ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere Pf-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova Scritta del 23–11-2012

1.1. <u>Spazio vettoriale numerico reale</u> V=$\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali U=Span((u_1,u_2), essendo $u_1=(0,1,1,0)$, $u_2=(-1,1,0,1)$, e W(h): $x_1+x_2+hx_3=0$, $h(x_1-x_2+x_3)=0$, dove h è un parametro reale.

(a) Determinare una base B_U e la dimensione di U.

(b) Determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.

(c) Determinare la dimensione di W(h).

(d) Determinare una base e la dimensione di U∩W(h).

(e) Determinare la dimensione di U+W(h).

(f) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali V è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W(h).

Soluzione

(a) I vettori u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti perché non sono proporzionali. Allora essi essendo un sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti estratto dal sistema di generatori $\{u_1,u_2\}$ di U, costituiscono una base B_U di U e quindi risulta dim(U)=2.
(b) Imponendo alla matrice che ha come colonne rispettivamente le colonne delle coordinate dei vettori u_1, u_2 e v, essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ un vettore generico di V, si ha che equazioni cartesiane di U sono, per esempio, $x_1+x_2-x_3=0$, $x_1+x_4=0$.
(c) La matrice incompleta A(h) associata al sistema lineare omogeneo che rappresenta W(h), essendo costituita da due righe non proporzionali, e quindi linearmente indipendenti, se è h≠0 ed avendo una riga non nulla ed una riga nulla se è h=0, ha rango 2 se è h≠0 e rango 1 se è h=0. Allora risulta dim(W(h))=dim(V)-rg(A(h))=4-2=2 se è h≠0 e dim(W(0))=dim(V)-rg(A(0))=4-1=3.
(d) Equazioni cartesiane di U∩W sono, per esempio, $x_1+x_2-x_3=0$, $x_1+x_4=0$, $x_1+x_2+hx_3=0$, $h(x_1-x_2+x_3)=0$.
Utilizzando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan, si ha che il sistema costituito da tali equazioni risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare omogeneo a scala $x_1+x_2-x_3=0$, $-x_2+x_3+x_4=0$, $(h+1)x_3=0$, $-2hx_4=0$ se è h≠-1,0, risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare omogeneo a scala $x_1+x_2-x_3=0$, $-x_2+x_3+x_4=0$, $2x_4=0$ se è h=-1 e risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare omogeneo a scala $x_1+x_2-x_3=0$, $-x_2+x_3+x_4=0$, $x_3=0$ se è h=0. Risolvendo tali sistemi lineari omogenei si ha rispettivamente: U∩W(h)={(0,0,0,0)}, onde U∩W(h) non ha basi ed è dim(U∩W(h))=0 se è h≠-1,0; U∩W(-1)={(0,t,t,0)|t∈$\boldsymbol{R}$}={t(0,1,1,0)|t∈$\boldsymbol{R}$} con base, per esempio, $B_{U\cap W(-1)}=(a_1)$, essendo $a_1=(0,1,1,0)$, e dim(U∩W(-1)=1; U∩W(0)={(-t,t,0,t)|t∈$\boldsymbol{R}$}={t(-1,1,0,1)|t∈$\boldsymbol{R}$} con base, per esempio, $B_{U\cap W(0)}=(b_1)$, essendo $b_1=(-1,1,0,1)$, e dim(U∩W(0)=1.
(e) Tenuti presenti i risultati ottenuti nei quesiti precedenti, per la formula di Grassmann vettoriale si ha: dim(U+W(h))=dim(U)+dim(W(h))-dim(U∩W(h))=2+2-0=4 se è h≠-1,0; dim(U+W(-1))=dim(U)+dim(W(-1))-dim(U∩W(-1))=2+2-1=3; dim(U+W(0))=dim(U)+dim(W(0))-dim(U∩W(0))=2+3-1=4.
(f) Le condizioni che devono essere soddisfatte affinché lo spazio vettoriale V sia somma diretta di U e W(h) sono V=U+W(h) e U∩W(h)={(0,0,0,0)}. Ebbene, tenuti presenti i risultati ottenuti nel quesito (d), si ha che la seconda condizione è soddisfatta soltanto per h≠-1,0. Per h≠-1,0 risulta, come stabilito nel quesito (e), dim(U+W(h)=4 e quindi, essendo dim(V)=4, è anche U+W(h) =V. In definitiva V è somma diretta di U e W(h) per h≠-1,0.

