ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Prova scritta del 2–12-2010

1.1. Spazio vettoriale $V=M_2(\boldsymbol{R})$ delle matrici quadrate reali del secondo ordine. Sia assegnata la matrice quadrata M avente come elementi $m_{11}=1$, $m_{12}=1$, $m_{21}=1$, $m_{22}=1$ e si indichino con x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} gli elementi della matrice X variabile in V.

(a) Verificare che il sottoinsieme $U=\{X\in V \mid MX=XM\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

(b) Determinare una base e la dimensione dei sottospazi vettoriali U e $W: x_{11}-x_{21}=0,\ x_{12}-x_{22}=0$.

(c) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.

(e) Determinare un sottospazio vettoriale Z supplementare di $U\cap W$ entro V.

Soluzione

(a) Eseguiti i prodotti di matrici MX e XM, la condizione richiesta affinché la matrice X appartenga ad U dà $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$. Allora le equazioni $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$ si possono interpretare come equazioni cartesiane di U rispetto alla base canonica $B_V=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ di V. Ma tali equazioni sono lineari e omogenee e quindi U è un sottospazio vettoriale di V.

(b) Il sistema di equazioni lineari omogenee che rappresenta U è a scala con incognite libere x_{21}, x_{22}. Posto $x_{21}=t_1$ $x_{22}=t_2$, essendo t_1, t_2 parametri reali, si ha $x_{12}=t_1$ $x_{11}=t_2$. Allora l'insieme delle soluzioni del sistema è $S_o=\{(t_2,t_t,t_1,t_2) \mid (t_1,t_2)\in \boldsymbol{R}\}$. Considerate le matrici linearmente indipendenti A e B che si ottengono ponendo, rispettivamente, $(t_1,t_2)=(1,0)$ e $(t_1,t_2)=(0,1)$ e quindi aventi come elementi $a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$ e $b_{11}=1$, $b_{12}=0$, $b_{21}=0$, $b_{22}=1$, risulta $U=\{t_1A+t_2B \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$. Pertanto una base di U è, per esempio, $B_U=(A,B)$, onde si ha $\dim(U)=2$.

Procedendo per W come nel caso di U, si ha che l'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni lineari omogenee, che rappresenta W, è $S_o=\{(t_1,t_2,t_1,t_2) \mid (t_1,t_2)\in \boldsymbol{R}\}$. Allora, considerate le matrici linearmente indipendenti C e D che si ottengono ponendo, rispettivamente, $(t_1,t_2)=(1,0)$ e $(t_1,t_2)=(0,1)$ e quindi aventi come elementi $c_{11}=1$, $c_{12}=0$, $c_{21}=1$, $c_{22}=0$ e $d_{11}=0$, $d_{12}=1$, $d_{21}=0$, $d_{22}=1$, risulta $U=\{t_1C+t_2D \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$. Pertanto una base di W è, per esempio $B_W=(C,D)$, onde risulta $\dim(W)=2$.

(c) Un sistema di generatori di U+W è, per esempio $\{A,B,C,D\}$. L'algoritmo di Gauss Jordan per l'estrazione di una base, applicato a tale sistema di generatori, dà la base $B_{U+W}=(A,B,C)$ di U+W, onde è $\dim(U+W)=3$.

(d) Equazioni cartesiane di $U\cap W$ sono, per esempio, $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$, $x_{11}-x_{21}=0$, $x_{12}-x_{22}=0$. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss Jordan, si ha che il sistema costituito da tali equazioni risulta equivalente al sistema a scala $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$, $-x_{21}+x_{22}=0$, che dà $x_{11}=t$, $x_{12}=t$, $x_{21}=t$, $x_{22}=t$, essendo t un parametro reale. Essendo $S_o=\{(t,t,t,t) | t\in \boldsymbol{R}\}$ l'insieme delle soluzioni del sistema, si ha che una base $B_{U\cap W}$ di $U\cap W$ è, per esempio, quella costituita dalla matrice avente tutti gli elementi uguali ad 1, ossia da M, e quindi è $\dim(U\cap W)=1$.
(e) Le matrici M, E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} costituiscono un sistema di generatori di V. Applicando a tale sistema di generatori l'algoritmo di Gauss Jordan per l'estrazione di una base, si ha che una base che completa la base $B_{U\cap W}=(M)$ di $U\cap W$ in una base di V è quella costituita dalle matrici M, E_{11}, E_{12}, E_{21}. Allora $Z=\mathrm{Span}(E_{11},E_{12},E_{21})$ è un sottospazio vettoriale supplementare di $U\cap W$ entro V.

