ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere P-Z)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 9-7-2012

1.<u>Spazio euclideo numerico</u> $\boldsymbol{E^4}$. <u>Riferimento cartesiano canonico</u> RC($O;e_1,e_2,e_3,e_4$). Siano assegnati i punti $P_0=O$, $P_1=(1,-1,1,1)$, $P_2=(1,0,1,0)$, $P_3=(0,1,0,1)$, $Q_0=(0,0,0,1)$, $R_0=(1,0,0,0)$ e le rette r_1, r_2, r_3, $r(h)$ passanti per l'origine O ed aventi come vettori direttori, rispettivamente, $w_1=(1,1,0,1)$, $w_2=(0,1,1,0)$, $w_3=(1,0,1,0)$, $w(h)=(1,h,-2h,-1)$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare il sottospazio affine p_1 generato dai punti P_0, P_1, P_2, P_3.
(b) Determinare l'iperpiano p_2 passante per il punto Q_O e parallelo alle rette r_1, r_2, r_3.
(c) Determinare l'iperpiano p(h) passante per il punto R_0 e perpendicolare alla retta r(h).
(d) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali l'intersezione $S(h)=p_1\cap p_2\cap p(h)$ sia un sottospazio affine.
(e) In corrispondenza dei valori di h ottenuti nel punto (d) determinare la dimensione di S(h).

Soluzione

(a) La matrice che ha come colonne le colonne delle coordinate dei vettori $u_1=P_1-P_0=(1,-1,1,1)$, $u_2=P_2-P_0=(1,0,1,0)$, $u_3=P_3-P_0=(0,1,0,1)$ ha rango uguale a 3 poiché, per esempio, è uguale a 2, e quindi non nullo, il determinante della submatrice quadrata costituita dalla prima, dalla seconda e dalla quarta riga. Allora i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base per $U=\mathrm{Span}(u_1,u_2,u_3)$. Pertanto il sottospazio affine p_1, dovendo avere U come giacitura, ha dimensione 3, ossia è un iperpiano. Uguagliando a 0 il determinante della matrice quadrata che ha come prima riga (x_1, x_2, x_3, x_4) e come seconda, terza e quarta riga rispettivamente le righe delle coordinate dei vettori u_1, u_2 e u_3 si ha che p_1 ha come equazione cartesiana $-2x_1+2x_3=0$, ovvero $x_1-x_3=0$.

(b) L'iperpiano generico passante per il punto Q_0 ha equazione cartesiana $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4(x_4-1)=0$, ossia $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4-a_4=0$. La condizione di parallelismo di tale iperpiano con le rette r_1, r_2, r_3 dà, rispettivamente, $a_1+a_2+a_4=0$, $a_2+a_3=0$, $a_1+a_3=0$. Una soluzione non banale del sistema omogeneo appena scritto è $(1,1,-1,-2)$ e quindi l'equazione cartesiana dell'iperpiano p_2 è $x_1+x_2-x_3-2x_4+2=0$.

(c) L'equazione cartesiana dell'iperpiano p(h) passante per il punto R_0 e perpendicolare alla retta r(h) è $(x_1-1)+hx_2-2hx_3-x_4=0$, ossia $x_1+hx_2-2hx_3-x_4-1=0$.

(d) Equazioni cartesiane di S(h) sono $x_1-x_3=0$, $x_1+x_2-x_3-2x_4+2=0$, $x_1+hx_2-2hx_3-x_4-1=0$. Utilizzando l'algoritmo di riduzione a scala di Gauss-Jordan si ha che il sistema di equazioni cartesiane appena scritto per $h\neq1/2$ risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare compatibile a scala $x_1-x_3=0$, $x_2-2x_4=-2$, $(1-2h)x_3-(1-2h)x_4=1+2h$ mentre per $h=1/2$ risulta equivalente, per esempio, al sistema lineare a scala incompatibile $x_1-x_3=0$, $x_2-2x_4=-2$, $0=2$. Allora il sottoinsieme S(h) è un sottospazio affine se e soltanto se è $h\neq1/2$.

(e) Per $h\neq1/2$ la giacitura W(h) di S(h) è rappresentata dal sistema lineare omogeneo a scala di tre equazioni in quattro incognite $x_1-x_3=0$, $x_2-2x_4=-2$, $(1-2h)x_3-(1-2h)x_4=0$, onde la dimensione di W(h), e quindi di S(h), è 4-3=1. Pertanto S(h) è una retta per ogni $h\neq1/2$.