1.2. <u>Spazio vettoriale</u> V <u>dei vettori geometrici dello spazio ordinario.</u> Base $B_V=(i,j,k)$. Siano assegnati i vettori $v_0(h)=-j+hk$, $w_1(h)=i+j+(h+1)k$, $w_2(h)=(h+1)j+(h+1)k$, $w_3(h)=2i+(-h+1)j+(h+1)k$, essendo h un parametro reale. Posto $W=Span(w_1(h),w_2(h),w_3(h))$, si indichi con $W'(h)$ la sottovarietà lineare affine di V contenente il vettore $v_0(h)$ e parallela al sottospazio vettoriale W(h).

(a) Determinare una base e la dimensione di W(h).

(b) Determinare equazioni parametriche di $W'(h)$.

(c) Determinare equazioni cartesiane di $W'(h)$.

(d) Determinare la dimensione di $W'(h)$.

(e) Determinare l'intersezione $W'(h)\cap W(h)$.

Soluzione

(a) Applicando l'algoritmo di Gauss-Jordan di estrazione di una base al sistema di generatori $\{w_1(h),w_2(h),w_3(h)\}$ di W(h) si ha che per $h\neq-1$ una base di W(h) è $B_{W(h)}=(w_1(h),w_2(h))$ mentre una base di W(-1) è $B_{W(-1)}=(w_1(-1))$. Pertanto risulta dim(W(h)=2 se è $h\neq-1$ e dim(W(-1)=1.

(b) <u>Caso $h\neq-1$</u>. Equazioni parametriche di $W'(h)$ sono $x=t_1$, $y=-1+t_1+(h+1)t_2$, $z=h+(h+1)t_1+(h+1)$, $t_1,t_2\in \boldsymbol{R}$.

<u>Caso h=-1</u>. Equazioni parametriche di $W'(-1)$ sono $x=t$, $y=-1+t$, $z=-1$, $t\in \boldsymbol{R}$.

(c) <u>Caso $h\neq-1$</u>. Imponendo di avere rango minore di 3 alla matrice che ha come colonne rispettivamente le colonne delle coordinate dei vettori $w_1(h)$, $w_2(h)$ e $v-v_0$, essendo $v=xi+yj+zk$ un vettore variabile in V, si ottiene che un'equazioni cartesiana di $W'(h)$ è $hx+y-z+h+1=0$.

<u>Caso h=-1</u>. Eliminando il parametro t dalle equazioni parametriche di $W'(-1)$ oppure imponendo di avere rango minore di 2 alla matrice che ha come colonne rispettivamente le colonne delle coordinate dei vettori $w_1(-1)=i+j$ e $v-v_0$, essendo $v=xi+yj+zk$ un vettore variabile in V, si ottiene che equazioni cartesiane di $W'(-1)$ sono, per esempio, $x-y-1=0$, $z+1=0$.

(d) La dimensione di una sottovarietà lineare affine è uguale, per definizione, alla dimensione del sottospazio vettoriale ad essa parallelo quindi si ha $\dim(W'(h))=\dim(W(h))=2$ per $h\neq-1$ e $\dim(W'(-1))=\dim(W(-1))=1$.

