ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Ca)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 19–1-2015

1.1 Spazio affine ordinario. RA(O;i,j,k).

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano p passante per l'origine O e per i punti A(0,1,1) e B(1,0,2).

(b) Scrivere equazioni cartesiane del fascio *F* di rette, sul piano p, avente come centro il punto A.

(c) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r_1 appartenente al fascio *F* e parallela al piano q:2x+y+3=0.

(d) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r_2 passante per il punto C(1,1,0) e parallela ai piani p_1:x-y+z-1=0 e p_2:x+y-z+1=0.

(e) Verificare che le rette r_1 e r_2 sono sghembe.

(f) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r_3 incidente le rette r_1 e r_2 e parallela all'asse y.

(g) Verificare che ogni terna di vettori direttori (v_1,v_2,v_3) rispettivamente delle rette r_1, r_2, r_3, costituisce una base per lo spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario.

Soluzione

(a) Imponendo che la matrice avente come righe rispettivamente (x,y,z), (0,1,1) e (1,0,2) abbia determinante nullo, si ha che l'equazione cartesiana del piano p è 2x+y-z=0.

(b) Una retta r passante per il punto A e non contenuta nel piano p è, per esempio, la retta di equazioni in forma di rapporti uguali x/2=(y-1)/1=(z-1)/(-1). Infatti tale retta passa per il punto A e non è contenuta nel piano p giacché essa non è parallela a p essendo $2\cdot2+1\cdot1+(-1)\cdot(-1)=6\neq0$. Dall'equazione in forma di rapporti uguali di r si traggono, per esempio, le equazioni cartesiane x+2z-2=0, y+z-2=0. Allora equazioni cartesiane del fascio *F* di rette di centro A, su p, sono, per esempio, x+2z-2+h(y+z-2)=0, 2x+y-z=0, ossia x+hy+(2+h)z-2-2h=0, 2x+y-z=0, essendo h un parametro reale.

(c) Parametri direttori della retta generica del fascio *F* sono, per esempio, l_h=-2-2h, m_h=5+2h, n_h=1-2h. Essendo (2,1,0) coefficienti di giacitura del piano q, si ha che la condizione di parallelismo retta-piano dà $2\cdot(-2-2h)+1\cdot(5+2h)+0\cdot(1-2h)=0$, ovvero 1-2h=0 da cui si trae h=1/2. Pertanto equazioni cartesiane della retta r_1 sono, per esempio, 2x+y+5z-6=0, 2x+y-z=0. Risolvendo tale sistema, si ha che equazioni parametriche di r_1 sono, per esempio, $x=t_1$, $y=1-2t_1$, $z=1$, $t_1\in\boldsymbol{R}$.

(d) La retta r_2 può essere ottenuta come intersezione dei piani p_1' e p_2' passanti per il punto C e paralleli, rispettivamente, ai piani p_1 e p_2. Essendo p_1':$1\cdot(x-1)+(-1)\cdot(y-1)+1\cdot(z-0)=0$ e p_2':$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+(-1)\cdot(z-0)=0$, ossia p_1':x-y+z=0 e p_2':x+y-z-2=0, si ha allora che equazioni cartesiane di r_2 sono, per esempio, x-y+z=0, x+y-z-2=0. Risolvendo il sistema di tali equazioni, si ha che equazioni parametriche di r_2 sono, per esempio, $x=1$, $y=1+t_2$, $z=t_2$, $t_2\in\boldsymbol{R}$. (e) La matrice quadrata che ha come righe, rispettivamente, (2,1,5,-6), (2,1,-1,0), (1,-1,1,0), (1,1,-1,-2) ha determinante uguale a $24\neq0$ e quindi le rette r_1 e r_2 sono sghembe.

