ESONER0 DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 10–2-2011

1. Spazio euclideo ordinario **E**. RC(O;i,j,k). Siano assegnati il punto $P_0(1,0,1)$ e le rette r_1:x-y-z=0, 2x+y+z=0, r_2:x=1, y=t, z=-t, t∈$\boldsymbol{R}$, r′:x=y=-z.

(a) Verificare che le rette r_1 ed r_2 sono complanari, precisandone la mutua posizione.
(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano p contenente le rette r_1 ed r_2.
(c) Scrivere equazioni cartesiane della retta r passante per il punto P_0, parallela al piano p e perpendicolare alla retta r′.
(d) Scrivere l'equazione cartesiana del piano generico q del fascio *F* di piani avente come asse la retta r.
(e) Determinare i piani del fascio *F* che incontrano il piano p lungo una retta e studiare la mutua posizione delle rette ottenute.

Soluzione

(a) Si ha subito che parametri direttori della retta r sono l_1=0, m_1=-1, n_1=1 mentre parametri direttori della retta r_2 sono l_2=0, m_2=1, n_2=-1. Essendo proporzionali le due terne di parametri direttori (l_1,m_1,,n_1) e (l_2,m_2,n_2) si ha che le rette r_1 ed r_2 sono parallele. Osservato poi che, per esempio, il punto P_1≡O appartiene ad r_1 ma non ad r_2, le rette r_1 ed r_2 risultano parallele e distinte e quindi sono complanari.

(b) Il piano p contenente r_1 ed r_2 può essere ottenuto come piano passante per il punto P_1≡O ed avente giacitura W=Span(w_1,w_2), essendo w_1=j-k un vettore direttore delle rette r_1 ed r_2 e w_2 =i il vettore associato ai punti P_1 e P_2, dove P_2(1,0,0) è un punto di r_2. Pertanto l'equazione cartesiana del piano p è –y-z=0, ossia y+z=0.

(c) Equazioni in forma di rapporti uguali di una retta generica passante per il punto P_0 sono (x-1)/l=y/m=(z-1)/n, essendo l,m,n parametri direttori. Essendo a=0, b=1, c=1 coefficienti di giacitura del piano p, la condizione di parallelismo con p dà m+n=0. Essendo poi l′=1, m′=1, n′=-1 parametri direttori della retta r′, la condizione di perpendicolarità con r′ dà l+m-n=0. I parametri direttori di r si ottengono allora risolvendo il sistema lineare omogeneo m+n=0, l+m-n=0. Una soluzione di tale sistema è, per esempio, (l,m,n))=(2,-1,1) e quindi equazioni in forma di rapporti uguali di r sono (x-1)/2=y/(-1)=(z-1)/1. Allora equazioni cartesiane di r sono, per esempio, x-2z+1=0, y+z-1=0.

(d) L'equazione cartesiana del piano generico q del fascio *F* di piani avente come asse la retta r, con esclusione del piano q_2:y+z-1, è, per esempio, x-2z+1+h(y+z-1)=0, ossia x+hy+(h-2)z+1-h=0, essendo h un parametro reale.

(e) L'intersezione q∩p del piano q∈(*F*\{q_2}) con il piano p è rappresentata dal sistema lineare x+hy+(h-2)z+(1-h)=0, y+z=0. Tale sistema rappresenta una retta per ogni valore di h risultando uguale a 2 il rango della sua matrice dei coefficienti. L'intersezione q_2∩p del piano q_2 con il piano p è rappresentata dal sistema lineare y+z-1=0, y+z=0, manifestamente incompatibile e quindi q_2∩p non è una retta. Una terna di parametri direttori della retta q∩p, q∈(*F*\{q_2}), è, per esempio, (2,-1,1). Osservato che tale terna non dipende dal parametro h, si ha che l'insieme di rette {q∩p|q∈(*F*\{q_2})} del piano p costituisce un fascio (improprio) di rette parallele di direzione W avente equazioni cartesiane x+hy+(h-2)z=0, y+z=0, ossia x-2z=0, y+z=0.

2. Sia assegnata la matrice quadrata A_k avente come righe $A_k^{(1)}=(-1,0,2)$, $A_k^{(2)}=(k,k-1,2)$, $A_k^{(3)}=(k,0,1)$, essendo k un parametro reale.

(a) Determinare il valore k_0 del parametro k in corrispondenza del quale la matrice A_k ammette il numero –1 come autovalore.

(b) Detta A la matrice corrispondente al valore k_0 di cui al punto precedente, determinare gli autovalori di A, precisandone le rispettive molteplicità algebriche.

(c) Verificare che la matrice A è diagonalizzabile.