(e) <u>Caso $h\neq-1$.</u> W(h) è rappresentato dall'equazione cartesiana omogenea associata all'equazione cartesiana di $W'(h)$. Si ha pertanto W(h): $hx+y-z=0$. Allora equazioni cartesiane di $W'(h)\cap W(h)$ sono $hx+y-z+h+1=0$, $hx+y-z=0$. Ma il sistema formato da tali equazioni, essendo equivalente al sistema $h+1=0$, $hx+y-z=0$, è incompatibile per $h\neq-1$. Allora $W'(h)\cap W(h)$ coincide con l'insieme vuoto.

<u>Caso h=-1.</u> W(-1) è rappresentato dal sistema lineare omogeneo associato al sistema lineare che rappresenta $W'(-1)$. Si ha pertanto W(-1): $x-y=0$, $z=0$. Allora equazioni cartesiane di $W'(-1)\cap W(-1)$ sono $x-y-1=0$, $z+1=0$ $x-y=0$, $z=0$. Ma il sistema formato da tali equazioni, essendo equivalente al sistema $-1=0$, $1=0$, $x-y=0$, $z=0$, è incompatibile. Allora $W'(-1)\cap W(-1)$ coincide con l'insieme vuoto.

2.1. <u>Spazio vettoriale numerico reale $V=\boldsymbol{R}^4$</u>. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U=Span((u_1,u_2)$, essendo $u_1=(1,1,0,0)$, $u_2=(1,0,1,-1)$, e $W(h)$: $h(x_1+x_2+x_4)=0$, $x_1-x_2+hx_4=0$, dove h è un parametro reale.

(a) Determinare una base B_U e la dimensione di U.
(b) Determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.
(c) Determinare la dimensione di W(h).
(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W(h)$.
(e) Determinare la dimensione di U+W(h).
(f) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali V è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W(h).

Soluzione

Procedendo come in 1.1 si ha:
(a) $B_U=(u_1,u_2)$ e dim(U)=2 ;
(b) U: $x_1-x_2-x_3=0$, $x_1-x_2+x_4=0$;
(c) dim(W(h))=2 se è $h\neq0$ e dim(W(0)=3;
(d) $U\cap W(h)$ non ha basi ed è $\dim(U\cap W(h))=0$ se è $h\neq0,1$, $B_{U\cap W(0)}=(a_1)$, essendo $a_1=(1,1,0,0)$, e $\dim(U\cap W(0)=1$, $B_{U\cap W(1)}=(b_1)$, essendo $b_1=(-1,0,-1,1)$, e $\dim(U\cap W(1))=1$;
(e) dim(U+W(h))=4 se è $h\neq1$ e dim(U+W(1))=3;
(f) V è somma diretta di U e W(h) per $h\neq0,1$.

2.2. <u>Spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario.</u> Base $B_V=(i,j,k)$. Siano assegnati i vettori $v_0(h)=i-j+(h+3)k$, $w_1(h)=i+2k$, $w_2(h)=i+hj+(-h+2)k$, $w_3(h)=hi+hj+hk$, essendo h un parametro reale. Posto $W=Span(w_1(h),w_2(h),w_3(h))$, si indichi con $W'(h)$ la sottovarietà lineare affine di V contenente il vettore $v_0(h)$ e parallela al sottospazio vettoriale W(h).

(a) Determinare una base e la dimensione di W(h).
(b) Determinare equazioni parametriche di $W'(h)$.
(c) Determinare equazioni cartesiane di $W'(h)$.
(d) Determinare la dimensione di $W'(h)$.
(e) Determinare l'intersezione $W'(h)\cap W(h)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:
(a) $B_{W(h)}=(w_1(h),w_2(h))$, dim(W(h)=2 per $h\neq0$ e $B_{W(0)}=(w_1(0))$, dim(W(0)=1;
(b) equazioni parametriche di $W'(h)$ sono $x=1+t_1+t_2$, $y=-1+ht_2$, $z=h+3+2t_1+(-h+2)t_2$, $t_1,t_2\in\boldsymbol{R}$, se è $h\neq0$, equazioni parametriche di $W'(0)$ sono $x=1+t$, $y=-1$, $z=h+3+2t$, $t\in\boldsymbol{R}$;
(c)) un'equazioni cartesiana di $W'(h)$ per $h\neq1$ è $2x-y-z-h=0$, equazioni cartesiane di $W'(0)$ sono, per esempio, $y+1=0$, $2x-z+1=0$;
(d) $\dim(W'(h))=\dim(W(h))=2$ per $h\neq0$ e $\dim(W'(0))=\dim(W(0))=1$;
(e) $W'(h)\cap W(h)$ è l'insieme vuoto $\forall h\in\boldsymbol{R}$.