(f) Tenuto conto delle equazioni parametriche delle rette r_1 e r_2, si ha che un punto generico di r_1 è $P_1(t_1)\equiv(t_1,1-2t_1,1)$, $t_1\in\boldsymbol{R}$ e che un punto generico di r_2 è $P_2(t_2)\equiv(1,1+t_2,t_2)$, $t_2\in\boldsymbol{R}$. Allora una retta generica incidente le rette r_1 e r_2 può essere ottenuta come retta passante per i punti $P_1(t_1)$ e $P_2(t_2)$. Equazioni in forma di rapporti uguali di tale retta sono allora $(x-t_1)/(1-t_1)=(y-1+2t_1)/(1+t_2-1+2t_1)=(z-1)/(t_2-1)$, dove i denominatori $1-t_1$, t_2+2t_1, t_2-1 hanno il significato di parametri direttori. Essendo (0,1,0) parametri direttori dell'asse y, la condizione di parallelismo tra rette dà $1-t_1=0$, $t_2-1=0$ e quindi $t_1=1$, $t_2=1$. Pertanto equazioni in forma di rapporti uguali della retta r_3 sono $(x-1)/0=(y+1)/3=(z-1)/0$. Allora equazioni cartesiane di r_3 sono, per esempio, $x-1=0$, $z-1=0$ mentre equazioni parametriche di r_3 sono, per esempio, $x=1$, $y=-1+3t_3$, $z=1$, $t_3\in\boldsymbol{R}$.

(f) Dalle equazioni delle rette r_1, r_2, r_3 si trae immediatamente che parametri direttori di tali rette sono, rispettivamente, $(l_1,m_1,n_1)=(1,-2,0)$, $(l_2,m_2,n_2)=(0,1,1)$, $(l_3,m_3,n_3)=(0,3,0)$. Pertanto vettori direttori di r_1, r_2, r_3 sono rispettivamente $v_1\equiv(\rho_1,-2\rho_1,0)$, $v_2\equiv(0,\rho_2,\rho_2)$, $v_3\equiv(0,3\rho_3,0)$, essendo ρ_1, ρ_2, $\rho_3\in\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$. La matrice che ha per colonne le colonne delle coordinate rispettivamente di v_1, v_2, v_3 ha determinante uguale a $-3\rho_1\rho_2\rho_3\neq0$ per ogni ρ_1, ρ_2, $\rho_3\in\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$. Allora ogni terna di vettori direttori v_1, v_2, v_3, rispettivamente delle rette r_1, r_2, r_3, è una terna di vettori linearmente indipendenti e quindi, essendo $\dim(V)=3$, è una base di V.

1.2 <u>Spazio vettoriale numerico</u> $V=\boldsymbol{R}^4$. <u>Base canonica</u> $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$, Sia assegnato l'endomorfismo $F_h:V\to V$, tale che $F_h(v)=(x_1+(h-1)x_4,-x_2,-2x_1-x_3,2x_1+2x_3+2x_4)$, essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ed h un parametro reale.

(a) Scrivere la matrice A_h associata all'endomorfismo F_h rispetto alla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ di V.

(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'endomorfismo F_h ammetta lo scalare 2 come autovalore.

(c) Indicato semplicemente con F l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 del parametro h, di cui al punto precedente, ed indicata con A la matrice associata ad F, determinare gli autovalori dell'endomorfismo F, indicando per ciascuno di essi la rispettiva molteplicità algebrica.

(d) Verificare che l'endomorfismo F è diagonalizzabile, giustificando la risposta.

(e) Determinare una base $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ di autovettori rispetto ad F.

(f) Determinare la matrice diagonale A' associata all'endomorfismo F rispetto alla base $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ di autovettori ed una matrice invertibile C tale che risulti $A'=C^{-1}AC$.

(g) Verificare che F è un automorfismo e scrivere l'espressione di $F^{-1}(v)$ rispetto alla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$.

Soluzione

(a) La matrice A_h associata all'endomorfismo F_h rispetto alla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$, di V ha come righe $A_h^{(1)}=(1,0,0,h-1)$, $A_h^{(2)}=(0,-1,0,0)$, $A_h^{(3)}=(-2,0,-1,0)$, $A_h^{(4)}=(2,0,2,2)$.

