ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Co)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 23–1-2014

1. Spazio euclideo ordinario. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $P_h(1,-1,h)$, $Q_h(0,h,1)$, $R_h(2,-h-2,1)$, essendo h un parametro reale, e le rette r_1:x+y-z-1=0, x-y-z+1=0, r_2:x-z-2=0, y-z=0.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale i punti P_h, Q_h, R_h risultino allineati.

(b) Indicati semplicemente con P, Q, R i punti che si ottengono in corrispondenza del valore h_0 del parametro h di cui al punto precedente, determinare equazioni cartesiane della retta r generata da tali punti.

(c) Verificare che le rette r_1 ed r_2 non sono parallele.

(d) Determinare l'equazione cartesiana del piano p passante per l'origine O e parallelo alle rette r_1 e r_2.

(e) Verificare che la retta r ed il piano p sono incidenti e determinare le coordinate cartesiane del punto S= $r \cap p$.

(f) Indicate con U e W rispettivamente la direzione della retta r e la giacitura del piano p, determinare, se esistono, due vettori $u \in U$ e $w \in W$ tali che risulti v=u+w, essendo v=2i-j+3k.

(g) Scrivere equazioni cartesiane del fascio *F* di rette, giacenti sul piano p, ed avente come centro il punto S.

(h) Determinare equazioni cartesiane della retta s, appartenente al fascio *F,* tale che s risulti perpendicolare all'asse x.

Soluzione

(a) I vettori (geometrici) aventi come rappresentanti i segmenti orientati P_hQ_h e P_hR_h hanno come coordinate, rispettivamente, (-1,h+1,-h+1) e (1,-h-1,-h+1). Tali vettori risultano linearmente dipendenti se e soltanto se è h=1. Pertanto i punti P_h, Q_h e R_h risultano allineati se e soltanto se è h=1. Allora il valore richiesto del parametro è h_0=1.

(b) Ponendo h=h_0=1 nelle coordinate di P_h, Q_h e R_h, si ha P(1,-1,1), Q(0,1,1) ed R(2,-3,1). Essendo distinti i punti P e Q, si ha che la retta r, generata dai punti P, Q, R, coincide con la retta passante per i punti P e Q. Pertanto la retta r ha equazioni, in forma di rapporti uguali, (x-1)/(-1)=(y+1)/2=(z-1)/0 e quindi equazioni cartesiane, per esempio, 2x+y-1=0, z-1=0.

(c) Parametri direttori delle rette r_1 ed r_2 sono, per esempio, rispettivamente (l_1,m_1,n_1)=(1,0,1) e (l_2,m_2,n_2)=(1,1,1). Dalla non proporzionalità di tali terne di parametri direttori si trae che le rette r_1 ed r_2 non sono parallele.

(d) L'equazione cartesiana del piano p può essere ottenuta uguagliando a zero il determinante della matrice quadrata che ha come righe, rispettivamente, (x,y,z), (1,0,1), (1,1,1). Pertanto risulta p:x-z=0.

(e) La retta r ed il piano p non sono paralleli perché risulta $1\cdot(-1)+0\cdot 2+(-1)\cdot 0=-1\neq 0$ e quindi, essendo 3 la dimensione dello spazio vettoriale dei vettori geometrici, sono incidenti. Risolvendo il sistema costituito dall'equazione cartesiana di p e dalle equazioni cartesiane di r, si ha che il punto S= $r \cap p$ ha coordinate cartesiane (1,-1,1) e quindi coincide con il punto P.

(f) Intanto i vettori richiesti esistono perché la retta r ed il piano p sono incidenti. Essendo (-1,2,0) parametri direttori della retta r, si ha che la direzione U della retta r ammette come base il vettore di coordinate (-1,2,0), quindi sarà $u=-\rho i+2\rho j$, dove ρ è un opportuno numero reale da determinare. Essendo W:x-z=0, dette (λ,μ,ν) le coordinate del vettore w, la condizione $w \in W$

dà λ-ν=0. Traducendo scalarmente l'uguaglianza vettoriale v=u+w, si hanno allora le uguaglianze $2=-\rho+\lambda$, $-1=2\rho+\mu$, $3=\nu$ che, insieme all'uguaglianza $\lambda-\nu=0$, danno $\rho=1$, $\lambda=3$, $\mu=-3$, $\nu=3$. Pertanto i vettori richiesti sono u=-i+2j e w=3i-3j+3k.

(g) Essendo r e p incidenti nel punto S, il fascio *F* di rette, giacenti sul piano p, ed avente come centro il punto S può essere ottenuto intersecando il fascio di piani, avente come asse la retta r, con il piano p. Allora equazioni cartesiane di *F* sono, per esempio, $\sigma(2x+y-1)+\tau(z-1)=0$, $x-z=0$, ossia $2\sigma x+\sigma y+\tau z-\sigma-\tau=0$, $x-z=0$, $(\sigma,\tau)\in \boldsymbol{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

(e) Parametri direttori della retta generica del fascio *F* sono $(-\sigma,2\sigma+\tau,-\sigma)$, La condizione di perpendicolarità con l'asse x, che ha parametri direttori (1,0,0), dà $-\sigma=0$, da cui si trae, per esempio, $\sigma=0$, $\tau=1$. Allora equazioni cartesiane della retta s sono, per esempio, z-1=0, x-z=0.

