ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova scritta del 5–9-2011

1. Spazio euclideo ordinario **E**. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti A≡O(0,0,0), C(1,0,1) e le rette r:2x-y-2=0, y+2z+2=0, r_1:x+z-1=0, y-z=0, r_2:x-z+1=0, y-1=0.

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano p passante per il punto A e perpendicolare alla retta r.

(b) Dopo aver verificato che il punto C appartiene al piano p, determinare i punti B e D sul piano p in modo tale che il quadrilatero ABCD sia un rombo di area $A=\sqrt{6}$.

(c) Dopo aver verificato che le rette r_1 e r_2 sono complanari, determinare l'equazione cartesiana del piano q che contiene tali rette.

(d) Detto E il punto generico del piano q, calcolare il volume V del parallelepipedo individuato dai punti A, B, D, E.

(e) Studiare il comportamento del volume V al variare del punto E sul piano q, giustificando geometricamente la risposta.

Soluzione

(a) Parametri direttori della retta r sono, per esempio, (l,m,n)=(1,2,-1). Allora l'equazione cartesiana del piano p è x+2y-z=0.

(b) Il punto C appartiene al piano p perché le sue coordinate cartesiane soddisfano l'equazione cartesiana di p. Poiché il piano p passa per il punto A per costruzione, il rombo richiesto giace sul piano p. Essendo (1/2,0,1/2) le coordinate cartesiane del punto medio M dei punti A e C e (1,0,1) le coordinate del vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato AC, l'asse s, sul piano p, del segmento AC ha equazioni cartesiane x-1/2+z-1/2=0, x+2y-z=0, ossia x+z-1=0, x+2y-z=0. Equazioni parametriche dell'asse s sono, per esempio, x=-t+1/2, y=t, z=t+1/2, $t\in\boldsymbol{R}$. Considerato allora il punto P(-t+1/2,t,t-1/2) variabile sull'asse s ed essendo $2^{1/2}$ e $(3t^2)^{1/2}$ la lunghezza rispettivamente del segmento AC e del segmento MP, si ha che i punti B e D si ottengono imponendo che sia $2^{1/2}(3t^2)^{1/2}=6^{1/2}$, ossia $t^2=1$. Tale condizione dà $t=\pm1$ e quindi risulta, per esempio, B(-1/2,1,3/2) e D(3/2, -1, -1/2).

(c) Il sistema x+z-1=0, y-z=0, x-z+1=0, y-1=0 costituito dalle equazioni cartesiane delle rette r_1 ed r_2 ammette manifestamente la soluzione (0,1,1). Allora le rette r_1 ed r_2, dovendo avere almeno un punto in comune, non possono essere né sghembe né parallele e disgiunte. Essendo $(l_1,m_1,n_1)=(1,-1,-1)$, $(l_2,m_2,n_2)=(1,0,1)$, parametri direttori rispettivamente della retta r_1 e della retta r_2, si ha che tali rette non possono essere nemmeno parallele e coincidenti. In definitiva le rette r_1 ed r_2 sono incidenti. Il punto d'incidenza è il punto $Q_0(0,1,1)$. Il piano q, contenente le rette r_1 ed r_2, può essere ottenuto come piano passante per Q_0 e parallelo alle rette r_1 ed r_2, ossia come piano passante per Q_0 e di giacitura $W=Span(w_1,w_2)$, essendo $w_1(1-1,-1)$ e $w_2(1,0,1)$ vettori direttori rispettivamente di r_1 ed r_2. L'equazione cartesiana del piano q si ottiene uguagliando a 0 il determinante della matrice quadrata che ha come righe (x, y-1, z-1), (1,-1,-1) e (1,0,1). Si ha allora q:-x-2(y-1)+z-1=0, ovvero q:x+2y-z-1=0; per il seguito è utile osservare esplicitamente che il piano q risulta parallelo al piano p.

(d) Equazioni parametriche del piano q sono, per esempio, $x=t_1$, $y=t_2$, $z=t_1+2t_2-1$, $t_1,t_2\in\boldsymbol{R}$, onde risulta $E(t_1,t_2,t_1+2t_2-1)$. Si ha allora che, essendo (-1/2,1,3/2), (3/2,-1,-1/2) e (t_1,t_2,t_1+2t_2-1) le coordinate dei vettori geometrici rappresentati rispettivamente dai segmenti orientati AB, AC ed AE, il volume V uguaglia il modulo del determinante della matrice quadrata che ha come righe (-1/2,1,3/2), (3/2,-1,-1/2), (t_1,t_2,t_1+2t_2-1). Risulta subito $V=1$.

(e) Il volume V del parallelepipedo non varia al variare del punto E sul piano q, ossia è costante. Tale risultato si giustifica geometricamente osservando che il parallelepipedo individuato dai punti A, B, D, E ha sempre lo stesso volume in quanto la base ABCD non cambia al variare del punto E sul piano q e l'altezza relativa a tale base uguaglia la distanza tra i piani paralleli p e q.

2. <u>Spazio vettoriale reale</u> V <u>dei vettori geometrici dello spazio euclideo ordinario. Base ortonormale</u> B=(i,j,k). Sia assegnato il sottospazio vettoriale W:x-y+z=0.

(a) Determinare il vettore P(v), proiezione ortogonale del vettore v su W, essendo v un vettore generico di V.

(b) Verificare che l'applicazione $P:V\to V$ è un endomorfismo simmetrico di V.

(c) Determinare gli autovalori di P, indicandone le rispettive molteplicità algebriche.