(d) Determinare una matrice quadrata non singolare C tale che la matrice $C^{-1}AC$ sia diagonale.

(e) Assegnata la matrice quadrata D avente come righe $D^{(1)}=(-1,0,0)$, $D^{(2)}=(1,-1,0)$, $D^{(3)}=(0,1,1)$, dire se le matrici A e D sono o non sono simili, giustificando la risposta.

Soluzione

(a) L'equazione caratteristica della matrice A_k è $\det(A_k-\lambda I)=0$, ossia $(-1-\lambda)(k-1-\lambda)(1-\lambda)-2k(k-1-\lambda)=0$.
Tale equazione ammette come soluzione $\lambda=-1$ se e soltanto se risulta $-2k^2=0$, ossia se e soltanto se è k=0. Pertanto è $k_0=0$.

(b) Ponendo $k=k_0$ nell'equazione caratteristica della matrice A_k si ha che l'equazione caratteristica della matrice A è $(1+\lambda)^2(1-\lambda)=0$. Pertanto gli autovalori di A sono $\lambda_1=-1$, con molteplicità algebrica $a_1=2$, e $\lambda_2=1$, con molteplicità algebrica $a_2=1$,

(c) Essendo 3 l'ordine di A e risultando $a_1+a_2=3$, si ha che la matrice A è diagonalizzabile se la molteplicità geometrica g_1 dell'autovalore λ_1 è uguale ad a_1 e la molteplicità geometrica g_2 dell'autovalore λ_2 è uguale ad a_2. Essendo la molteplicità geometrica di un autovalore maggiore o uguale ad 1 e minore o uguale alla molteplicità algebrica dello stesso autovalore, si ha intanto che, dovendo essere $1\le g_2\le a_2=1$, è $g_2=1=a_2$. Per sapere se la matrice A è o non è diagonalzzabile, ci resta da determinare g_2 e verificare se è o non è $g_2=a_2$. Sia V_{-1} l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1=-1$. Equazioni cartesiane di V_{-1} sono $2x_3=0$, $2x_3=0$, $2x_3=0$, Risulta allora $V_{-1}=\{t_1(1,0,0)+t_2(0,1,0)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Una base di V_{-1} è costituita dagli autovettori $v_1'=(1,0,0)$, $v_2'=(0,1,0)$ e quindi risulta $g_1=\dim(V_{-1})=2=a_1$. Pertanto la matrie A è diagonalizzabile;

(d) Per ottenere una matrice quadrata non singolare C tale che la matrice $C^{-1}AC$ sia diagonale, determiniamo una base di $V=\boldsymbol{R}^3$ costituita da autovettori rispetto alla matrice A. Nel quesito precedente abbiamo già determinato una base dell'autospazio V_{-1}, determiniamo dunque una base dell'autospazio V_1 associato all'autovalore $\lambda_2=1$. Si ha V_1:$-2x_1+2x_3=0$, $-2x_2+2x_3=0$, $0=0$ e quindi $V_1=\{t(1,1,1)|t\in\boldsymbol{R}\}$, onde una base di V_1 è costituita dal solo autovettore $v_3'=(1,1,1)$, Allora $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ è una base di $V=\boldsymbol{R}^3$ costituita da autovettori rispetto alla matrice A. Una matrice C del tipo richiesto è, per esempio, la matrice del cambiamento di basi nel passaggio dalla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3)$ alla base $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$.di di $V=\boldsymbol{R}^3$. Tale matrice ha come righe $C^{(1)}=(1,0,1)$, $C^{(2)}=(0,1,1)$, $C^{(3)}=(0,0,1)$,

(e) L'equazione caratteristica della matrice D coincide con quella della matrice A, quindi D ha gli stessi autovalori di A con rispettive molteplicità algebriche. Una condizione necessaria affinché due matrici quadrate dello stesso ordine siano simili è che esse siano entrambe diagonalizzabili o entrambe non diagonalizzabili. Allora, avendo provato che la matrice A è diagonalizzabile, dimostreremo che le matrici A e D non sono simili facendo vedere che la matrice D non è diagonalizzabile. L'autospazio E_{-1} associato all'autovalore $\lambda_1=-1$ della matrice D ha equazioni cartesiane $0=0$, $x_1=0$, $x_2+2x_3=0$ e quindi è $E_{-1}=\{t(0,-2,1)|t\in \boldsymbol{R}\}$, Una base dell'autospazio E_{-1} è costituita dal solo autovettore $w_1=(0,-2,1)$, onde è $\dim(E_{-1})=1$ e quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda_1=-1$ della matrice A non è uguale alla rispettiva molteplicità algebrica. Pertanto la matrice D non è diagonalizzabile.