1.2. <u>Spazio vettoriale reale</u> V <u>di dimensione quattro.</u> Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari
$x_1-x_3-x_4=k$, $2x_1+(k-1)x_4=2k$, $(k-1)x_1+(k-1)x_3+(1-k)x_4=0$,
essendo k un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro k in corrispondenza dei quali il sistema lineare di cui sopra si può interpretare come sistema di equazioni cartesiane, rispetto alla base B_V, di una sottovarietà lineare affine $U'(k)$ di V.
(b) In corrispondenza dei valori del parametro k, di cui al punto (a), determinare un vettore $v_0(k)\in U'(k)$ ed il sottospazio vettoriale $U(k)$ parallelo a $U'(k)$.
(c) Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale $U(k)$.
(d) Determinare la dimensione della sottovarietà lineare affine $U'(k)$.

Soluzione

(a) I valori del parametro k, in corrispondenza dei quali il sistema rappresenta, rispetto alla base B_V, una sottovarietà lineare affine $U'(k)$ dello spazio vettoriale V, sono quelli per cui tale sistema risulti compatibile. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss Jordan, si ha che il sistema assegnato risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare $x_1-x_3-x_4=k$, $2x_3+(k+1)x_4=0$, $(k-1)(k+1)x_4=-k(k-1)$, che è a scala. Tale sistema è compatibile se e soltanto se è $k\neq-1$.
(b) Sia $k\neq-1$. Osserviamo anzitutto che per $k=1$ il sistema a scala compatibile $x_1-x_3-x_4=k$, $2x_3+(k+1)x_4=0$, $(k-1)(k+1)x_4=-k(k-1)$ diventa $x_1-x_3-x_4=1$, $2x_3+2x_4=0$, $0=0$. Risolviamo allora separatamente i due casi $k\neq1$ e $k=1$. Iniziamo dal caso $k\neq1$. Il sistema ha x_2 come unica incognita libera. Poniamo $x_2=t$, essendo t un parametro reale. Si ha subito $x_4=k/(k+1)$, $x_3=-k/2$, $x_1=k(k+3)/(2(k+1))$. L'insieme delle soluzioni del

sistema è allora $S(k)=\{k(k+3)/(2(k+1)),t,-k/2,k/(k+1) \mid t\in \boldsymbol{R}\}=$ $=(k(k+3)/(2(k+1)).0,-k/2,k/(k+1))+\{(0,t,0,0,0) \mid t\in \boldsymbol{R}\}$, onde è $v_0(k)=(k(k+3)/(2(k+1)))v_1-(k/2)v_3+(k/(k+1))v_4$ ed $U(k)=\{tv_2 \mid t\in \boldsymbol{R}\}$.
Analizziamo ora il caso di k=1. Il sistema in questo caso risulta equivalente al sistema a scala $x_1-x_3-x_4=1$, $2x_3+2x_4=0$ con incognite libere x_2 e x_4. Posto $x_2=t_1$ e $x_4=t_2$, si ha subito $x_3=-t_2$, $x_1=1$, onde è $S(1)=\{(1,t_1,-t_2,t_2) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}=(1,0,0,0)+\{(0,t_1,-t_2,t_2) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi si ha $v_0(1)=v_1$ e $U(1)=\{t_1v_2+t_2(-v_3+v_4) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$.
(c) Per $k\neq-1,1$ è $U(k)=\{tv_2 \mid t\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi una base di U(k) è quella costituita dal solo vettore v_2 onde risulta $\dim(U(k))=1$. Per k=1, essendo $U(1)=\{t_1v_2+t_2(-v_3+v_4) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$, si ha che una base di U(1) è, per esempio, quella costituita dai due vettori v_2 e $-v_3+v_4$, onde è $\dim(U(1))=2$.
(d) La dimensione di una sottovarietà lineare affine per definizione è uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale ad essa parallelo. Allora risulta $\dim(U'(k))=\dim(U(k))=1$, se $k\neq-1,1$, e $\dim(U'(1))=\dim(U(1))=2$.

