**ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Co)**

**(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)**

**Testi e soluzioni della Prova Scritta del 21–11-2013**

***Avvertenza: Per la risoluzione dei sistemi lineari il candidato è tenuto ad usare il metodo di Gauss-Jordan oppure il metodo dei determinanti.***

1.1. Sia assegnato il sistema lineare, a coefficienti reali, nelle quattro incognite $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$

$$x_1- x_2+x_3=h,\ x_1+hx_3=h,\ hx_1-x_2+x_3=1,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali il sistema sia compatibile.

(b) Determinare l'insieme S(h) delle soluzioni del sistema per i valori di h di cui al punto precedente.

(c) Per i valori di h di cui al punto (a) determinare anche una soluzione particolare del sistema e l'insieme $S_o(h)$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

*Soluzione*

(a) Applicando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan si ha che: per h=0 il sistema risulta equivalente al sistema lineare a scala incompatibile $x_1- x_2+x_3=0$, $x_2-x_3=0$, $0=1$; per h=1 il sistema risulta equivalente al sistema lineare a scala compatibile $x_1-x_2+x_3=1$, $x_2=0$; per $h\neq0,1$ il sistema risulta equivalente al sistema lineare a scala compatibile $x_1-x_2+x_3=h$, $x_2+(h-1)x_3=0$, $(-h^2+h)x_3=1-h^2$. Pertanto il sistema risulta compatibile per ogni $h\neq0$.

(b) Caso h=1. Risolvendo il sistema lineare a scala compatibile $x_1-x_2+x_3=1$, $x_2=0$ si ha $x_1=1-t_1$, $x_2=0$, $x_3=t_1$, $x_4=t_2$, $t_1,t_2\in\boldsymbol{R}$ e quindi $S(1)=\{(1-t_1,0,t_1,t_2)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$.

Caso $h\neq0.1$. Risolvendo il sistema lineare a scala compatibile $x_1-x_2+x_3=h$, $x_2+(h-1)x_3=0$, $(-h^2+h)x_3=1-h^2$ si ha $x_1=-1$, $x_2=(-h^2+1)/h$, $x_3=(h+1)/h$, $x_4=t$, $t\in\boldsymbol{R}$ e quindi $S(h)=\{( -1,(-h^2+1)/h,(h+1)/h,t)|t\in\boldsymbol{R}\}$.

Caso h=1. Risulta $S(1)=(1,0,0,0)+\{(-t_1,0,t_1,t_2)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$ e quindi una soluzione particolare del sistema è (1,0,0,0) mentre l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato è $S_o(1)=\{(-t_1,0,t_1,t_2)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$.

Caso $h\neq0.1$. Risulta $S(h)=(-1,(-h^2+1)/h,(h+1)/h,0)+\{(0,0,0,t)|t\in\boldsymbol{R}\}$ e quindi una soluzione particolare del sistema è $(-1,(-h^2+1)/h,(h+1)/h,0)$ mentre l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato è $S_o(h)=\{(0,0,0,t)|t\in\boldsymbol{R}\}$.

1.2 <u>Spazio vettoriale reale</u> V <u>di dimensione quattro.</u> Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Siano assegnati i vettori $u_1(h)=v_1-v_2+v_3$, $u_2(h)=-v_2+hv_4$, $u_3(h)=hv_1-v_3+hv_4$, essendo h un parametro reale, ed il sottospazio vettoriale $W:x_1+x_2+x_3=0,\ x_3+x_4=0$.

(a) Determinare il valore $h_0$ del parametro h in corrispondenza del quale i vettori $u_1(h)$, $u_2(h)$, $u_3(h)$ risultino linearmente dipendenti.

(b) Posto, per comodità, $u_1=u_1(h_0)$, $u_2=u_2(h_0)$, $u_3=u_3(h_0)$ ed $U=\mathrm{Span}(u_1,u_2,u_3)$, determinare una base e la dimensione di U.

(c) Determinare equazioni cartesiane di U.

(d) Determinare una base e la dimensione di W.

(e) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(f) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(g) Determinare un sottospazio vettoriale U´ supplementare di U entro U+W, ossia tale che risulti $U+W=U\oplus U'$.

*Soluzione*

(a) Imponendo che sia minore di 3 il rango della matrice che ha per colonne le colonne delle coordinate dei vettori $u_1(h)$, $u_2(h)$, $u_3(h)\}$, si ha che tali vettori risultano dipendenti se e soltanto se è $h=-1$, quindi il valore richiesto del parametro h è $h_0=-1$.

