ESAME DI GEOMETRIA PER FISICI (Lettere Pf-Z)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e soluzioni della Prova scritta del 9–5-2013

1. Spazio affine, $RA(O, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k})$.
Sono assegnati il piano $p : x - 2y + 3z - 1 = 0$ ed il suo punto $P_0(-1, -1, 0)$.
(i) Scrivere equazioni cartesiane del fascio di rette $\mathcal{F}$, contenuto in p, di centro P_0.
(ii) Determinare le rette r' ed s' del fascio rispettivamente parallela alla retta

$$r : \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

ed incidente la retta

$$s : x = t\,,\ y = 2t + 1\,,\ z = -t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

(Suggerimento: il fascio $\mathcal{F}$ può essere ottenuto come intersezione del piano p con il fascio di piani di asse una retta per P_0 non contenuta in p.)

Soluzione: (i) Una retta t per P_0 ha equazioni in forma di rapporti uguali

$$\frac{x+1}{\ell} = \frac{y+1}{m} = \frac{z}{n}\,.$$

S'imponga la condizione che questa retta non sia parallela al piano p:

$$\ell - 2m + 3n \neq 0\,.$$

Si può allora assumere ad esempio $(\ell, m, n) = (1, -2, 3)$. Si può allora scegliere la retta t di equazioni cartesiane

$$t : 3x - z + 3 = 0\,, \quad 3y + 2z + 3 = 0\,.$$

Il fascio di piani di asse la retta t ha equazione

$$3x + 3ky + (2k-1)z + 3k + 3 = 0\,,$$

dove k è un parametro reale. Il fascio $\mathcal{F}$ richiesto si ottiene intersecando il fascio di piani di asse t con il piano p. $\mathcal{F}$ ha allora equazioni cartesiane

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 3x + 3ky + (2k-1)z + 3k + 3 = 0 \\ x_2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Parametri direttori della generica retta di $\mathcal{F}$ sono

$$\ell' = \begin{vmatrix} 3k & 2k-1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 13k-2\,, m' = -\begin{vmatrix} 3k & 2k-1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2k-10\,, n' = \begin{vmatrix} 3k & 3k \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3k-6\,.$$

Parametri direttori della r sono $(3,-3,-3)$. La condizione di parallelismo tra la retta r e la generica retta del fascio è:

$$rg\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 13k-2 & 2k-10 & -3k-6 \end{pmatrix} = 1\,.$$

Da cui si trae $k = 4/5$. la retta r' ha equazioni cartesiane

$$r' : \begin{cases} 5x + 4y + z + 9 = 0 \\ x - 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Per ottenere la retta s' s'imponga alla generica retta del fascio $\mathcal{F}$ di contenere un punto di s, che ha coordinate $(t, 2t+1, -t)$. Sostituendo queste coordinate nell'equazione del fascio si ottengono le condizioni

$$4kt + 4t + 6k + 3 = 0\,, \quad 2t + 1 = 0$$

da cui $t = -1/2$ e $k = -1/4$. La retta s' ha equazioni cartesiane

$$s' : \begin{cases} 4x - y - 2z + 3 = 0 \\ x - 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Il punto d'intersezione tra s e s' ha coordinate $(-1/2, 0, 1/2)$.

2. Spazio vettoriale reale V di dimensione 3, base $\mathrm{B} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$.
Sia $T : V \to V$ l'endomorfismo definito ponendo

$$\begin{aligned} T(\mathrm{v}_1) &= 3\mathrm{v}_1 + 2\mathrm{v}_2 + 3\mathrm{v}_3 \\ T(\mathrm{v}_2) &= 2\mathrm{v}_1 + 2\mathrm{v}_3 \\ T(\mathrm{v}_3) &= -\mathrm{v}_1 - 2\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_3. \end{aligned}$$

(i) Si determinino i sottospazi $Ker(T)$ e $Im(T)$, scrivendone una base.
(ii) Si calcolino gli autovalori e gli autospazi di T.
(iii) Dire se T è diagonalizzabile.

Soluzione: (i) La matrice di T nella base B è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

I vettori di $Ker(T)$ hanno per componenti nella base B le soluzioni del SLO che ha A come matrice

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Risulta $rg(A) = 2$; quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni, ovvero $dim(Ker(T)) = 1$. Le soluzioni del sistema possono ottenersi dal sistema equivalente in cui $x_3 = t$ è un parametro reale:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = t \\ 2x_1 = 2t \end{cases}.$$

Quindi $Ker(T) = \{(t, -t, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$, ovvero $Ker(T) = Span(\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3)$.

Essendo $rg(A) = 2$, $Im(T)$ è generato ad esempio dai vettori di coordinate $(3, 2, 3)$ e $(2, 0, 2)$, ovvero

$$Im(T) = Span(3\mathrm{v}_1 + 2\mathrm{v}_2 + 3\mathrm{v}_3, 2\mathrm{v}_1 + 2\mathrm{v}_3).$$

(ii) Gli autovalori di T sono gli zeri del suo polinomio caratteristico

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & -1 \\ 2 & -x & -2 \\ 3 & 2 & -1-x \end{vmatrix} = -x^2(x-2).$$

Si hanno i due autovalori:
$\lambda_1 = 0$, di molteplicità algebrica 2;
$\lambda_2 = 2$, di molteplicità algebrica 1.
Autospazi:
$E(0) = Ker(T)$, che ha dimensione 1;

$E(2)$ è lo spazio delle soluzioni del SLO

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

La matrice del sistema ha rango 2 (un minore non nullo è ad esempio $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$). Si hanno le soluzioni

$$\{(t, 0, t) \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

Quindi $E(2) = Span(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3)$.

(iii) T non è diagonalizzabile, dato che la molteplicità algebrica di λ_1 è maggiore di quella geometrica.