2. Siano assegnate la matrice quadrata A_h, avente come righe $A_h^{(1)}=(-2,0,0,0)$, $A_h^{(2)}=(0,-3,0,1)$, $A_h^{(3)}=(0,0,-h,0)$, $A_h^{(4)}=(0,-2h,0,0)$, essendo h un parametro reale, e la matrice quadrata B, avente come righe $B^{(1)}=(-1,0,0,0)$, $B^{(2)}=(1,-1,0,0)$, $B^{(3)}=(0,0,-2,0)$, $B^{(4)}=(0,0,0,-2)$.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale la matrice A_h ammetta lo scalare -1 come autovalore.

(b) Indicata semplicemente con A la matrice corrispondente al valore h_0 del parametro h di cui al punto precedente, determinare gli autovalori della matrice A, indicando per ciascuno di essi la rispettiva molteplicità algebrica.

(c) Dire se la matrice A è o non è diagonalizzabile, giustificando la risposta.

(d) Nel caso in cui la matrice A fosse diagonalizzabile, determinare una matrice diagonale A´ ed una matrice invertibile C tale che risulti $A'=C^{-1}AC$.

(e) Verificare che le matrici A e B sono invertibili.

(f) Dire se le matrici B, $A^{-1}BA$ e $B^{-1}AB$ sono o non sono diagonalizzabili, giustificando la risposta.

Soluzione

(a) L'equazione caratteristica della matrice A_h è $\det(A_h-\lambda I)=0$, ossia $(\lambda+2)(\lambda+h)(\lambda^2+3\lambda+2h)=0$. Tale equazione ammette come soluzione $\lambda=-1$ se e soltanto se risulta h=1. Pertanto è $h_0=1$.

(b) Ponendo $h=h_0$ nell'equazione caratteristica della matrice A_h,, si ha che l'equazione caratteristica della matrice A è $(\lambda+2)^2(\lambda+1)^2=0$. Pertanto gli autovalori di A sono $\lambda_1=-2$, con molteplicità algebrica $a_1=2$, e $\lambda_2=-1$, con molteplicità algebrica $a_2=2$.

(c) Essendo 4 l'ordine di A e risultando $a_1+a_2=4$, si ha che la matrice A è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica g_1 dell'autovalore λ_1 è uguale ad a_1 e la molteplicità geometrica g_2 dell'autovalore λ_2 è uguale ad a_2. Sia V_{-2} l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1=-2$. Equazioni cartesiane di V_{-2} sono 0=0, $-x_2+x_4=0$, $x_3=0$, $-2x_2+2x_4=0$ e quindi risulta $V_{-2}=\{t_1(1,0,0,0)+t_2(0,1,0,1)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di V_{-2} è costituita dagli autovettori $v_1'=(1,0,0,0)$, $v_2'=(0,1,0,1)$ onde risulta $g_1=\dim(V_{-2})=2=a_1$. Si ha poi V_{-1}:$-x_1=0$, $-2x_2+x_4=0$, 0=0, $-2x_2+x_4=0$ e quindi è $V_{-1}=\{t_1(0,1,0,2)+t_2(0,0,1,0)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di V_{-1} è costituita dagli autovettori $v_3'=(0,1,0,2)$, $v_4'=(0,1,0,0)$ e quindi è $g_2=\dim(V_{-1})=2=a_2$. Pertanto la matrice A è diagonalizzabile.

(d) Una base di $V=\boldsymbol{R}^4$, costituita da autovettori rispetto alla matrice A, è, per esempio, $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$, essendo v_1' ,v_2', v_3', v_4' gli autovettori di cui al punto precedente. Allora una matrice diagonale A' ed una matrice invertibile C tale che risulti $A'=C^{-1}AC$ sono, per esempio, rispettivamente la matrice diagonale avente $a_{11}'= a_{22}'=\lambda_1=-2$ e $a_{33}'= a_{44}'=\lambda_2= -1$ e la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ alla base $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$, ossia la matrice avente come righe $C^{(1)}=(1,0,0,0)$, $C^2=(0,1,1,0)$, $C^3=0,0,0,1)$, $C^4=(0,1,2,0)$.
(e) Risulta $\det(A)=4\neq 0$ e $\det(B)=4\neq 0$, onde le matrici A e B sono invertibili.
(f) Intanto la matrice $B^{-1}AB$ è diagonalizzabile perché tale è la matrice simile A. Le matrici B e $A^{-1}BA$, essendo simili, sono entrambe diagonalizzabili o entrambe non diagonalizzabili, onde è sufficiente esaminare soltanto il caso della matrice B. L'equazione caratteristica della matrice B è $(\lambda+2)^2(\lambda+1)^2=0$, ossia coincide con l'equazione caratteristica della matrice A. Allora gli autovalori di B sono $\lambda_1=-2$, con molteplicità algebrica $a_1=2$, e $\lambda_2=-1$, con molteplicità algebrica $a_2=2$. Ebbene la matrice B, e quindi anche la matrice $A^{-1}BA$, non è diagonalizzabile perché la molteplicità geometrica g_2 dell'autovalore λ_2 vale 1 e quindi non uguaglia la molteplicità geometrica a_2 dello stesso autovalore. Infatti, in questo caso risulta V_{-1} :0=0, $x_1=0$, $-x_3=0$, $-x_4=0$ e quindi $V_{-1}=\{t(0,1,0,0)|t\in\boldsymbol{R}\}$, da cui si trae $g_2=\dim(V_{-1})=1$.