2.1. <u>Spazio vettoriale $V=M_2(R)$ delle matrici quadrate reali del secondo ordine.</u> Sia assegnata la matrice quadrata M avente come elementi $m_{11}=1$, $m_{12}=-1$, $m_{21}=-1$, $m_{22}=1$ e si indichino con x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} gli elementi della matrice X variabile in V.

(a) Verificare che il sottoinsieme $U=\{X\in V \mid MX=XM\}$ è un sottospazio vettoriale di V.
(b) Determinare una base e la dimensione dei sottospazi vettoriali U e $W: x_{11}-x_{12}=0,\ x_{21}-x_{22}=0$.
(c) Determinare una base e la dimensione di U+W.
(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.
(e) Determinare un sottospazio vettoriale Z supplementare di $U\cap W$ entro V.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:
(a) U: $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$ e quindi U è un sottospazio vettoriale di V;
(b) $B_U=(A,B)$, essendo $a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$ e $b_{11}=1$, $b_{12}=0$, $b_{21}=0$, $b_{22}=1$; $\dim(U)=2$. $B_W=(C,D)$, essendo $c_{11}=1$, $c_{12}=1$, $c_{21}=0$, $c_{22}=0$ e $d_{11}=0$, $d_{12}=0$, $d_{21}=1$, $d_{22}=1$; $\dim(W)=2$.
(c) $B_{U+W}=(A,B,C)$, $\dim(U+W)=3$;
(d) $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dalla sola matrice N avente tutti gli elementi uguali ad 1; $\dim(U\cap W)=1$;
(e) $Z=\mathrm{Span}(E_{11},E_{12},E_{21})$.

2.2. <u>Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro.</u> Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari

$x_1-x_2-x_4=k+1$, $2x_1+kx_2=2(k+1)$, $(k+1)x_1-(k+1)x_2+(k-1)x_4=k+1$, essendo k un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro k in corrispondenza dei quali il sistema lineare di cui sopra si può interpretare come sistema di equazioni cartesiane di una sottovarietà lineare affine $U'(k)$ di V.

(b) In corrispondenza dei valori del parametro k, di cui al punto (a), determinare un vettore $v_0(k) \in U'(k)$ ed il sottospazio vettoriale $U(k)$ parallelo a $U'(k)$.

(c) Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale $U(k)$.

(d) Determinare la dimensione della sottovarietà lineare affine $U'(k)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:

(a) il sistema rappresenta una sottovarietà lineare affine se e soltanto se è $k \neq -2$;

(b) per $k \neq -2,0$ un vettore appartenente a $U'(k)$ è, per esempio, $v_0(k)=((k+1)(k+4)/(2(k+2)))v_1+((k+1)/(k+2))v_2-((k+1)/2)v_4$ ed è $U(k)=\{tv_3 \mid t \in \mathbf{R}\}$.

Per k=0, si ha, per esempio, $v_0(0)=v_1$ ed è $U(0)=\{t_1v_3+t_2(-v_2+v_4) \mid t_1,t_2 \in \mathbf{R}\}$.

(c) per $k \neq -2,0$ è $U(k)=\{tv_3 \mid t \in \mathbf{R}\}$ e quindi una base di $U(k)$ è, per esempio, quella costituita dal solo vettore v_3 onde risulta $\dim(U(k))=1$. Per k=0, essendo $U(0)=\{t_1v_3+t_2(-v_2+v_4) \mid t_1,t_2 \in \mathbf{R}\}$, si ha che una base di $U(0)$ è, per esempio, quella costituita dai due vettori v_3 e $-v_2+v_4$ e quindi è $\dim(U(0))=2$.