(b)L'equazione caratteristica dell'endomorfismo F_h è $\det(A_h-\lambda I)=0$, ossia $(1-\lambda)(1+\lambda)^2(2-\lambda)-(h-1)\,(2(1+\lambda)^2-4(1+\lambda))=0$. Tale equazione ammette come soluzione $\lambda=2$ se e soltanto se risulta $h=1$. Pertanto è $h_0=1$.

(c) Ponendo $h=h_0=1$ nell'equazione caratteristica dell'endomorfismo F_h,, si ha che l'equazione caratteristica dell'endomorfismo F è $(1-\lambda)(1+\lambda)^2(2-\lambda)=0$. Pertanto gli autovalori di F sono $\lambda_1=-1$, con molteplicità algebrica $a_1=2$, $\lambda_2=1$, con molteplicità algebrica $a_2=1$ e $\lambda_3=2$, con molteplicità algebrica $a_3=1$.

(d) Essendo 4 la dimensione di V e risultando $a_1+a_2+a_3=4$, si ha che l'endomorfismo F è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica g_1 dell'autovalore λ_1 è uguale ad a_1, la molteplicità geometrica g_2 dell'autovalore λ_2 è uguale ad a_2 e la molteplicità geometrica g_3 dell'autovalore λ_3 è uguale ad a_3. Orbene, essendo $a_2=1$, $a_3=1$, sono senz'altro soddisfatte le condizioni $g_2=a_2$ e $g_3=a_3$. Dimostriamo che è anche $g_1=a_1=2$. Sia V_{-1} l'autospazio associato all'autovalore λ_1=-1. Equazioni cartesiane di V_{-1} sono $2x_1=0$, $0=0$, $-2x_1=0$, $2x_1+2x_3+3x_4=0$ e quindi risulta $V_{-1}=\{t_1(0,1,0,0)+t_2(0,0,3,-2)|t_1,t_2\in \boldsymbol{R}\}$. Una base di V_{-1} è costituita dagli autovettori $v_1'=(0,1,0,0)$, $v_2'=(0,0,3,-2)$ onde risulta $g_1=\dim(V_{-1})=2=a_1$ e quindi F è diagonalizzabile.

(e) Si ha V_1:$0=0$, $-2x_2=0$, $-2x_1-2x_3=0$, $2x_1+2x_3+x_4=0$ e quindi è $V_1=\{t(-1,0,1,0)|t\in \boldsymbol{R}\}$. Una base di V_1 è costituita dal solo autovettore v_3'=(-1,01,0,). Si ha poi V_2: $-x_1=0$, $-3x_2=0$, $-2x_1-3x_3=0$, $2x_1+2x_3=0$ e quindi è $V_2=\{t(0,0,0,1)|t\in \boldsymbol{R}\}$. Una base di V_2 è costituita dal solo autovettore $v_4'=(0,0,0,1)$. Allora una base di $V=\boldsymbol{R}^4$, costituita da autovettori rispetto all'endomorfismo F, è, per esempio, $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$, essendo v_1' ,v_2', v_3', v_4' gli autovettori appena determinati.

(f) La matrice A′ associata all'endomorfismo F rispetto alla base di autovettori $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ è la matrice diagonale avente $a_{11}'= a_{22}'=\lambda_1=-1$, $a_{33}'=\lambda_2=1$ e $a_{44}'=\lambda_3= 2$. Una matrice invertibile C tale che risulti $A'=C^{-1}AC$ è, per esempio, la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ alla base di autovettori $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$, ossia la matrice avente come righe $C^{(1)}=(0,0,-1,0)$, $C^{(2)}=(1,0,0,0)$, $C^{(3)}=(0,3,1,0)$, $C^4=(0,-2,0,1)$.

