**ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)**
**(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)**
**Testi e soluzioni della prova scritta del 5–7-2010**

1. Spazio affine ordinario. RA(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $P_0(1,0,1)$, $P_1(2,h,0)$ e $P_2(0,-2h-1,-2h)$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare il valore del parametro h in corrispondenza del quale i punti $P_0$, $P_1$, $P_2$ risultino allineati.

(b) Scrivere equazioni cartesiane della retta r generata dai tre punti allineati $P_0$, $P_1$, $P_2$ di cui al quesito (a).

(c) Scrivere equazioni cartesiane della retta s passante per il punto $Q_0(-1,1,-1)$ e complanare con le rette $s_1$:y=0, z+2=0 ed $s_2$:x+2=0, y-2=0.

(d) Verificare che le rette r ed s sono complanari.

(e) Scrivere l'equazione cartesiana del piano p contenente le rette r ed s.

*Soluzione*

(a) Le coordinate del vettore individuato dai punti $P_0$ e $P_1$ sono (1,h,-1) mentre quelle del vettore individuato dai punti $P_0$ e $P_2$ sono (-1,-2h-1,-2h-1). Il rango della matrice avente come colonne le colonne delle coordinate di tali vettori è 2 per h ›-1 e 1 per h=-1. Pertanto i punti $P_0$, $P_1$, $P_2$ risultano allineati per h=-1.

(b) La retta r generata dai punti allineati $P_0(1,0,1)$, $P_1(2,-1,0)$ e $P_2(0,1,2)$, di cui al quesito (a), essendo i punti $P_0(1,0,1)$, $P_1(2,-1,0)$ distinti, può essere ottenuta come retta passante per $P_0(1,0,1)$ e $P_1(2,-1,0)$. Si ha allora che equazioni in forma di rapporti uguali di r sono

$$(x-1)/1=y/(-1)=(z-1)/(-1)$$

ed equazioni cartesiane di r sono, per esempio, x+z-2=0, y-z+1=0.

(c) La retta s può essere ottenuta come intersezione del piano $p_1$, appartenente al fascio $F_1$ di piani di asse la retta $s_1$ e passante per il punto $Q_0$, e del piano $p_2$, appartenente al fascio $F_2$ di piani di asse la retta $s_2$ e passante per il punto $Q_0$. Risulta $F_1$ :$y+k_1(z+2)=0$. Il passaggio per il punto $Q_0$ dà $1+k_1(-1+2)=0$, ossia $k_1=-1$, e quindi risulta $p_1$:y-z-2=0. Si ha poi $F_2$ :$x+2+k_2(y-2)=0$. Il passaggio per il punto $Q_0$ dà $-1+2+k_2(1-2)=0$, ovvero $k_2=1$, e quindi si ottiene $p_2$:x+y=0. Si ha allora s:y-z-2=0, x+y=0.

(d) Le rette r ed s hanno entrambe parametri direttori (1,-1,-1), onde sono parallele e quindi complanari.

(e) Le rette parallele r ed s sono distinte perché, per esempio, il punto $Q_0$ appartiene ad s ma non ad r. Allora il piano contenente r ed s può essere ottenuto come piano passante per $P_0$ ed avente come giacitura $W=Span(w_1,w_2)$, essendo $w_1$ un vettore direttore di r, per esempio

$w_1(1,-1,-1)$, e $w_2$ un vettore individuato da un punto appartenente ad r, per esempio $P_0$, e da un punto appartenente ad s, per esempio $Q_0$. Risultando $w_2(-2,1,-2)$, si ha che l'equazione cartesiana del piano p può essere ottenuta uguagliando a 0 il determinante della matrice quadrata avente come righe, rispettivamente, $(x+1,y-1,z+1)$, $(1,-1,-1)$ e $(-2,1,-2)$. Risulta allora $p:3(x+1)+4(y-1)-(z+1)=0$, ossia $p:3x+4y-z-2=0$.

2. <u>Spazio vettoriale euclideo numerico</u> $V=\boldsymbol{R}^4$. Sia $U=\mathrm{Span}(u)$, essendo $u=(1,-1,-1,0)$, ed $F:V\to V$ l'endomorfismo di V che associa ad un vettore $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ la sua proiezione ortogonale su U.

*(a)* Scrivere l'espressione di F(v).

*(b)* Verificare che l'endomorfismo F è simmetrico.

*(c)* Determinare la matrice A associata ad F rispetto alla base canonica $B=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ di $\boldsymbol{R}^4$ e calcolare gli autovalori di F.

*(d)* Determinare una base ortonormale di V costituita da autovettori rispetto ad F.

*(e)* Determinare una matrice ortogonale C tale che ${}^tCAC$ sia una matrice ortogonale.

*Soluzione*

(a) Risulta $F(v)=(\langle v,u\rangle/\langle u,u\rangle)u=((x_1-x_2-x_3)/3)(1,-1,-1,0)$.