2.Spazio vettoriale euclideo V dei vettori geometrici dello spazio euclideo ordinario. Base ortonormale $B_V=(i,j,k)$. Siano assegnati i vettori $v_1(h+1,h+2,h+1)$, $v_2(0,-1,0)$, $v_3(h+3,h+2,h+1)$, essendo h un parametro reale, ed il sottospazio vettoriale $U: x-2y+z=0,\ 2x-y-z=0$.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale i vettori v_1, v_2, v_3, costituiscono una base ortogonale di V e scrivere tale base.

(b) Detti i', j', k' i vettori che si ottengono normalizzando, rispettivamente, i vettori v_1, v_2, v_3 della base ortogonale di cui al punto (a), determinare la matrice C del cambiamento di base nel passaggio dalla base ortonormale $B_V=(i,j,k)$ alla base ortonormale $B_V'=(i',j',k')$.

(c) Dire di che tipo è la matrice C di cui al punto (b), giustificando la risposta.

(d) Determinare una base ortonormale di U ed una base ortonormale di $W=U^{\perp}$.

(e) Determinare il vettore v' corrispondente del vettore $v=k$ nella simmetria ortogonale S_W rispetto a W.

Soluzione

(a) La condizione affinché i tre vettori v_1, v_2, v_3 siano mutuamente ortogonali dà $(h+2)(-1)=0$, $(h+1)(h+3)+(h+2)(h+2)+(h+1)(h+1)=0$, $(-1)(h+2)=0$, ossia $h+2=0$, $h^2+4h+3+h^2+4h+4+h^2+2h+1=0$, $h+2=0$, ovvero $h+2=0$, $3h^2+10h+8=0$ e quindi $h_0=-2$. In corrispondenza di $h=h_0=-2$ si hanno i vettori ortogonali $v_1(-1,0,-1)$, $v_2(0,-1,0)$, $v_3(1,0,-1)$. Nessuno di tali vettori è nullo onde essi costituiscono una base ortogonale.

(b) Per i vettori v_1, v_2, v_3, di cui al punto (a) risulta $|v_1|=2^{1/2}$, $|v_2|=1$, $|v_3|=2^{1/2}$ e quindi $i'=v_1/|v_1|=-(1/2^{1/2})(i+k)$, $j'=v_2/|v_2|=-j$, $k'=v_3/|v_3|=(1/2^{1/2})(i-k)$. La matrice C del cambiamento di base nel passaggio dalla base ortonormale $B_V=(i,j,k)$ alla base ortonormale $B_V'=(i',j',k')$ ha come righe $C^{(1)}=(-1/2^{1/2},0,1/2^{1/2})$, $C^{(2)}=(0,-1,0)$, $C^{(3)}=(-1/2^{1/2},0,-1/2^{1/2})$.

(c) La matrice C è ortogonale in quanto è tale ogni matrice del cambiamento di base nel passaggio da una base ortonormale ad una base ortonormale.

(d) Si ha immediatamente che lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo che rappresenta U è $S_o=\{t(1,1,1) | t\in\boldsymbol{R}\}$ e quindi risulta $U=\{t(i+j+k) | t\in\boldsymbol{R}\}$. Allora una base ortonormale di U è costituita dal solo vettore unitario $u=(1/3^{1/2})(i+j+k)$. Equazione cartesiana di $W=U^{\perp}$ è $x+y+z=0$ e quindi $W=\{t_1(i-j)+t_2(i-k) | t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$ con base costituita dai vettori $w_1=i-j$, $w_2=i-k$. Tale base non è ortogonale perché risulta $\langle w_1,w_2\rangle=1\neq 0$. Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt applicato a tale base dà la base ortogonale (w_1',w_2') costituita dai vettori $w_1'=w_1=i-j$, $w_2'=w_2-(\langle w_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=i-k-(1/2)(i-j)=(1/2)i+(1/2)j-k$. Essendo $|w_1'|=2^{1/2}$, $|w_2'|=(3/2)^{1/2}$ si ha allora che una base ortonormale di W è costituita dai vettori unitari $w_1''=w_1'/|w_1'|=(1/2^{1/2})(i-j)$, $w_2''=w_2'/|w_2'|=(2/3)^{1/2}((1/2)i+(1/2)j-k)$.

(d) Risulta $v'=S_W(v)=v-2P_U(v)=v-2\langle v,u\rangle u=k-2\langle k,(1/3^{1/2})(i+j+k)\rangle(1/3^{1/2})(i+j+k)=k-(2/3)(i+j+k)=-(2/3)i-(2/3)j+(1/3)k$.