ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere Pf-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova scritta del 30–1-2013

1.1 <u>Spazio euclideo numerico</u> $\boldsymbol{E}^4$. <u>Riferimento cartesiano canonico</u> $RC(O;e_1,e_2,e_3,e_4)$. Siano assegnati i punti $P_0(h)=(0,h,0,1)$, $P_1(h)=(-1,2h,1,2)$, $Q_0=(2,-1,1,1)$, $R_0=(0,1,1,0)$ e l'iperpiano p: $2x_1-x_2+x_3=0$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare equazioni parametriche della retta r_h passante per i punti $P_0(h)$ e $P_1(h)$.

(b) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per il punto Q_0 e perpendicolare all'iperpiano p.

(c) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale le rette r_h e s risultino incidenti.

(d) Indicata semplicemente con r la retta corrispondente al valore h_0 del parametro h di cui al punto precedente, determinare equazioni cartesiane del piano q che contiene le rette r e s.

(e) Determinare la distanza $d(R_0,s)$ del punto R_0 dalla retta s.

Soluzione

(a) Equazioni in forma di rapporti uguali della retta r_h sono $x_1/(-1)=(x_2-h)/h=x_3/1=(x_4-1)/1$ e quindi equazioni parametriche di r_h sono $x_1=-t$, $x_2=h+ht$, $x_3=t$, $x_4=1+t$, $t\in\boldsymbol{R}$.

(b) Coefficienti di giacitura dell'iperpiano p sono $(a_1,a_2,a_3,a_4)=(2,-1,1,0)$. Allora la condizione di perpendicolarità tra l'iperpiano p e la retta s implica che parametri direttori di s sono, per esempio, $(l_1,l_2,l_3,l_4)=(2,-1,1,0)$. Pertanto equazioni della retta s in forma di rapporti uguali sono $(x_1-2)/2=(x_2+1)/(-1)=(x_3-1)/1=(x_4-1)/0$ onde equazioni cartesiane di s sono, per esempio, $x_1-2x_3=0$, $x_2+x_3=0$, $x_4-1=0$.

(c) Osserviamo anzitutto che le rette r_h ed s non sono parallele per nessun valore di h perché le quaterne di parametri direttori $(-1,h,1,1)$ e $(2,-1,1,0)$, rispettivamente di r_h ed s, non sono mai proporzionali. Allora le rette r_h ed s possono essere soltanto incidenti o sghembe. Pertanto, per determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali le rette r_h ed s risultino incidenti, è sufficiente imporre che l'intersezione di tali rette non sia vuota. Determiniamo dunque i valori del parametro h per cui tale intersezione non è vuota. Un punto generico della retta r_h ha coordinate cartesiane $x_1=-t$, $x_2=h+ht$, $x_3=t$, $x_4=1+t$. Andando a sostituire tali coordinate nelle equazioni cartesiane della retta s, si ha il sistema lineare $-t-2t=0$, $h+ht+t=0$ nelle incognite h e t che è compatibile per h=0 e quindi la suddetta intersezione non è vuota per h=0. Allora la retta r_h e la retta s risultano incidenti per h=0. Pertanto il valore richiesto del parametro h è $h_0=0$.

(d) Intanto la retta r ha equazioni parametriche $x_1=-t$, $x_2=0$, $x_3=t$, $x_4=1+t$. Si ha immediatamente che le rette r ed s si incontrano nel punto A=(0,0,0,1), che si ottiene per t=0. Allora il piano q può essere ottenuto come piano passante per il punto A e di giacitura W=Span(v,w), essendo v=(-1,0,1,1) e w=(2,-1,1,0) vettori direttori, rispettivamente, di r e di s. Imponendo che la matrice avente come righe, rispettivamente, (x_1,x_2,x_3,x_4-1), (-1,0,1,1) e (2,-1,1,0) abbia rango minore di tre, si ha che equazioni cartesiane del piano q sono, per esempio, $x_1+3x_2+x_3=0$, $x_1+2x_2+x_4-1=0$.