(d) Risulta $\dim(U'(k))=\dim(U(k))=1$ per $k \neq -2,0$ e $\dim(U'(0))=\dim(U(0))=2$.

3.1. Spazio vettoriale $V=M_2(R)$ delle matrici quadrate reali del secondo ordine. Sia assegnata la matrice quadrata M avente come elementi $m_{11}=-1$, $m_{12}=-1$, $m_{21}=-1$, $m_{22}=-1$ e si indichino con x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} gli elementi della matrice X variabile in V.

(a) Verificare che il sottoinsieme $U=\{X \in V \mid MX=XM\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

(b) Determinare una base e la dimensione dei sottospazi vettoriali U e $W: x_{11}+x_{21}=0,\ x_{12}+x_{22}=0$.

(c) Determinare una base e la dimensione di U+W.

(d) Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$.

(e) Determinare un sottospazio vettoriale Z supplementare di $U \cap W$ entro V.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:

(a) U: $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$ e quindi U è un sottospazio vettoriale di V;

(b) $B_U=(A,B)$, essendo $a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$ e $b_{11}=1$, $b_{12}=0$, $b_{21}=0$, $b_{22}=1$; $\dim(U)=2$. $B_W=(C,D)$, essendo $c_{11}=-1$, $c_{12}=0$, $c_{21}=1$, $c_{22}=0$ e $d_{11}=0$, $d_{12}=-1$, $d_{21}=0$, $d_{22}=1$; $\dim(W)=2$.
(c) $B_{U+W}=(A,B,C)$, $\dim(U+W)=3$;
(d) $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dalla sola matrice N, essendo $n_{11}=1$, $n_{12}=-1$, $n_{21}=-1$, $n_{22}=1$; $\dim(U\cap W)=1$;
(e) $Z=\mathrm{Span}(E_{11},E_{12},E_{21})$.

<u>3.2. Spazio vettoriale reale</u> V <u>di dimensione quattro.</u> Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari
$x_1-x_2-x_3=k-1$, $2x_1+(k-2)x_3=2(k-1)$, $(k-1)x_1+(k-3)x_2+(1-k)x_3=k-1$,
essendo k un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro k in corrispondenza dei quali il sistema lineare di cui sopra si può interpretare come sistema di equazioni cartesiane di una sottovarietà lineare affine $U'(k)$ di V.
(b) In corrispondenza dei valori del parametro k, di cui al punto (a), determinare un vettore $v_0(k)\in U'(k)$ ed il sottospazio vettoriale $U(k)$ parallelo a $U'(k)$.
(c) Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale $U(k)$.
(d) Determinare la dimensione della sottovarietà lineare affine $U'(k)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:
(a) il sistema rappresenta una sottovarietà lineare affine se e soltanto se è $k\neq 0$;
(b) per $k\neq 0,2$ un vettore appartenente a $U'(k)$ è, per esempio, $v_0(k)=((k-1)(k+2)/(2k))v_1+((1-k)/2)v_2+((k-1)/k)v_3$ ed è $U(k)=\{tv_4 \mid t\in \boldsymbol{R}\}$.
Per $k=2$, si ha, per esempio, $v_0(2)=v_1$ ed è $U(2)=\{t_1(-v_2+v_3)+t_2v_4 \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$.
(c) per $k\neq 0,2$ è $U(k)=\{tv_4 \mid t\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi una base di $U(k)$ è, per esempio, quella costituita dal solo vettore v_4 onde risulta $\dim(U(k))=1$. Per $k=2$, essendo $U(2)=\{t_1(-v_2+v_3)+t_2v_4 \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$, si ha che una base di $U(2)$ è, per esempio, quella costituita dai due vettori $-v_2+v_3$ e v_4 onde risulta $\dim(U(2))=2$.
(d) Risulta $\dim(U'(k))=\dim(U(k))=1$ per $k\neq 0,2$ e $\dim(U'(2))=\dim(U(2))=2$.

