione della retta r e del piano q_h al variare di h in $\boldsymbol{R}$.

Soluzione

(a) La matrice completa, quadrata di ordine quattro, associata alle equazioni delle rette r_1 ed r_2 ha determinante uguale a 6. Essendo tale determinante non nullo, si ha che le rette r_1 ed r_2 sono sghembe.

(b) Equazioni parametriche di r_1 sono, per esempio, $x=2t_1-2$, $y=t_1-1$, $z=t_1$, $t_1 \epsilon \boldsymbol{R}$; allora coordinate cartesiane del punto generico P_1 di r_1 sono $(2t_1-2,t_1-1,t_1)$. Equazioni parametriche di r_2 sono, per esempio, $x=t_2+1$, $y=-t_2-1$, $z=t_2$, $t_2 \epsilon \boldsymbol{R}$ e quindi coordinate cartesiane del punto generico P_2 di r_2 sono $(t_2+1,-t_2-1,t_2)$. La condizione d'incidenza con le rette r_1 ed r_2 è soddisfatta dalla retta passante per i punti P_1 e P_2 e quindi di equazioni in forma di rapporti uguali $(x-2t_1+2)/(t_2+1-2t_1+2)=(y-t_1+1)/(-t_2-1-t_1+1)=(z-t_1)/(t_2-t_1)$, dove i denominatori hanno il significato di parametri direttori della retta. Essendo (a,b,c)=(1,0,1) i coefficienti di giacitura del piano p, la condizione di perpendicolarità della suddetta retta con il piano p può essere espressa imponendo che sia minore di 2 il rango della matrice avente come righe $(t_2-2t_1+3,-t_2-t_1,t_2-t_1)$ e (1,0,1). Tale condizione dà $-t_2-t_1=0$, $t_2-2t_1+3-t_2+t_1=0$ e quindi $t_1=3$, $t_2=-3$. Si ha allora r:(x-4)/1=(y-2)/0=(z-3)/1 onde equazioni cartesiane di r sono y-2=0, x-z-1=0.

(c) I vettori geometrici che hanno come rappresentanti i segmenti orientati Q_0Q_1 e Q_0Q_2 hanno come coordinate, rispettivamente, (0,-h,-1) e (-1,h,0). Tali terne non sono mai proporzionali e quindi i suddetti vettori geometrici sono sempre linearmente indipendenti; da ciò segue che i tre punti Q_0, Q_1, Q_2 non sono mai allineati.

(d) Imponendo che sia nullo il determinante della matrice che ha come righe (x-1,y,z-1), (0,-h,-1) e (-1,h,0) si ha che l'equazione cartesiana di q_h è hx+y-hz=0.

(e) Per ottenere la mutua posizione tra la retta r ed il piano q_h discutiamo il sistema quadrato costituito dalle equazioni cartesiane di r e di q_h. La matrice incompleta del sistema ha determinante uguale a 0 per ogni valore del parametro h e quindi essa, essendo non nullo il determinante del minore B costituito dagli elementi d'incrocio delle prime due righe con le prime due colonne, ha rango 2. Orlando il minore B entro la matrice completa del sistema e calcolando il determinante di tali minori si ha che tale matrice ha rango 3 per $h \neq -2$ e rango 2 per h=-2. Allora, per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile per $h \neq -2$ e compatibile per h=-2. Nel primo caso, ossia per $h \neq -2$, r e q_h hanno intersezione vuota e quindi, poiché in uno spazio affine tridimensionale non esistono rette e piani sghembi, r e q_h sono paralleli e disgiunti. Per h=-2 il sistema risulta equivalente al sistema costituito dalle prime due equazioni, ma tali equazioni rappresentano la retta r e quindi tale retta è contenuta nel piano q_{-2}.

1.2. <u>Spazio vettoriale numerico</u> V=$\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Sia assegnato l'endomorfismo F_h:V→V tale che

$$F_h(v)=((h+2)x_1,x_1-3x_2+2x_4,-(h+2)x_3,x_1-4x_2+3x_4),$$

essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ed h un parametro reale.

(a) Determinare la matrice A_h associata all'endomorfismo F_h rispetto alla base B_V.

(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'endomorfismo F_h ammette il numero 0 come autovalore.

(c) Detto F l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 di cui al punto precedente e indicata semplicemente con A la matrice ad esso associata, verificare che F è diagonalizzabile e determinare una base $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3,v'_4)$ di V costituita da autovettori rispetto ad F.

(d) Detta A′ la matrice diagonale associata ad F rispetto alla base B'_V, determinare una matrice quadrata non singolare C tale che risulti $A'=C^{-1}AC$.