3.1. <u>Spazio vettoriale numerico reale</u> V=$\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali U=Span((u_1,u_2)), essendo $u_1=(1,0,0,1)$, $u_2=(1,-1,1,0)$, e W(h): $hx_1+x_3+x_4=0$, $h(x_1+x_3-x_4)=0$, dove h è un parametro reale.

(a) Determinare una base B_U e la dimensione di U.
(b) Determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.
(c) Determinare la dimensione di W(h).
(d) Determinare una base e la dimensione di U$\cap$W(h).
(e) Determinare la dimensione di U+W(h).
(f) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali V è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W(h).

Soluzione

Procedendo come in 1.1 si ha:
(a) $B_U=\{u_1,u_2\}$ e dim(U)=2;
(b) U: $x_1+x_2-x_4=0$, $x_2+x_3=0$;
(c) dim(W(h))=2 se è $h\neq 0$ e dim(W(0)=3;
(d) U$\cap$W(h) non ha basi ed è dim(U$\cap$W(h))=0 se è $h\neq -1,0$, $B_{U\cap W(-1)}=(a_1)$, essendo $a_1=(1,0,0,1)$, e dim(U$\cap$W(-1)=1, $B_{U\cap W(0)}=(b_1)$, essendo $b_1=(0,1,-1,1)$, e dim(U$\cap$W(0)=1;
(e) dim(U+W(h))=4 se è $h\neq -1$ e dim(U+W(-1))=3;
(f) V è somma diretta di U e W(h) per $h\neq -1,0$.

3.2. <u>Spazio vettoriale</u> V <u>dei vettori geometrici dello spazio ordinario.</u> Base B_V=(i,j,k). Siano assegnati i vettori $v_0(h)$=-i+j+2k, $w_1(h)$=i+j+(-h+2)k, $w_2(h)$=2i+hj+(-h+2)k, $w_3(h)$=(-h+2)j+(-h+2)k, essendo h un parametro reale. Posto W=Span($w_1(h),w_2(h),w_3(h)$), si indichi con W´(h) la sottovarietà lineare affine di V contenente il vettore $v_0(h)$ e parallela al sottospazio vettoriale W(h).

(a) Determinare una base e la dimensione di W(h).
(b) Determinare equazioni parametriche di W´(h).
(c) Determinare equazioni cartesiane di W´(h).
(d) Determinare la dimensione di W´(h).
(e) Determinare l'intersezione W´(h)$\cap$W(h).

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:
(a) $B_{W(h)}=(w_1(h),w_2(h))$, dim(W(h)=2 per $h\neq 2$ e $B_{W(2)}=(w_1(2))$, dim(W(2)=1;
(b) per $h\neq 2$ equazioni parametriche di W´(h) sono $x=-1+t_1+2t_2$, $y=1+t_1+ht_2$, $z=2+(-h+2)t_1+(-h+2)t_2$, $t_1,t_2\in\boldsymbol{R}$, equazioni parametriche di W´(2) sono x=-1+t, y=1, z=2+2t, $t\in\boldsymbol{R}$;
(c)) per $h\neq 2$ un'equazioni cartesiana di W´(h) è (h-1)x-y+z+h-2=0 , equazioni cartesiane di W´(2) sono, per esempio, x-y+2=0, z-2=0;
(d) dim(W´(h))=dim(W(h))=2 per $h\neq 2$ e dim(W´(2))=dim(W(2))=1;
(e) W´(h)$\cap$W(h) è l'insieme vuoto $\forall h\in\boldsymbol{R}$.

