ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere Pf-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 25–1-2013

1.1. Spazio euclideo ordinario ***E***. RC(O;i,j,k). Siano assegnati il punto $P_0(0,1,0)$, le rette r_1:x+y-2=0, x-z=0, r_2:x+z-1=0, y+z-1=0 ed il piano p:x-y+z+1=0.

(a) Dire se le rette r_1 ed r_2 sono o non sono sghembe, giustificando la risposta.

(b) Determinare equazioni cartesiane della retta r incidente le rette r_1 ed r_2 e parallela all'asse z.

(c) Detti P_1 e P_2 i punti d'intersezione della retta r rispettivamente con la retta r_1 e con la retta r_2, calcolare il volume *V* del tetraedro $OP_0P_1P_2$.

(d) Scrivere equazioni cartesiane della retta s passante per il punto P_0, contenuta nel piano p e perpendicolare alla retta r.

(e) Calcolare la distanza d(r,s) delle rette r ed s.

Soluzione

(a) La matrice completa, quadrata di ordine quattro, associata alle equazioni delle rette r_1 ed r_2 ha determinante uguale a -2. Essendo tale determinante non nullo, si ha che le rette r_1 ed r_2 sono sghembe.

(b) Equazioni parametriche di r_1 sono, per esempio, $x=t_1$, $y=2-t_1$, $z=t_1$, $t_1\in\boldsymbol{R}$; allora coordinate cartesiane del punto generico $P_1(t_1)$ di r_1 sono $(t_1,2-t_1,t_1)$. Equazioni parametriche di r_2 sono, per esempio, $x=1-t_2$, $y=1-t_2$, $z=t_2$, $t_2\in\boldsymbol{R}$ e quindi coordinate cartesiane del punto generico $P_2(t_2)$ di r_2 sono $(1-t_2,1-t_2,t_2)$. La condizione d'incidenza con le rette r_1 ed r_2 è soddisfatta dalla retta passante per i punti $P_1(t_1)$ e $P_2(t_2)$ e quindi di equazioni in forma di rapporti uguali $(x-t_1)/(1-t_2-t_1)=(y-2+t_1)/(-1-t_2+t_1)=(z-t_1)/(t_2-t_1)$, dove i denominatori hanno il significato di parametri direttori della retta. Essendo (0,0,1) parametri direttori dell'asse z, la condizione di parallelismo della suddetta retta con l'asse z può essere espressa imponendo che sia minore di 2 il rango della matrice avente come righe $(1-t_2-t_1,-1-t_2+t_1,t_2-t_1)$ e (0,0,1). Tale condizione dà $-1-t_2+t_1=0$, $1-t_2-t_1=0$ e quindi $t_1=1$, $t_2=0$. Si ha allora r:(x-1)/0=(y-1)/0=(z-1)/(-1) onde equazioni cartesiane di r sono x-1=0, y-1=0.

(c) La retta generica passante per il punto P_0 ha equazioni in forma di rapporti uguali x/l=(y-1)/m=z/l. La condizione che tale retta sia contenuta nel piano p, essendo P_0 un punto di p, può essere espressa imponendo che essa sia parallela a p quindi che sia l-m+n=0. La condizione di perpendicolarità con la retta r dà n=0. Si ha allora che parametri direttori della retta s sono (l,m,n)=(1,1,0) onde è s: x/l=(y-1)/1=z/0. Pertanto equazioni cartesiane di s sono x-y+1=0, z=0.

(d) I punti P_1 e P_2 si ottengono, rispettivamente, ponendo $t_1=1$ e $t_2=0$ in $P_1(t_1)$ e $P_2(t_2)$. Si ha allora che coordinate cartesiane di P_1 sono (1,1,1) e coordinate cartesiane di P_2 sono (1,1,0). Il volume *V* del tetraedro $OP_0P_1P_2$ è uguale ad 1/6 del modulo del prodotto misto dei tre vettori geometrici rappresentati rispettivamente dai segmenti orientati OP_0, OP_1, OP_2. Ma tali vettori geometrici hanno, rispettivamente, coordinate (0,1,0), (1,1,1), (1,1,0) e quindi risulta *V*=1/6.

(e) La distanza d(r,s) delle due rette r ed s uguaglia la distanza di un punto qualsiasi della retta s dal piano q contenente la retta r e parallelo alla retta s. Un punto della retta s è P_0 ed equazione cartesiana del piano q è x-y=0. Si ha allora $d(r,s)=d(P_0,q)=|-1|/2^{½}= 1|/2^{½}$.

1.2. Spazi vettoriali numerici reali $V=\boldsymbol{R}^3$ e $W=\boldsymbol{R}^4$. Siano assegnate le applicazioni lineari $F_h:V\rightarrow W$, tale che $F_h(v)=(x_1+2x_3,-x_1+x_2,x_2+2x_3,hx_1+hx_3)$, essendo $v=(x_1,x_2,x_3)$ ed h un parametro reale, e $G:W\rightarrow V$, tale che $G(w)=(y_1,y_2+y_3,y_3+y_4)$, essendo $w=(y_1,y_2,y_3,y_4)$.