(b) Risulta anzitutto $u_1=u_1(-1)=v_1-v_2+v_3$, $u_2=u_2(-1)=-v_2-v_4$, $u_3=u_3(-1)=-v_1-v_3-v_4$. Una coppia di vettori linearmente indipendenti estratti dal sistema di generatori $\{u_1,u_2,u_3\}$ di U è, per esempio quella costituita dai vettori non proporzionali $u_1$, $u_2$. La coppia $B_U=(u_1,u_2)$ costituisce un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti estratti dal sistema di generatori $\{u_1,u_2,u_3\}$ e quindi è una base di U. Pertanto, essendo tale base costituita da due vettori, si ha che risulta $\dim(U)=2$.

(c) Imponendo che sia minore di 3 il rango della matrice che ha per colonne le colonne delle coordinate dei vettori $u_1$, $u_2$, e $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4$, si ha che equazioni cartesiane di U sono, per esempio, $x_1-x_3=0$, $x_1+x_2-x_4=0$.

(d) Il sistema di equazioni lineari omogenee che rappresenta W è a scala. Posto $x_2=t_1$, $x_4=t_2$, si ha subito $x_3=-t_2$, $x_1=-t_1+t_2$, essendo $t_1,t_2\in\boldsymbol{R}$. Allora l'insieme delle soluzioni di tale sistema è $S_o=\{(-t_1+t_2,t_1,-t_2,t_2)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}=\{t_1(-1,1,0,0)+t_2(1,0,-1,1))|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$ e quindi una base di W è $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=-v_1+v_2$, $w_2=v_1-v_3+v_4$, ed è $\dim(W)=2$.

(e) Un sistema di generatori di U+W è $\{u_1,u_2,w_1,w_2\}$. Applicando l'algoritmo di estrazione di una base da tale sistema di generatori si ha che una base di U+W è $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$ e quindi è $\dim(U+W)=3$.

(f) Equazioni cartesiane di $U\cap W$ sono $x_1-x_3=0$, $x_1+x_2-x_4=0$, $x_1+x_2+x_3=0$, $x_3+x_4=0$. Applicando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan, si ha che il sistema di equazioni lineari che rappresenta $U\cap W$ è equivalente al sistema lineare omogeneo a scala $x_1-x_3=0$, $x_2+x_3-x_4=0$, $x_3+x_4=0$. Posto $x_4=t$, tale sistema dà $x_3=-t$, $x_2=2t$, $x_1=-t$, $x_4=t$, essendo $t\in\boldsymbol{R}$. Risulta allora che l'insieme delle soluzioni del sistema è $S_o=\{(-t,2t,-t,t)|t\in\boldsymbol{R}\}=\{t(-1,2,-1,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$ e quindi una base di $U\cap W$ è, per esempio, $B_{U\cap W}=(z)$, essendo $z=-v_1+2v_2-v_3+v_4$, onde è $\dim(U\cap W)=1$.

(g) La base $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$ di U+W, di cui al punto (e), è un ampliamento della base $B_U=(u_1,u_2)$ di U, quindi un sottospazio vettoriale supplementare di U entro U+W è, per esempio, $U'=\mathrm{Span}(w_1)$.

---

2.1. Sia assegnato il sistema lineare, a coefficienti reali, nelle quattro incognite $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$

$$x_1- x_2-x_4=h,\ x_2-hx_4=-h,\ x_1+hx_2-x_4=-1,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali il sistema sia compatibile.

(b) Determinare l'insieme S(h) delle soluzioni del sistema per i valori di h di cui al punto precedente.

(c) Per i valori di h di cui al punto (a) determinare anche una soluzione particolare del sistema e l'insieme $S_o(h)$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

*Soluzione*

Procedendo come in 1.1 si ha:

(a) sistema risulta compatibile per $h\neq0$;

(b) $S(-1)=\{(0,1-t_2,t_1,t_2)|t_1,t_2\epsilon\boldsymbol{R}\}$, $S(h)=\{((h^2-1)/h,-1,t,(h-1)/h)|t\epsilon\boldsymbol{R}\}$ per $h\neq0,-1$;

(c) <u>caso h=-1,</u> una soluzione particolare del sistema è (0,1,0,0,0) e risulta $S_o(-1)=\{(0,-t_2,t_1,t_2)|t_1,t_2\epsilon\boldsymbol{R}\}$;

<u>caso $h\neq0.-1$</u>, una soluzione particolare del sistema è $((h^2-1)/h,-1,0,(h-1)/h)$ e risulta $S_o(h)=\{(0,0,t,0)|t\epsilon\boldsymbol{R}\}$.