(e) Scrivere l'espressione di F(v) rispetto alla base B'_V.

(f) Dire se l'endomorfismo F è oppure non è un automorfismo, giustificando la risposta.

Soluzione

(a) La matrice A_h richiesta ha come righe $A_h^{(1)}=(h+2,0,0,0)$, $A_h^{(2)}=(1,-3,0,2)$, $A_h^{(3)}=(0,0,-h-2,0)$, $A_h^{(4)}=(1,-4,0,3)$.

(b) L'equazione caratteristica dell'endomorfismo F_h è $\det(A_h-\lambda I)=0$, ossia $(h+2-\lambda)(h+2+\lambda)(1-\lambda^2)=0$. Tale equazione ammette come soluzione λ=0 se e soltanto se risulta h+2=0, ossia se e soltanto se è h=-2; pertanto è $h_0=-2$.

(c) Ponendo $h=h_0=-2$ nell'equazione caratteristica dell'endomorfismo F_h, si ha che l'equazione caratteristica di F è $-\lambda^2(1-\lambda^2)=0$. Pertanto gli autovalori di F sono $\lambda_1=-1$, con molteplicità algebrica $a_1=1$, $\lambda_2=0$, con molteplicità algebrica $a_2=2$, e $\lambda_3=1$, con molteplicità algebrica $a_3=1$. Essendo dim(V)=4 e risultando $a_1+a_2+a_3=4$, si ha che la matrice A è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica g_1 dell'autovalore λ_1 è uguale ad $a_1=1$, la molteplicità geometrica g_2 dell'autovalore λ_2 è uguale ad $a_2=2$ e la molteplicità geometrica g_3 dell'autovalore λ_3 è uguale a $a_3=1$. Essendo la molteplicità geometrica di un autovalore maggiore o uguale ad 1 e minore o uguale alla molteplicità algebrica dello stesso autovalore, si ha intanto che $g_1=a_1$ e $g_3=a_3$. Per sapere se l'endomorfismo F è o non è diagonalzzabile, ci resta soltanto da determinare g_2 e verificare se è oppure non è $g_2=a_2$. Sia V_0 l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_2=0$. Equazioni cartesiane di V_0 sono $x_1-3x_2+2x_4=0$, $x_1-4x_2+3x_4=0$. Risulta allora $V_0=\{t_1(1,1,0,1)+t_2(0,0,1,0)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di V_0 è costituita dagli autovettori $v_2'=(1,1,0,1)$, $v_3'=(0,0,1,0)$ e quindi risulta $g_2=\dim(V_0)=2=a_2$; pertanto l'endomorfismo F è diagonalizzabile. Per ottenere una base di V costituita da autovettori rispetto all'endomorfismo F, avendo già determinato una base dell'autospazio V_0, determiniamo una base dell'autospazio V_{-1} associato all'autovalore $\lambda_1=-1$ ed una base dell'autospazio V_1 associato all'autovalore $\lambda_3=1$. Si ha V_{-1}:$x_1=0$, $x_1-2x_2+2x_4=0$, $x_3=0$, $x_1-4x_2+4x_4=0$ e quindi $V_{-1}=\{t(0,1,0,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$, onde una base di V_{-1} è costituita dal solo autovettore $v_1'=(0,1,0,1)$. Si ha poi V_1:$-x_1=0$, $x_1-4x_2+2x_4=0$, $-x_3=0$, $x_1-4x_2+2x_4=0$ e quindi $V_1=\{t(0,1,0,2)|t\in\boldsymbol{R}\}$ con base costituita dal solo autovettore $v_4'=(0,1,0,2)$. Allora $B_V'=(v_1',v_2',v_3', v_4')$ è una base di V costituita da autovettori rispetto all'endomorfismo F.

(d) La matrice diagonale A', associata all'endomorfismo F rispetto alla base B_V', ha come righe $A'^{(1)}=(-1,0,0,0)$, $A'^{(2)}=(0,0,0,0)$, $A'^{(3)}=(0,0,0,0)$, $A'^{(4)}=(0,0,0,1)$. Una matrice C del tipo richiesto è, per esempio, la matrice del cambiamento di basi nel passaggio dalla base canonica B_V alla base di autovettori B_V' di V. Tale matrice ha come righe $C^{(1)}=(0,1,0,0)$, $C^{(2)}=(1,1,0,1)$, $C^{(3)}=(0,0,1,0)$, $C^{(4)}=(1,1,0,2)$.

(e) Risulta $F(v)=-x_1'v_1'+x_4'v_4'$, essendo (x_1',x_2',x_3',x_4') le coordinate di v rispetto alla base B_V'.