(g) La matrice A associata all'endomorfismo F rispetto alla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ ha determinante uguale a $2\neq0$ e quindi, risultando rg(A)=4=dim(V), l'endomorfismo F è un automorfismo. L'automorfismo inverso F^{-1} ha come matrice associata, rispetto alla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$, la matrice A^{-1}. Risulta subito che le righe della matrice A^{-1} sono rispettivamente (1,0,0,0), (0,-1,0,0), (-2,0,-1,0), (1,0,1,1/2). Allora l'espressione richiesta di $F^{-1}(v)$ è data da $F^{-1}(v)=(x_1,-x_2,-2x_1-x_3,x_1+x_3+(1/2)x_4)$.

………………………………………………………………………………………………...

2.1 Spazio affine ordinario. RA(O;i,j,k).

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano p passante per l'origine O e per i punti A(1,0,1) e B(2,1,0).

(b) Scrivere equazioni cartesiane del fascio *F* di rette, sul piano p, avente come centro il punto A.

(c) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r_1 appartenente al fascio *F* e parallela al piano q:2y+z+3=0.

(d) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r_2 passante per il punto C(0,1,1) e parallela ai piani p_1:x+y-z-1=0 e p_2:x-y-z-1=0.

(e) Verificare che le rette r_1 e r_2 sono sghembe.

(f) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r_3 incidente le rette r_1 e r_2 e parallela all'asse z.

(g) Verificare che ogni terna di vettori direttori (v_1,v_2,v_3) rispettivamente delle rette r_1, r_2, r_3, costituisce una base per lo spazio vettoriale V dei vettori geometrici dello spazio ordinario.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.1, si ha:

(a) l'equazione cartesiana del piano p è x-2y-z=0;

(b) equazioni cartesiane del fascio *F* di rette di centro A, su p, sono, per esempio, (2+h)x+y+hz-2-2h=0, x-2y-z=0, essendo h un parametro reale;

(c) equazioni cartesiane della retta r_1 sono, per esempio, 5x+2y+z-6=0, x-2y-z=0 ed equazioni parametriche di r_1 sono, per esempio, x=1, $y=t_1$, $z=1-2t_1$, $t_1\in\boldsymbol{R}$;

(d) equazioni cartesiane di r_2 sono, per esempio, x+y-z=0, x-y-z+2=0 ed equazioni parametriche di r_2 sono, per esempio, $x=t_2$, y=1, $z=1+t_2$, $t_2\in\boldsymbol{R}$.

(e) la matrice quadrata che ha come righe, rispettivamente, (5,2,1,-6), (1,-2,-1,0), (1,1,-1,0), (1,-1,-1,2) ha determinante uguale a $24\neq0$ e quindi le rette r_1 e r_2 sono sghembe;

(f) equazioni in forma di rapporti uguali della retta r_3 sono (x-1)/0=(y-1)/0=(z+1)/3 onde equazioni cartesiane di r_3 sono, per esempio, x-1=0, y-1=0 mentre equazioni parametriche di r_3 sono, per esempio, x=1, y=1, $z=-1+3t_3$, $t_3\in\boldsymbol{R}$;

(f) vettori direttori di r_1, r_2, r_3 sono rispettivamente $v_1\equiv(0,\rho_1,-2\rho_1)$, $v_2\equiv(\rho_2,0,\rho_2)$, $v_3\equiv(0,0,3\rho_3)$, essendo ρ_1, ρ_2, $\rho_3\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$, e la matrice che ha per colonne le colonne delle coordinate rispettivamente di v_1, v_2, v_3 ha determinante uguale a $-3\rho_1\rho_2\rho_3\neq0$ per ogni ρ_1, ρ_2, $\rho_3\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$, allora ogni terna di vettori direttori (v_1,v_2,v_3) è una terna di vettori linearmente indipendenti e quindi, essendo dim(V)=3, è una base di V.

2.2 Spazio vettoriale numerico $V=\boldsymbol{R}^4$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$, Sia assegnato l'endomorfismo $F_h:V\rightarrow V$, tale che $F_h(v)=(x_1-2x_3+2x_4,-x_2,-x_3+2x_4,(h+1)x_1+2x_4)$, essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ed h un parametro reale.