(a) Determinare la matrice A_h associata all'applicazione lineare F_h rispetto alle basi canoniche di V e W, la matrice B associata all'applicazione lineare G rispetto alle basi canoniche di W e V e la matrice C_h associata all'endomorfismo $G\circ F_h:V\rightarrow V$ rispetto alla base canonica di V.

(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'endomorfismo $G\circ F_h$ non sia surgettivo.

(c) Indicato semplicemente con $G\circ F$ l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 di cui al punto precedente e indicata semplicemente con C la matrice ad esso associata, verificare che $G\circ F$ è diagonalizzabile.

(d) Determinare una base $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3)$ di V rispetto alla quale la matrice C´ associata a $G\circ F$ sia diagonale.

(e) Determinare una matrice quadrata non singolare D tale che risulti $C'=D^{-1}CD$.

(f) Scrivere l'espressione di $G\circ F(v)$ rispetto alla base B'_V.

Soluzione

(a) La matrice A_h richiesta ha come righe $A_h^{(1)}=(1,0,2)$, $A_h^{(2)}=(-1,1,0)$, $A_h^{(3)}=(0,1,2)$, $A_h^{(4)}=(h,0,h)$. La matrice B richiesta ha come righe $B^{(1)}=(1,0,0,0)$, $B^{(2)}=(0,1,1,0)$, $B^{(3)}=(0,0,1,1)$. La matrice C_h richiesta uguaglia il prodotto della matrice B e della matrice A_h. Si ha allora che la matrice C_h ha come righe $C_h^{(1)}=(1,0,2)$, $C_h^{(2)}=(-1,2,2)$, $C_h^{(3)}=(h,1,h+2)$,

(b) L'endomorfismo $G\circ F_h$ non è surgettivo se e soltanto se risulta $rg(C_h)<3$ e quindi, essendo C_h una matrice quadrata, se e soltanto risulta $\det(C_h)=0$. Ma essendo $\det(C_h)=-2h$, si ha che $\det(C_h)=0$ se e soltanto se è $h=0$. Allora il valore di h in corrispondenza del quale l'endomorfismo $G\circ F_h$ non è surgettivo è $h_0=0$.

(c) Indicato, come richiesto, semplicemente con $G\circ F$ l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 del parametro h, di cui al punto precedente, ed indicata semplicemente con C la matrice associata a tale endomorfismo, si ha che l'equazione caratteristica di $G\circ F$ è $\det(C-\lambda I)=0$, ossia $-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)=0$. Tale equazione ammette tre soluzioni distinte: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$. Gli autovalori di $G\circ F$ sono allora $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$. Essendo il numero degli autovalori di $G\circ F$ uguale alla dimensione dello spazio vettoriale V, l'endomorfismo $G\circ F$ risulta diagonalizzabile per il criterio di diagonalizzabilità degli endomorfismi.

(d) Una base di V rispetto alla quale la matrice associata a $G\circ F$ sia diagonale è una base di autovettori rispetto a $G\circ F$. Determiniamo dunque una tale base. Sia V_0 l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1=0$. Equazioni cartesiane di V_0 sono $x_1+2x_3=0$, $-x_1+2x_2+2x_3=0$, $x_2+2x_3=0$. Risulta allora $V_0=\{t(2,2,-1)|t\in\boldsymbol{R}\}$, con base costituita dal solo autovettore $v_1'=(2,2,-1)$. Procedendo in modo analogo, si ha che l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_2=2$ è $V_2=\{t(2,0,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$, con base costituita dal solo autovettore $v_2'=(2,0,1)$ e l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_3=3$ è $V_3=\{t(1,1,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$, con base costituita dal solo autovettore $v_3'=(1,1,1)$. Una base di autovettori è allora $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$. La matrice associata a $G\circ F$ rispetto a tale base è la matrice diagonale C' che ha sulla diagonale principale ordinatamente gli autovalori 0,2,3.

(e) Una matrice D del tipo richiesto è, per esempio, la matrice del cambiamento di basi nel passaggio dalla base canonica alla base di autovettori B_V' di V. Tale matrice, dovendo avere come colonne le colonne delle coordinate dei vettori v_1',v_2',v_3', ha come righe $D^{(1)}=(2,2,1)$, $D^{(2)}=(2,0,1)$, $D^{(3)}=(-1,1,1)$.

(f) Risulta $G\circ F(v)=2x_2'v_2'+3x_3'v_3'$, essendo (x_1',x_2',x_3') le coordinate di v rispetto alla base B_V'.

2.1. <u>Spazio euclideo ordinario ***E***.</u> RC(O;i,j,k). Siano assegnati il punto A(0,1,0), le rette r_1:y+z-2=0, x-z=0, r_2:x+z-1=0, x+y-1=0 ed il piano p:x-y+z+1=0.