4.1. <u>Spazio vettoriale numerico reale V=$\boldsymbol{R}^4$</u>. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i sottospazi vettoriali $U=Span((u_1,u_2)$, essendo $u_1=(1,-1,1,0)$, $u_2=(1,-1,0,-1)$, e $W(h)$: $h(x_2+x_3+x_4)=0$, $hx_2-x_3+x_4=0$, dove h è un parametro reale.

(a) Determinare una base B_U e la dimensione di U.

(b) Determinare equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica B_V.

(c) Determinare la dimensione di W(h).

(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W(h)$.

(e) Determinare la dimensione di U+W(h).

(f) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali V è somma diretta dei sottospazi vettoriali U e W(h).

Soluzione

Procedendo come in 1.1 si ha:

(a) $B_U=\{u_1,u_2\}$ e dim(U)=2;

(b) U: $x_1-x_3+x_4=0$, $x_1+x_2=0$;

(c) dim(W(h))=2 se è $h\neq0$ e dim(W(0)=3;

(d) $U\cap W(h)$ non ha basi ed è $\dim(U\cap W(h))=0$ se è $h\neq-1,0$, $B_{U\cap W(-1)}=(a_1)$, essendo $a_1=(1,-1,1,0)$, e $\dim(U\cap W(-1)=1$, $B_{U\cap W(0)}=(b_1)$, essendo $b_1=(0,0,1,1)$, e $\dim(U\cap W(0)=1$;

(e) dim(U+W(h))=4 se è $h\neq-1$ e dim(U+W(-1))=3;

(f) V è somma diretta di U e W(h) per $h\neq-1,0$.

4.2. <u>Spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario.</u> Base $B_V=(i,j,k)$. Siano assegnati i vettori $v_0(h)=-i-j-hk$, $w_1(h)=i+(-h+1)j+(h+1)k$, $w_2(h)=i+2k$, $w_3(h)=(-h+1)i+(-h+1)j+(-h+1)k$, essendo h un parametro reale. Posto $W=Span(w_1(h),w_2(h),w_3(h))$, si indichi con W´(h) la sottovarietà lineare affine di V contenente il vettore $v_0(h)$ e parallela al sottospazio vettoriale W(h).

(a) Determinare una base e la dimensione di W(h).

(b) Determinare equazioni parametriche di W´(h).

(c) Determinare equazioni cartesiane di W´(h).

(d) Determinare la dimensione di W´(h).

(e) Determinare l'intersezione W´(h)$\cap$W(h).

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) $B_{W(h)}=(w_1(h),w_2(h))$, dim(W(h)=2 per $h\neq1$ e $B_{W(1)}=(w_1(1))$, dim(W(1)=1;

(b) per $h\neq1$ equazioni parametriche di W´(h) sono $x=-1+t_1+t_2$, $y=-1+(-h+1)t_1$, $z=-h+(h+1)t_1+2t_2$, $t_1,t_2\in\boldsymbol{R}$, equazioni parametriche di W´(1) sono $x=-1+t$, $y=-1$, $z=-1+2t$, $t\in\boldsymbol{R}$;

(c)) per $h\neq1$ un'equazioni cartesiana di W´(h) è $2x-y-z-h+1=0$, equazioni cartesiane di W´(1) sono, per esempio, $y+1=0$, $2x-z+1=0$;

(d) dim(W´(h))=dim(W(h))=2 per $h\neq1$ e dim(W´(1))=dim(W(1))=1;

(e) W´(h)$\cap$W(h) è l'insieme vuoto $\forall h\in\boldsymbol{R}$.