(d) Determinare una base ortonormale $B'=(i_1',j',k')$ di V costituita da autovettori rispetto a P.

(e) Dopo aver scritto la matrice A' associata a P rispetto alla base ortonormale B', determinare una matrice ortogonale C tale che $A'={}^tCAC$.

Soluzione

(a) Intanto W è un piano vettoriale di V. Un vettore ortogonale a W è, per esempio,u=i-j+k. Risulta allora $P(v)=v-((v\times u)/(u\times u))u$, dove con $\times$ si indica il prodotto scalare ordinario.

(b) Dall'espressione di P(v) si trae subito che l'applicazione $P:V\to V$ è lineare, essendo lineare rispetto al primo argomento il prodotto scalare, e quindi P è un endomorfismo di V. Risulta poi:

$P(i)=i-((i\times(i-j+k))/((i-j+k)\times(i-j+k)))(i-j+k)=i-(1/3)(i-j+k)=(2/3)i+(1/3)j-(1/3)k$;

$P(j)=j-((j\times(i-j+k))/((i-j+k)\times(i-j+k))(i-j+k)=j+(1/3)(i-j+k)=(1/3)i+(2/3)j+(1/3)k$;

$P(k)=k-(((k\times(i-j+k))/((i-j+k)\times(i-j+k)))(i-j+k)=k-(1/3)(i-j+k)=-(1/3)i+(1/3)j+(2/3)k$.

Allora la matrice A associata all'endomorfismo P, rispetto alla base ortogonale B, ha come righe $A^{(1)}=(2/3,1/3,-1/3)$, $A^{(2)}=(1/3,2/3,1/3)$ $A^{(3)}=(-1/3,1/3,2/3)$. Essendo A una matrice simmetrica, si ha che l'endomorfismo P è simmetrico.

(c) L'equazione caratteristica di P si ottiene uguagliando a 0 il determinante della matrice $A-\lambda I$. Sviluppando tale determinante, si ha allora che l'equazione caratteristica di P è $-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda=0$, ovvero $-\lambda(\lambda^2-2\lambda+1)$, ossia $-\lambda(\lambda-1)^2=0$, onde gli autovalori di P sono $\lambda_1=0$, con molteplicità algebrica $a_1=1$, e $\lambda_2=1$, con molteplicità algebrica $a_2=2$.

(d) L'autospazio V_0, associato all'autovalore $\lambda_1=0$, ha equazioni cartesiane $(2/3)x+(1/3)y-(1/3)z=0$, $(1/3)x+(2/3)y+(1/3)z=0$, $-(1/3)x+(1/3)y+(2/3)z=0$, ossia $2x+y-z=0$, $x+2y+z=0$. Lo spazio delle soluzioni dell'ultimo sistema omogeneo è $S_o=\{t(1,-1,1)\}_{t\in\mathbb{R}}$ e quindi è $V_0=\{t(i-j+k)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Una base ortonormale di V_0 è allora costituita dal solo autovettore unitario $i'=(1/\sqrt{3})i-(1/\sqrt{3})j+(1/\sqrt{3})k$. Si ha poi V_1: $-(1/3)x+(1/3)y-(1/3)z=0$, $(1/3)x-(1/3)y+(1/3)z=0$, $-(1/3)x+(1/3)y-(1/3)z=0$, ossia $V_1:x-y+z=0$ e quindi è $V_1=\{t_1(i+j)+t_2(j+k)\mid t_1,t_2\in\mathbb{R}\}$. Una base di V_1 è per esempio quella costituita dagli autovettori $v_2=i+j$, $v_3=j+k$. Tale base non è ortogonale giacché risulta $v_2\times v_3=1\neq 0$. Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt a tale base, si ha la base ortogonale (w_2,w_3) di V_1, essendo $w_2=v_2=i+j$, $w_3=v_3-((v_3\times w_2)/(w_2\times w_2))w_2=j+k-(((j+k)\times(i+j))/((i+j)\times(i+j)))(i+j)=j+k-(1/2)(i+j)=-(1/2)i+(1/2)j+k$. Essendo poi $|w_2|=\sqrt{2}$ e $|w_3|=\sqrt{3}/\sqrt{2}$, si ha in definitiva che una base ortonormale di V_1 è quella costituita dagli autovettori unitari $j'=(1/\sqrt{2})i+(1/\sqrt{2})j$ e $k'=-(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))i+(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))j+(\sqrt{2}/\sqrt{3})k$. Ebbene, essendo ortogonali gli autovettori associati ad autovalori distinti di un endomorfismo simmetrico, si ha in definitiva che una base ortonormale di V, costituita da autovettori rispetto a P è $B'=(i',j',k')$, essendo i' ,j', k' gli autovettori unitari testé determinati.

(e) La matrice A', associata a P rispetto alla base ortonormale B', ha come righe $A'^{(1)}=(0,0,0)$, $A'^{(2)}=0,1,0)$, $A'^{(3)}=(0,0,1)$. Una matrice ortogonale C, tale che $A'={}^tCAC$, coincide con la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base ortonormale B alla base ortonormale B' ed ha quindi come colonne le colonne delle coordinate degli autovettori unitari i', j', k'. La matrice C ha allora come righe $C^{(1)}=(1/\sqrt{3},1\sqrt{2},-\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))$, $C^{(2)}=(-1/\sqrt{3},1\sqrt{2},\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))$, $C^{(3)}=(1/\sqrt{3},0,\sqrt{2}/\sqrt{3})$.