(e) La distanza $d(R_0,s)$ può essere ottenuta come distanza del punto R_0 dal punto N ottenuto intersecando la retta s con l'iperpiano passante per R_0 e perpendicolare ad s. Ma R_0 appartiene all'iperpiano p e tale iperpiano per costruzione è perpendicolare ad s, allora N è intersezione di s e p. Mettendo a sistema le equazioni cartesiane di s e di p e risolvendo si ha N=(0,0,0,1)=A. Risulta $d(R_0,s)=d(R_0,N)=d(R_0,A)=(1+1+1)^{1/2}=3^{1/2}$.

1.2 Spazio vettoriale reale V di dimensione tre. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3)$. Sia assegnata la funzione reale $b:V\times V\to\boldsymbol{R}$, tale che $b(v,w)=2x_1y_1+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+2x_2y_2+x_2y_3+x_3y_1+x_3y_2+2x_3y_3$, essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$ e $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3$.

(a) Verificare che la funzione reale b è una forma bilineare reale, simmetrica e definita positiva, ossia che la funzione reale b è un prodotto scalare.

(b) Posto per comodità $b(v,w)=\langle v,w\rangle$, indicare l'espressione di $|v|$.

(c) Determinare l'angolo convesso $v'\hat{\ }w'$, essendo $v'=v_1-v_2$, $w'=v_2-v_3$.

(d) Determinare la base ortonormale $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ ottenuta a partire dalla base B_V applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt e normalizzando.

(e) Assegnato il sottospazio vettoriale $U:x_1+x_2+2x_3=0,\ 2x_1+x_2+3x_3=0$, determinare equazioni cartesiane di $W=U^\perp$.

(f) Determinare il vettore $S_W(\tilde{v})$ immagine del vettore $\tilde{v}=v_2+v_3$ nella simmetria ortogonale $S_W:V\to V$ di V rispetto a W.

Soluzione

(a) Considerata la matrice simmetrica reale A avente come righe $A^{(1)}=(2,1,1)$, $A^{(2)}=(1,2,1)$, $A^{(3)}=(1,1,2)$, risulta immediatamente $b(v,w)={}^tXAY$, essendo ${}^tX=(x_1,x_2,x_3)$ e ${}^tY=(y_1,y_2,y_3)$. Allora, come noto, la funzione reale b risulta essere una forma bilineare simmetrica reale. La forma quadratica reale $q:V\to\boldsymbol{R}$, associata a b, è tale che $q(v)=2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2+x_3)^2$. Essendo $q(v)$ una somma di quadrati, si ha che $q(v)\geq 0$ per ogni $v\in V$. Inoltre $q(v)=0$ implica $x_1+x_2=0$, $x_1+x_3=0$, $x_2+x_3=0$ e quindi $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, onde $v=0$. Pertanto la forma quadratica reale q, e quindi la forma bilineare simmetrica b, è definita positiva. Si ha dunque che la funzione reale b è un prodotto scalare in V.

(b) Posto, come richiesto, $b(v,w)=\langle v,w\rangle$, ossia
$\langle v,w\rangle=2x_1y_1+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+2x_2y_2+x_2y_3+x_3y_1+x_3y_2+2x_3y_3$,
si ha
$|v|=\langle v,v\rangle^{1/2}=(2x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2)^{1/2}=((x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2+x_3)^2)^{1/2}$.