(a) Dire se le rette r_1 ed r_2 sono o non sono sghembe, giustificando la risposta.
(b) Determinare equazioni cartesiane della retta r incidente le rette r_1 ed r_2 e parallela all'asse x.
(c) Detti B e C i punti d'intersezione della retta r rispettivamente con la retta r_1 e con la retta r_2, calcolare il volume *V* del tetraedro OABC.
(d) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per il punto A, contenuta nel piano p e perpendicolare alla retta r.
(e) Calcolare la distanza d(r,s) delle rette r ed s.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.1, si ha:
(a) le rette r_1 ed r_2 sono sghembe;
(b) r:y-1=0, z-1=0;
(c) s:x=0, y-z-1=0;.
(d) *V*=1/6;
(e) $d(r,s)=1l/2^{½}$.

2.2. <u>Spazi vettoriali reali V di dimensione 3 e W di dimensione 4</u>. Basi $B_V=(v_1,v_2,v_3)$ e $B_W=(w_1,w_2,w_3,w_4)$. Siano assegnate le applicazioni lineari $F_h:V\rightarrow W$, tale che $F_h(v)=(x_1+2x_3)w_1+(-x_1+x_2)w_2+(x_2+2x_3)w_3+(h+1)(x_1+x_3)w_4$, essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$ ed h un parametro reale, e $G:W\rightarrow V$, tale che $G(w)=y_1v_1+(y_2+y_3)v_2+(y_3+y_4)v_3$, essendo $w=y_1w_1+y_2w_2+y_3w_3+y_4w_4$.

(a) Determinare la matrice A_h associata all'applicazione lineare F_h rispetto alle basi B_V e B_W, la matrice B associata all'applicazione lineare G rispetto alle basi B_W e B_V e la matrice C_h associata all'endomorfismo $G\circ F_h:V\rightarrow V$ rispetto alla base B_V.
(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'endomorfismo $G\circ F_h$ non sia iniettivo.
(c) Indicato semplicemente con $G\circ F$ l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 di cui al punto precedente e indicata semplicemente con C la matrice ad esso associata, verificare che $G\circ F$ è diagonalizzabile.
(d) Determinare una base $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3)$ di V rispetto alla quale la matrice C´ associata a $G\circ F$ sia diagonale.
(e) Determinare una matrice quadrata non singolare D tale che risulti $C'=D^{-1}CD$.
(f) Scrivere l'espressione di $G\circ F(v)$ rispetto alla base B'_V.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.2, si ha:
(a) la matrice A_h richiesta ha come righe $A_h^{(1)}=(1,0,2)$, $A_h^{(2)}=(-1,1,0)$, $A_h^{(3)}=(0,1,2)$, $A_h^{(4)}=(h+1,0,h+1)$, la matrice B richiesta ha come righe $B^{(1)}=(1,0,0,0)$, $B^{(2)}=(0,1,1,0)$, $B^{(3)}=(0,0,1,1)$, la matrice C_h richiesta uguaglia il prodotto della matrice B e della matrice A_h e quindi è tale che $C_h^{(1)}=(1,0,2)$, $C_h^{(2)}=(-1,2,2)$, $C_h^{(3)}=(h+1,1,h+3)$;

(b) l'endomorfismo $G\circ F_h$ non è iniettivo se e soltanto se risulta $rg(C_h)<3$ e quindi, essendo C_h una matrice quadrata, se e soltanto risulta $\det(C_h)=0$, ma essendo $\det(C_h)=-2h-2$, si ha che $\det(C_h)=0$ se e soltanto se è $h=-1$, allora il valore di h in corrispondenza del quale l'endomorfismo $G\circ F_h$ non è iniettivo è $h_0=-1$;

(c) indicato, come richiesto, semplicemente con $G\circ F$ l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 del parametro h, di cui al punto precedente, ed indicata semplicemente con C la matrice associata a tale endomorfismo, si ha che l'equazione caratteristica di $G\circ F$ è $\det(C-\lambda I)=0$, ossia $-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)=0$, tale equazione ammette tre soluzioni distinte: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$ onde gli autovalori di $G\circ F$ sono $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$; essendo il numero degli autovalori di $G\circ F$ uguale alla dimensione dello spazio vettoriale V, l'endomorfismo $G\circ F$ risulta diagonalizzabile per il criterio di diagonalizzabilità degli endomorfismi;

(d) una base di V rispetto alla quale la matrice C' associata all'endomorfismo $G\circ F$ sia diagonale è $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3)$, essendo $v_1'=2v_1+2v_2-v_3$, $v_2'=2v_1+v_3$, $v_3'==v_1+v_2+v_3$; rispetto a tale base la matrice associata a $G\circ F$ è la matrice diagonale C' che ha sulla diagonale principale ordinatamente gli autovalori 0,2,3;

(e) una matrice D del tipo richiesto è la matrice che ha come righe $D^{(1)}=(2,2,1)$, $D^{(2)}=(2,0,1)$, $D^{(3)}=(-1,1,1)$

(f) risulta $G\circ F(v)=2x_2'v_2'+3x_3'v_3'$, essendo (x_1',x_2',x_3') le coordinate di v rispetto alla base B_V'.