ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Ca)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e soluzioni della Prova Scritta del 25–11-2014

Avvertenza: Per la risoluzione dei sistemi lineari il candidato è tenuto ad usare il metodo di Gauss-Jordan oppure il metodo dei determinanti.

1. Spazio vettoriale reale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U(h)=Span(u_1(h),u_2(h),u_3(h))$, essendo $u_1(h)=v_1-hv_3$, $u_2(h)=hv_1+(h-1)v_2-v_3$, $u_3(h)=(h-1)v_1+(h-1)v_2+(h-1)v_3$ ed h un parametro reale, ed il sottospazio vettoriale $W:x_1-x_3=0,\ x_1-x_2-x_3=0$.
(a) Determinare il sottoinsieme H di $\boldsymbol{R}$ costituito dai valori del parametro h in corrispondenza dei quali il sottospazio vettoriale U(h) abbia dimensione due.
(b) Determinare equazioni cartesiane di U(h) per ogni h appartenente ad H.
(c) Determinare una base e la dimensione di W.
(d) Determinare una base e la dimensione di $U(h)\cap W$ per ogni h appartenente ad H.
(e) Per ogni h appartenente ad H, dire se i sottospazi vettoriali U(h) e W sono o non sono supplementari entro V ossia se sono o non sono tali che risulti $V=U(h)\oplus W$. giustificando la risposta.

Soluzione

(a) L'algoritmo di Gauss Jordan per l'estrazione di una base dal sistema di generatori $\{u_1(h),u_2(h),u_3(h)\}$ di U(h) dà subito che per $h\neq 1$ una base di U(h) è $B_{U(h)}=(u_1(h),u_2(h))$, mentre per h=1 una base di U(1) è $B_{U(1)}=(u_1(1))$. Pertanto per $h\neq 1$ risulta dim(U(h)=2 mentre per h=1 si ha dim(U(h))=1. Risulta allora $H=\boldsymbol{R}\backslash\{1\}$.
(b) Sia $h\in H$. Imponendo che sia minore di 3 il rango della matrice che ha per colonne le colonne delle coordinate dei vettori $u_1(h)$, $u_2(h)$ e $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$, ossia imponendo che tale matrice abbia determinante nullo, si ha che U(h) è rappresentato dall'equazione cartesiana $h(h-1)x_1-(h^2-1)x_2+(h-1)x_3=0$, ossia, essendo $h\neq 1$, è rappresentato dall'equazione cartesiana

$$hx_1-(h+1)x_2+x_3=0.$$

(c) L'algoritmo di Gauss Jordan per la risoluzione dei sistemi lineari, applicato al sistema lineare omogeneo che rappresenta W, dà il sistema equivalente lineare a scala $x_1-x_3=0$, $x_2=0$ dal quale, posto $x_3=t$, si ha subito $x_1=t$, $x_2=0$, essendo $t\in\boldsymbol{R}$. Allora lo spazio delle soluzioni di tale sistema è $S_o=\{(t,0,t)|t\in\boldsymbol{R}\}=\{t(1,0,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$ e quindi, risultando $W=\{t(v_1+tv_3)|\ t\in\boldsymbol{R}\}$, una base di W è $B_W=(w)$, essendo $w=v_1+v_3$, ed è dim(W)=1.
(d) Per $h\in H$, un sistema lineare omogeneo che rappresenta il sottospazio vettoriale $U(h)\cap W$ è il sistema quadrato $hx_1-(h+1)x_2+x_3=0$, $x_1-x_3=0$, $x_1-x_2-x_3=0$. La matrice dei coefficienti delle incognite di tale sistema ha determinante uguale a -h-1. Pertanto tale sistema ammette soltanto la soluzione banale se è $h\neq -1$ mentre se è h=-1 esso risulta equivalente al sistema che rappresenta W. Allora, se $h\in H\backslash\{-1\}$, risulta $U(h)\cap W=\{0\}$ e quindi $U(h)\cap W$ non ha basi ed ha dimensione 0, mentre, se è h=-1, risultando $U(-1)\cap W=W$, una base di $U(h)\cap W$ è la base B_W di W già determinata ed è $\dim(U(-1)\cap W)=\dim(W)=1$.
(e) Abbiamo già ottenuto che per $h\in H\backslash\{-1\}$ risulta $U(h)\cap W=\{0\}$ e $\dim(U(h)\cap W)=0$. Adesso osserviamo che per $h\in H\backslash\{-1\}$ la formula di Grassmann dà $\dim(U(h)+W)=\dim(U(h))+\dim(W)-\dim(U(h)\cap W)=2+1-0=3$. Allora, essendo 3 anche la dimensione di V e U(h)+W un sottospazio di V, U(h)+W coincide con V. In definitiva per $h\in H\backslash\{-1\}$ sono soddisfatte le due condizioni $U(h)\cap W=\{0\}$, $U(h)+W=V$ e quindi per $h\in H\backslash\{-1\}$ i sottospazi vettoriali U(h) e W

sono supplementari. Per $h=-1$, invece, i sottospazi vettoriali $U(-1)$ e W non sono supplementari perché, per esempio, risulta $U(-1) \cap W \neq \{0\}$.