<u>4.1. Spazio vettoriale $V=M_2(R)$ delle matrici quadrate reali del secondo ordine.</u> Sia assegnata la matrice quadrata M avente come elementi $m_{11}=-1$, $m_{12}=1$, $m_{21}=1$, $m_{22}=-1$ e si indichino con x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} gli elementi della matrice X variabile in V.

(a) Verificare che il sottoinsieme $U=\{X\in V \mid MX=XM\}$ è un sottospazio vettoriale di V.
(b) Determinare una base e la dimensione dei sottospazi vettoriali U e $W: x_{11}+x_{12}=0,\ x_{21}+x_{22}=0$.
(c) Determinare una base e la dimensione di U+W.
(d) Determinare una base e la dimensione di $U\cap W$.
(e) Determinare un sottospazio vettoriale Z supplementare di $U\cap W$ entro V.

Soluzione

Procedendo come in 1.1, si ha:
(a) U: $x_{11}-x_{22}=0$, $x_{12}-x_{21}=0$ e quindi U è un sottospazio vettoriale di V;
(b) $B_U=(A,B)$, essendo $a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$ e $b_{11}=1$, $b_{12}=0$, $b_{21}=0$, $b_{22}=1$; dim(U)=2. $B_W=(C,D)$, essendo $c_{11}=-1$, $c_{12}=1$, $c_{21}=0$, $c_{22}=0$ e $d_{11}=0$, $d_{12}=0$, $d_{21}=-1$, $d_{22}=1$; dim(W)=2.
(c) $B_{U+W}=(A,B,C)$, dim(U+W)=3;
(d) $B_{U\cap W}$ costituita, per esempio, dalla sola matrice N, essendo $n_{11}=1$, $n_{12}=-1$, $n_{21}=-1$, $n_{22}=1$; $\dim(U\cap W)=1$;
(e) $Z=Span(E_{11},E_{12},E_{21})$.

<u>4.2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro.</u> Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnato il sistema di equazioni lineari
$x_2-x_3-x_4=k+2$, $x_2+x_3+(k+2)x_4=k+2$, $(k+1)x_2+(k+1)x_3-(k+1)x_4=0$,
essendo k un parametro reale.
(a) Determinare i valori del parametro k in corrispondenza dei quali il sistema lineare di cui sopra si può interpretare come sistema di equazioni cartesiane di una sottovarietà lineare affine $U'(k)$ di V.
(b) In corrispondenza dei valori del parametro k di cui al punto (a), determinare un vettore $v_0(k)\in U'(k)$ ed il sottospazio vettoriale U(k) parallelo a $U'(k)$.
(c) Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale U(k).
(d) Determinare la dimensione della sottovarietà lineare affine $U'(k)$.

Soluzione

Procedendo come in 1.2, si ha:
(a) il sistema rappresenta una sottovarietà lineare affine se e soltanto se è $k\neq-3$;
(b) per $k\neq-3,-1$ un vettore appartenente a $U'(k)$ è, per esempio, $v_0(k)=((k+2)(k+5)/(2(k+3)))v_2-((k+2)/2)v_3+((k+2)/(k+3))v_4$ ed è $U(k)=\{tv_1 \mid t\in \boldsymbol{R}\}$.
Per k=-1, si ha, per esempio, $v_0(-1)=v_2$ ed è $U(-1)=\{t_1v_1+t_2(-v_3+v_4) \mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$.
(c) per $k\neq-3,-1$ è $U(k)=\{tv_1 \mid t\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi una base di U(k) è, per esempio, quella costituita dal solo vettore v_1 onde risulta $\dim(U(k))=1$.

Per $k=-1$, essendo $U(-1)=\{t_1v_1+t_2(-v_3+v_4)\mid t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$, si ha che una base di $U(-1)$ è, per esempio, quella costituita dai due vettori v_1 e $-v_3+v_4$ e quindi è $\dim(U(-1))=2$.

(d) Risulta $\dim(U'(k)))=\dim(U(k))=1$ per $k\neq-3,-1$ e $\dim(U'(-1)))=\dim(U(-1))=2$.