(f) Nel quesito (c) abbiamo ottenuto $V_0=\{t_1(1,1,0,1)+t_2(0,0,1,0)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Tale autospazio, essendo associato all'autovalore 0 di F, coincide con il nucleo Ker(F). Allora è $\mathrm{Ker}(F)\neq 0$ onde l'endomorfismo F non è iniettivo e quindi non è un automorfismo.

2.1. <u>Spazio euclideo ordinario</u>. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $Q_0(1,1,0)$, $Q_1(0,1,-h)$, $Q_2(1,0,h)$ essendo h un parametro reale, le rette r_1:y-2z=0, x-z-1=0, r_2:y+z=0, x+z+1=0 ed il piano p:x+y+5=0.

(a) Dire se le rette r_1 ed r_2 sono o non sono sghembe, giustificando la risposta.
(b) Determinare equazioni cartesiane della retta r incidente le rette r_1 ed r_2 e perpendicolare al piano p.
(c) Verificare che i tre punti Q_0, Q_1, Q_2 non sono allineati.
(d) Determinare l'equazione cartesiana del piano q_h passante per i tre punti Q_0, Q_1, Q_2.
(e) Determinare la mutua posizione della retta r e del piano q_h al variare di h in $\boldsymbol{R}$.

Soluzione

(a) La matrice completa, quadrata di ordine quattro, associata alle equazioni delle rette r_1 ed r_2 ha determinante uguale a -6. Essendo tale determinante non nullo, si ha che le rette r_1 ed r_2 sono sghembe.
(b) Procedendo come nell'esercizio 1.1, si ha r:z-2=0, x-y+1=0,
(c) I vettori geometrici che hanno come rappresentanti i segmenti orientati Q_0Q_1 e Q_0Q_2 hanno come coordinate, rispettivamente, (-1,0,-h) e (0,-1,h). Tali terne non sono mai proporzionali e quindi i suddetti vettori geometrici sono sempre linearmente indipendenti; da ciò segue che i tre punti Q_0, Q_1, Q_2 non sono mai allineati.
(d) Imponendo che sia nullo il determinante della matrice che ha come righe (x-1,y-1,z), (-1,0,-h) e (0,-1,h) si ha che l'equazione cartesiana di q_h è hx-hy-z=0.
(e) Per ottenere la mutua posizione tra la retta r ed il piano q_h discutiamo il sistema quadrato costituito dalle equazioni cartesiane di r e di q_h. La matrice incompleta del sistema ha determinante uguale a 0 per ogni valore del parametro h e quindi essa, essendo non nullo il determinante del minore B costituito dagli elementi d'incrocio delle prime due righe con la seconda e terza colonna, ha rango 2. Orlando il minore B entro la matrice completa del sistema e calcolando il determinante di tali minori si ha che tale matrice ha rango 3 per $h\neq-2$ e rango 2 per h=-2. Allora, per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile per $h\neq-2$ e compatibile per h=-2. Nel primo caso, ossia per $h\neq-2$, r e q_h hanno intersezione vuota e quindi, poiché in uno spazio affine tridimensionale non esistono rette e piani sghembi, r e q_h sono paralleli e disgiunti. Per h=-2 il sistema risulta equivalente al sistema costituito dalle prime due equazioni, ma tali equazioni rappresentano la retta r e quindi tale retta è contenuta nel piano q_{-2}.

2.2. Spazio vettoriale numerico $V=\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Sia assegnato l'endomorfismo $F_h:V\rightarrow V$ tale che

$$F_h(v)=((h-3)x_1,x_1-3x_2+2x_4,x_3,x_1-4x_2+3x_4),$$

essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ed h un parametro reale.

(a) Determinare la matrice A_h associata all'endomorfismo F_h rispetto alla base B_V.

(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'endomorfismo F_h ammette il numero 0 come autovalore.

(c) Detto F l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 di cui al punto precedente e indicata semplicemente con A la matrice ad esso associata, verificare che F è diagonalizzabile e determinare una base $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3,v'_4)$ di V costituita da autovettori rispetto ad F.

(d) Detta A´ la matrice diagonale associata ad F rispetto alla base B'_V, determinare una matrice quadrata non singolare C tale che risulti $A'=C^{-1}AC$.

(e) Scrivere l'espressione di F(v) rispetto alla base B'_V.

(f) Dire se l'endomorfismo F è oppure non è un automorfismo, giustificando la risposta.