2.2 <u>Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro.</u> Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Siano assegnati i vettori $u_1(h)=-v_1+v_2+v_3$, $u_2(h)=v_1+hv_4$, $u_3(h)=hv_2+v_3+hv_4$, essendo h un parametro reale, ed il sottospazio vettoriale $W:x_1+x_2+x_3=0,\ x_3+x_4=0$.

(a) Determinare il valore $h_0$ del parametro h in corrispondenza del quale i vettori $u_1(h)$, $u_2(h)$, $u_3(h)$ risultino linearmente dipendenti.

(b) Posto, per comodità, $u_1=u_1(h_0)$, $u_2=u_2(h_0)$, $u_3=u_3(h_0)$ ed $U=Span(u_1,u_2,u_3)$, determinare una base e la dimensione di U.

(c) Determinare equazioni cartesiane di U.

(d) Determinare una base e la dimensione di W.

(e) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(f) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(g) Determinare un sottospazio vettoriale U´ supplementare di U entro U+W, ossia tale che risulti $U+W=U\oplus U'$.

*Soluzione*

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) $h_0=1$;

(b) $u_1=u_1(1)=-v_1+v_2+v_3$, $u_2=u_2(1)=v_1+v_4$, $u_3=u_3(1)=v_2+v_3+v_4$, $B_U=(u_1,u_2)$, dim(U)=2;

(c) equazioni cartesiane di U sono, per esempio, $x_2-x_3=0$, $x_1+x_2-x_4=0$;

(d) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=-v_1+v_2$, $w_2=v_1-v_3+v_4$, dim(W)=2;

(e) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$, dim(U+W)=3;

(f) $B_{U\cap W}=(z)$, essendo $z=2v_1-v_2-v_3+v_4$, $\dim(U\cap W)=1$;

(g) $U'=Span(w_1)$.

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

3.1. Sia assegnato il sistema, a coefficienti reali, nelle quattro incognite $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$

$$x_1 - x_3+x_4=h,\ hx_1+x_4=h,\ x_1-x_3+hx_4=1,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali il sistema sia compatibile.
(b) Determinare l'insieme S(h) delle soluzioni del sistema per i valori di h di cui al punto precedente.
(c) Per i valori di h di cui al punto (a) determinare anche una soluzione particolare del sistema e l'insieme $S_o(h)$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

(d) *Soluzione*

Procedendo come in 1.1 si ha:

(a) sistema risulta compatibile per $h\neq0$;
(b) $S(1)=\{(1-t_2,t_1,0,t_2)|t_1,t_2\epsilon\boldsymbol{R}\}$, $S(h)=\{((h+1)/h,t,(-h^2+1)/h,-1)|t\epsilon\boldsymbol{R}\}$ per $h\neq0,1$;
(c) caso h=1, una soluzione particolare del sistema è (1,0,0,0,0) e risulta $S_o(1)=\{(-t_2,t_1,0,t_2)|t_1,t_2\epsilon\boldsymbol{R}\}$;
caso $h\neq0.-1$, una soluzione particolare del sistema è $((h+1)/h,0,(-h^2+1)/h,-1)$ e risulta $S_o(h)=\{(0,t,0,0)|t\epsilon\boldsymbol{R}\}$.

3.2 Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Siano assegnati i vettori $u_1(h)=v_1-v_2+v_3$, $u_2(h)=-v_2+hv_4$, $u_3(h)=-v_1+hv_3+hv_4$, essendo h un parametro reale, ed il sottospazio vettoriale $W:x_1+x_2+x_3=0,\ x_1+x_4=0$.

(a) Determinare il valore $h_0$ del parametro h in corrispondenza del quale i vettori $u_1(h)$, $u_2(h)$, $u_3(h)$ risultino linearmente dipendenti.
(b) Posto, per comodità, $u_1=u_1(h_0)$, $u_2=u_2(h_0)$, $u_3=u_3(h_0)$ ed $U=Span(u_1,u_2,u_3)$, determinare una base e la dimensione di U.
(c) Determinare equazioni cartesiane di U.
(d) Determinare una base e la dimensione di W.
(e) Determinare una base e la dimensione di U+W.
(f) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.
(g) Determinare un sottospazio vettoriale U´ supplementare di U entro U+W, ossia tale che risulti $U+W=U\oplus U'$.