(a) Scrivere la matrice A_h associata all'endomorfismo F_h rispetto alla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ di V.

(b) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'endomorfismo F_h ammetta lo scalare 2 come autovalore.

(c) Indicato semplicemente con F l'endomorfismo corrispondente al valore h_0 del parametro h, di cui al punto precedente, ed indicata con A la matrice associata ad F, determinare gli autovalori dell'endomorfismo F, indicando per ciascuno di essi la rispettiva molteplicità algebrica.

(d) Verificare che l'endomorfismo F è diagonalizzabile, giustificando la risposta.

(e) Determinare una base $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ di autovettori rispetto ad F.

(f) Determinare la matrice diagonale A´ associata all'endomorfismo F rispetto alla base di autovettori $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ ed una matrice invertibile C tale che risulti $A'=C^{-1}AC$.

(g) Verificare che F è un automorfismo e scrivere l'espressione di $F^{-1}(v)$ rispetto alla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.2, si ha:

(a) la matrice A_h associata all'endomorfismo F_h rispetto alla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ di V ha come righe $A_h^{(1)}=(1,0,-2,2)$, $A_h^{(2)}=(0,-1,0,0)$, $A_h^{(3)}=(0,0,-1,2)$, $A_h^{(4)}=(h+1,0,0,2)$;

(b) l'equazione caratteristica dell'endomorfismo F_h è $\det(A_h-\lambda I)=0$, ossia $(1-\lambda)(1+\lambda)^2(2-\lambda)-(h+1)\,(2(1+\lambda)^2-4(1+\lambda))=0$, tale equazione ammette come soluzione $\lambda=2$ se e soltanto se risulta $h=-1$, pertanto è $h_0=-1$;

(c) ponendo $h=h_0=-1$ nell'equazione caratteristica dell'endomorfismo F_h, si ha che l'equazione caratteristica dell'endomorfismo F è $(1-\lambda)(1+\lambda)^2(2-\lambda)=0$, pertanto gli autovalori di F sono $\lambda_1=-1$, con molteplicità algebrica $a_1=2$, $\lambda_2=1$, con molteplicità algebrica $a_2=1$ e $\lambda_3=2$, con molteplicità algebrica $a_3=1$;

(d) l'endomorfismo F è diagonalizzabile perché risulta $a_1+a_2+a_3=4=\dim(V)$, $g_1=a_1$, $g_2=a_2$, $g_3=a_3$;

(e) una base di $V=\boldsymbol{R}^4$, costituita da autovettori rispetto all'endomorfismo F, è, per esempio, $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$, essendo $v_1'=(0,1,0,0)$, $v_2'=(1,0,1,0)$ $v_3'=(1,0,0,0)$, $v_4'(2,0,2,3)$;

(f) la matrice diagonale A' associata all'endomorfismo F rispetto alla base di autovettori $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ è la matrice diagonale avente $a_{11}'= a_{22}'=\lambda_1=-1$, $a_{33}'=\lambda_2=1$ e $a_{44}'=\lambda_3= 2$. Una matrice invertibile C tale che risulti $A'=C^{-1}AC$ è, per esempio, la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ alla base di autovettori $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$, ossia la matrice avente come righe $C^{(1)}=(0,1,1,2)$, $C^{(2)}=(1,0,0,0)$, $C^{(3)}=(0,1,0,2)$, $C^4=(0,0,0,3)$;

(g) la matrice A associata all'endomorfismo F rispetto alla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ ha determinante uguale a $2\neq0$ e quindi, risultando $rg(A)=4=\dim(V)$, l'endomorfismo F è un automorfismo ed, essendo inoltre (1,0,-2,1), (0,-1,0,0), (0,0,-1,1), (0,0,0,1/2) le righe della matrice A^{-1}, l'espressione richiesta di $F^{-1}(v)$ è data da $F^{-1}(v)=(x_1-2x_3+x_4,-x_2, -x_3+x_4,(1/2)x_4)$.