Soluzione

(a) La matrice A_h richiesta ha come righe $A_h^{(1)}=(h-3,0,0,0)$, $A_h^{(2)}=(1,-3,0,2)$, $A_h^{(3)}=(0,0,1,0)$, $A_h^{(4)}=(1,-4,0,3)$.

(b) L'equazione caratteristica dell'endomorfismo F_h è $\det(A_h-\lambda I)=0$, ossia $-(h-3-\lambda)(1-\lambda)^2(1+\lambda)=0$. Tale equazione ammette come soluzione $\lambda=0$ se e soltanto se risulta $h-3=0$, ossia se e soltanto se è $h=3$; pertanto è $h_0=3$.

(c) Ponendo $h=h_0=3$ nell'equazione caratteristica dell'endomorfismo F_h, si ha che l'equazione caratteristica di F è $\lambda(1-\lambda)^2(1+\lambda)=0$. Pertanto gli autovalori di F sono $\lambda_1=-1$, con molteplicità algebrica $a_1=1$, $\lambda_2=0$, con molteplicità algebrica $a_1=1$, e $\lambda_3=1$, con molteplicità algebrica $a_3=2$. Essendo $\dim(V)=4$ e risultando $a_1+a_2+a_3=4$ si ha che la matrice A è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica g_1 dell'autovalore λ_1 è uguale ad $a_1=1$, la molteplicità geometrica g_2 dell'autovalore λ_2 è uguale ad $a_2=1$ e la molteplicità geometrica g_3 dell'autovalore λ_3 è uguale a $a_3=2$. Essendo la molteplicità geometrica di un autovalore maggiore o uguale ad 1 e minore o uguale alla molteplicità algebrica dello stesso autovalore, si ha intanto che $g_1=a_1$ e $g_2=a_2$. Per sapere se l'endomorfismo F è o non è diagonalzzabile, ci resta da determinare g_3 e verificare se è o non è $g_3=a_3$. Sia V_1 l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_3=1$. Equazioni cartesiane di V_1 sono $-x_1=0$, $x_1-4x_2+2x_4=0$, $x_1-4x_2+2x_4=0$. Risulta allora $V_1=\{t_1(0,1,0,2)+t_2(0,0,1,0)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di V_1 è costituita dagli autovettori $v_3'=(0,1,0,2)$, $v_4'=(0,0,1,0)$ e quindi risulta $g_3=\dim(V_1)=2=a_3$; pertanto l'endomorfismo F è diagonalizzabile. Per ottenere una base di V costituita da autovettori rispetto all'endomorfismo F, avendo già determinato una base dell'autospazio V_1, determiniamo una base dell'autospazio V_{-1} associato all'autovalore $\lambda_1=-1$ ed una base dell'autospazio V_0 associato all'autovalore $\lambda_2=0$. Si ha V_{-1}:$x_1=0$, $x_1-2x_2+2x_4=0$, $2x_3=0$, $x_1-4x_2+4x_4=0$ e quindi $V_{-1}=\{t(0,1,0,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$, onde una base di V_{-1} è costituita dal solo autovettore $v_1'=(0,1,0,1)$. Si ha poi V_0:$x_1-3x_2+2x_4=0$, $x_3=0$, $x_1-4x_2+3x_4=0$ e quindi $V_0=\{t(1,1,0,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$ con base costituita dal solo autovettore $v_2'=(1,1,0,1)$. Allora $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ è una base di V costituita da autovettori rispetto all'endomorfismo F.

(d) La matrice diagonale A', associata all'endomorfismo F rispetto alla base B_V', ha come righe $A'^{(1)}=(-1,0,0,0)$, $A'^{(2)}=(0,0,0,0)$, $A'^{(3)}=(0,0,1,0)$, $A'^{(4)}=(0,0,0,1)$. Una matrice C del tipo richiesto è, per esempio, la matrice del cambiamento di basi nel passaggio dalla base canonica B_V alla base di autovettori B_V' di V. Tale matrice ha come righe $C^{(1)}=(0,1,0,0)$, $C^{(2)}=(1,1,1,0)$, $C^{(3)}=(0,0,0,1)$, $C^{(4)}=(1,1,2,0)$.
(e) Risulta $F(v)=-x_1'v_1'+x_3'v_3+x_4'v_4'$, essendo (x_1',x_2',x_3',x_4') le coordinate di v rispetto alla base B_V'.
(f) Nel quesito (c) abbiamo ottenuto $V_0=\{t(1,1,0,1)|t\in \boldsymbol{R}\}$. Tale autospazio, essendo associato all'autovalore 0 di F, coincide con il nucleo Ker(F). Allora è $Ker(F)\neq 0$ onde l'endomorfismo F non è iniettivo e quindi non è un automorfismo.