2. Spazio vettoriale numerico reale $V=\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$.
Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale

$$U(h): x_1+hx_3+hx_4=0,\ hx_1+hx_2=0,\ 2(1-h)x_1-hx_2+hx_3+hx_4=0,$$

essendo h un parametro reale.

Soluzione

Sia $A(h)$ la matrice dei coefficienti delle incognite del sistema lineare omogeneo di tre equazioni in quattro incognite che rappresenta $U(h)$. I minori del terzo ordine $A_1(h)$, $A_2(h)$, $A_3(h)$, $A_4(h)$ di $A(h)$ ottenuti cancellando la prima, la seconda, la terza, la quarta colonna hanno rispettivamente come determinante 0, 0, h^3-h^2, h^3-h^2. Tali determinanti risultano simultaneamente nulli se e soltanto se è $h=0$ oppure $h=1$. Pertanto per $h\in\boldsymbol{R}\backslash\{0,1\}$ la matrice A_h ha rango 3. In tal caso, per un noto teorema sulla risoluzione dei sistemi lineari omogenei di n-1 equazioni in n incognite con matrice dei coefficienti di rango massimo, una soluzione non banale del sistema è costituita dalla quaterna dei suddetti determinanti presi a segni alterni ossia da $(0,0, h^3-h^2,-(h^3-h^2))$ e lo spazio delle soluzioni è dato da

$$S_o(h)=\{(0,0,t(h^3-h^2),t(-h^3+h^2)) | t\in\boldsymbol{R}\}=\{t(0,0,h^3-h^2,-h^3+h^2) | t\in\boldsymbol{R}\}.$$

Essendo $V=\boldsymbol{R}^4$ e la base B_V canonica, per $h\in\boldsymbol{R}\backslash\{0,1\}$ si ha allora

$$U(h)=S_o(h)=\{t(0,0,h^3-h^2,-h^3+h^2) | t\in\boldsymbol{R}\}.$$

Pertanto, per $h\in\boldsymbol{R}\backslash\{0,1\}$, si ha che una base di $U(h)$ è costituita dal solo vettore $u(h)=(0,0, h^3-h^2,-h^3+h^2)$ e quindi la dimensione di $U(h)$ è 1.

Andiamo ad analizzare adesso il caso $h=0$. In questo caso il sistema lineare omogeneo che rappresenta $U(0)$ è $x_1=0$, $0=0$, $2x_1=0$. Tale sistema è equivalente all'equazione omogenea $x_1=0$, che ha come spazio delle soluzioni
$S_o(0)=\{(0,t_1,t_2,t_3) | t_1,t_2,t_3\in\boldsymbol{R}\}=\{t_1(0,1,0,0)+t_2(0,0,1,0)+t_3(0,0,0,1) | t_1,t_2,t_3\in\boldsymbol{R}\}$.

Da $U(0)=S_o(0)=\{t_1(0,1,0,0)+t_2(0,0,1,0)+t_3(0,0,0,1) | t_1,t_2,t_3\in\boldsymbol{R}\}$ si trae allora che per $h=0$ una base di $U(0)$ è costituita dai vettori $e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$ e la dimensione di $U(0)$ è 3.

Sia ora $h=1$. In questo caso il sistema lineare omogeneo che rappresenta $U(1)$ è $x_1+x_3+x_4=0$, $x_1+x_2=0$, $-x_2+x_3+x_4=0$. La matrice $A(1)$ dei coefficienti delle incognite del sistema ha il minore C del secondo ordine costituito dagli elementi d'incrocio delle prime due righe e delle prime due colonne con determinante $1\neq 0$. Pertanto, essendo nulli per $h=1$ i determinanti di tutti i minori del terzo ordine estraibili dalla matrice $A(1)$, tale matrice ha rango 2. Il sistema che rappresenta $U(1)$ è allora equivalente al sistema costituito dalle prime due equazioni ossia al sistema $x_1+x_3+x_4=0$, $x_1+x_2=0$ che, posto $x_3=t_1$, $x_4=t_2$ dà $x_1=-t_1-t_2$, $x_2=t_1+t_2$. Lo spazio delle soluzioni del sistema è

$$S_o(1)=\{(-t_1-t_2,t_1+t_2,t_1,t_2) | t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}=\{t_1(-1,1,1,0)+t_2(-1,1,0,1) | t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}.$$

Da $U(1)= S_o(1)=\{t_1(-1,1,1,0)+t_2(-1,1,0,1) | t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$ si trae che una base di $U(1)$ è costituita dai vettori $u_1=(-1,1,1,0)$, $u_2=(-1,1,0,1)$ e quindi la dimensione di $U(1)$ è 2.