*Soluzione*

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) $h_0=-1$;
(b) $u_1=u_1(1)=v_1-v_2+v_3$, $u_2=u_2(1)=-v_2-v_4$, $u_3=u_3(1)=-v_1-v_3-v_4$, $B_U=(u_1,u_2)$, dim(U)=2;
(c) equazioni cartesiane di U sono, per esempio, $x_1-x_3=0$, $x_1+x_2-x_4=0$;
(d) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=-v_2+v_3$, $w_2=-v_1+v_2+v_4$, dim(W)=2;
(e) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$, dim(U+W)=3;
(f) $B_{U\cap W}=(z)$, essendo $z=-v_1+2v_2-v_3+v_4$, $\dim(U\cap W)=1$;
(g) $U'=Span(w_1)$.

-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

4.1. Sia assegnato il sistema lineare, a coefficienti reali, nelle quattro incognite $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$

$$x_2+x_3-x_4=-h,\ x_2-hx_3=-h,\ hx_2-x_3+x_4=-1,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali il sistema sia compatibile.
(b) Determinare l'insieme S(h) delle soluzioni del sistema per i valori di h di cui al punto precedente.
(c) Per i valori di h di cui al punto (a) determinare anche una soluzione particolare del sistema e l'insieme $S_o(h)$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

*Soluzione*

Procedendo come in 1.1 si ha:
(a) il sistema risulta compatibile per $h\neq0$;
(b) $S(-1)=\{(t_1,1-t_2,t_2,0)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$, $S(h)=\{(t,-1,(h-1)/h,(h^2-1)/h)|t\in\boldsymbol{R}\}$ per $h\neq0,-1$;
(c) caso h=-1, una soluzione particolare del sistema è (0,1,0,0,0) e risulta $S_o(-1)=\{(t_1,-t_2,t_2,0)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$;
caso $h\neq0.-1$, una soluzione particolare del sistema è $(0,-1,(h-1)/h,(h^2-1)/h\ )$ e risulta $S_o(h)=\{(t,0,0,0)|t\in\boldsymbol{R}\}$.

4.2 Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Siano assegnati i vettori $u_1(h)=-v_2+v_3+v_4$, $u_2(h)=hv_1+v_2$, $u_3(h)=hv_1+v_3+hv_4$, essendo h un parametro reale, ed il sottospazio vettoriale $W:x_2+x_3+x_4=0,\ x_1+x_3=0$.
(a) Determinare il valore $h_0$ del parametro h in corrispondenza del quale i vettori $u_1(h)$, $u_2(h)$, $u_3(h)$ risultino linearmente dipendenti.
per comodità, $u_1=u_1(h_0)$, $u_2=u_2(h_0)$, $u_3=u_3(h_0)$ ed $U=Span(u_1,u_2,u_3)$, determinare una base e la dimensione di U.
(c) Determinare equazioni cartesiane di U.
(d) Determinare una base e la dimensione di W.
(e) Determinare una base e la dimensione di U+W.
(f) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.
(g) Determinare un sottospazio vettoriale U´ supplementare di U entro U+W, ossia tale che risulti $U+W=U\oplus U'$.

*Soluzione*

Procedendo come in 1.2, si ha:
(a) $h_0=1$;
(b) $u_1=u_1(1)=-v_2+v_3+v_4$, $u_2=u_2(1)=v_1+v_2$, $u_3=u_3(1)=v_1+v_3+v_4$, $B_U=(u_1,u_2)$, dim(U)=2;
(c) equazioni cartesiane di U sono, per esempio, $x_3-x_4=0$, $x_1-x_2-x_4=0$;
(d) $B_W=(w_1,w_2)$, essendo $w_1=-v_1-v_2+v_3$, $w_2=-v_2+v_4$, dim(W)=2;
(e) $B_{U+W}=(u_1,u_2,w_1)$, dim(U+W)=3;
(f) $B_{U\cap W}=(z)$, essendo $z=-v_1-2v_2+v_3+v_4$, $\dim(U\cap W)=1$;
(g) $U'=Span(w_1)$.