(b) Per ogni coppia di vettori $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ e $w=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ risulta $\langle F(v),w\rangle=\langle(\langle v,u\rangle/\langle u,u\rangle)u),w\rangle=(\langle v,u\rangle/\langle u,u\rangle)\langle u,w\rangle$ nonché $\langle v,F(w)\rangle=\langle v,(\langle w,u\rangle/\langle u,u\rangle)u\rangle=(\langle w,u\rangle/\langle u,u\rangle)\langle v,u\rangle$. Allora, essendo $\langle w,u\rangle=\langle u,w\rangle$, si ha che $\langle F(v),w\rangle=\langle v,F(w)\rangle$ e quindi l'endomorfismo F è simmetrico.

(c) Risulta $F(v_1)=(1/3,-1/3,-1/3,0)$, $F(v_2)=(-1/3,1/3,1/3,0)$, $F(v_3)=(-1/3,1/3,1/3,0)$, $F(v_4)=(0,0,0,0)$, onde la matrice A associata ad F rispetto alla base canonica di $\boldsymbol{R}^4$ è la matrice avente come righe $A^{(1)}=(1/3,-1/3,-1/3,0)$, $A^{(2)}=(-1/3,1/3,1/3,0)$, $A^{(3)}=(-1/3,1/3,1/3,0)$, $A^{(4)}=(0,0,0,0)$. Notiamo che la matrice A è simmetrica d'accordo col fatto che l'endomorfismo F è simmetrico e la base canonica è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard. L'equazione caratteristica di F è $\det(A-\lambda I)=0$, ossia $-\lambda(-\lambda^3+\lambda^2)=0$, ovvero $\lambda^3(\lambda-1)=0$, e quindi gli autovalori di F sono $\lambda_1=0$, con molteplicità algebrica $a_1=3$, e $\lambda_2=1$, con molteplicità algebrica $a_2=1$.

(d) L'autospazio $V_0$, associato all'autovalore $\lambda_1=0$, ha equazioni cartesiane $(1/3)x_1-(1/3)x_2-(1/3)x_3=0$, $-(1/3)x_1+(1/3)x_2+(1/3)x_3=0$, $-(1/3)x_1+(1/3)x_2+(1/3)x_3=0$. Il sistema che rappresenta $V_0$ è equivalente all'equazione $x_1-x_2-x_3=0$ e quindi risulta $V_0=\{(t_1+t_2,t_1,t_2,t_3) \mid t_1,t_2,t_3\in\boldsymbol{R}\}$. Allora una base di $V_0$ è costituita dagli autovettori $w_1=(1,1,0,0)$, $w_2=(1,0,1,0)$, $w_3=(0,0,0,1)$. Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base $(w_1,w_2,w_3)$ di $V_0$, si ha la base ortogonale di $V_0$ costituita dagli autovettori $u_1=w_1=(1,1,0,0)$, $u_2=w_2-(\langle w_2,u_1\rangle/\langle u_1,u_1\rangle)u_1=(1,0,1,0)-(1/2)(1,1,0,0)=(1/2,-1/2,1,0)$,

$u_3=w_3-(<w_3,u_1>/<u_1,u_1>)u_1-(<w_3,u_2>/<u_2,u_2>)u_2=(0,0,0,1)$.
Normalizzando i vettori $u_1$, $u_2$, $u_3$, si ha la base ortonormale di $V_0$ costituita dagli autovettori unitari $v_1'=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0,0)$, $v_2'=(/\sqrt{2}/(2\sqrt{3}),-\sqrt{2}/(2\sqrt{3}),\sqrt{2}/\sqrt{3},0)$, $v_3'=(0,0,0,1)$.
Si ha poi $V_1$:$-(2/3)x_1-(1/3)x_2-(1/3)x_3=0$, $-(1/3)x_1-(2/3)x_2+(1/3)x_3=0$, $-(1/3)x_1+(1/3)x_2-(2/3)x_3=0$, $-x_4=0$ e quindi $V_1=\{(t,-t,-t,0)\,|\,t\in \boldsymbol{R}\}$. Una base ortonormale di $V_1$ è costituita dal solo autovettore unitario $v_4'=(1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},0)$. Allora $B'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ è una base di V del tipo richiesto. Una matrice ortogonale C tale che ${}^tCAC$ sia una matrice ortogonale è, per esempio, la matrice che ha come colonne le colonne delle coordinate degli autovettori unitari $v_1'$, $v_2'$, $v_3'$, $v_4'$ rispetto alla base canonica B, ossia la matrice che ha come righe $C^{(1)}=(1/\sqrt{2},\sqrt{2}/(2\sqrt{3}),0,1/\sqrt{3})$, $C^{(2)}=(1/\sqrt{2},-\sqrt{2}/(2\sqrt{3}),0,-1/\sqrt{3})$, $C^{(3)}=(0,\sqrt{2}/\sqrt{3},0,-1/\sqrt{3})$, $C^{(4)}=(0,0,1,0)$.