(c) Risulta $\cos v'\hat{\ }w'=\langle v',w'\rangle/(|v'|\,|w'|)=-1/2\Rightarrow v'\hat{\ }w'=(2/3)\pi$,

(d) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, applicato alla base B_V, dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=$
$v_2-(1/2)v_1=-(1/2)v_1+v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=$
$v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,-(1/2)v_1+v_2\rangle/\langle -(1/2)v_1+v_2,-(1/2)v_1+v_2\rangle)(-(1/2)v_1+v_2)=$
$v_3-(1/2)v_1-(1/3)(-(1/2)v_1+v_2)=-(1/3)v_1-(1/3)v_2+v_3$.
Risultando poi $|w_1|=|v_1|=2^{1/2}$, $|w_2|=|-(1/2)v_1+v_2|=3^{1/2}/2^{1/2}$,
$|w_3|=|-(1/3)v_1-(1/3)v_2+v_3|=2/3^{1/2}$, si ha che la base ortonormale richiesta B_V' è costituita dai vettori $v_1'=w_1/|w_1|=(1/2^{1/2})v_1$, $v_2'=w_2/|w_2|=-(1/6^{1/2})v_1+(2^{1/2}/3^{1/2})v_2$,
$v_3'=w_3/|w_3|=-(3^{1/2}/6)v_1-(3^{1/2}/6)v_2+(3^{1/2}/2)v_3$.

(e) Risulta facilmente $U==\{t(v_1+v_2-v_3)|t\in\boldsymbol{R}\}$, con base costituita dal solo vettore $u=v_1+v_2-v_3$, quindi U è una retta vettoriale. Si ha allora $W=U^\perp=u^\perp:2x_1+x_1-x_1+x_2+2x_2-x_2+x_3+x_3-2x_3=0$, ossia $W:2x_1+2x_2=0$, ovvero $W:x_1+x_2=0$ e quindi W è un piano vettoriale.

(f) Essendo $W^\perp=U$ ed il vettore $u'=u/|u=(1/2)v_1+(1/2)v_2-(1/2)v_3$ una base ortonormale di U, risulta $S_W(\tilde{v})=\tilde{v}-2P_U(\tilde{v})=\tilde{v}-2\langle\tilde{v},u'\rangle u'=$
$v_2+v_3-2\langle v_2+v_3,(1/2)v_1+(1/2)v_2-(1/2)v_3\rangle((1/2)v_1+(1/2)v_2-(1/2)v_3)=v_2+v_3-(v_1+v_2-v_3)=-v_1+2v_3$.

-

2.1. <u>Spazio euclideo numerico $\boldsymbol{E^4}$. Riferimento cartesiano canonico</u> RC($O;e_1,e_2,e_3,e_4$). Siano assegnati i punti A(h)=(0,0,h,1), B(h)=(-1,1,2h,,2), D=(2,1,-1,1), D=(0,1,1,0) e l'iperpiano p: $2x_1+x_2-x_3=0$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare equazioni parametriche della retta r_h passante per i punti A(h) e B(h).
(b) Determinare equazioni cartesiane della retta s passante per il punto C e perpendicolare all'iperpiano p.
(c) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale le rette r_h ed s risultino incidenti.
(d) Indicata semplicemente con r la retta corrispondente al valore h_0 del parametro h di cui al punto precedente, determinare equazioni cartesiane del piano q che contiene le rette r ed s.
(e) Determinare la distanza d(D,s) del punto D dalla retta s.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio 1.1 si ha:
(a) equazioni parametriche di r_h sono $x_1=-t$, $x_2=t$, $x_3=h+ht$, $x_4=1+t$, $t\in\boldsymbol{R}$;
(b equazioni cartesiane di s sono, per esempio, $x_1-2x_2=0$, $x_2+x_3=0$, $x_4-1=0$;
(c) $h_0=0$;
(d) equazioni cartesiane di q sono, per esempio, $x_1+x_2+3x_3=0$, $x_1+2x_3+x_4-1=0$.
(e) $d(D,s)=3^{1/2}$.

2.2 <u>Spazio vettoriale reale V di dimensione tre. Base</u> $B_V=(v_1,v_2,v_3)$. Sia assegnata la funzione reale $b:V\times V\rightarrow\boldsymbol{R}$, tale che $b(v,w)=2x_1y_1-x_1y_2+x_1y_3-x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2+2x_3y_3$, essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$ e $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3$.

(a) Verificare che la funzione reale b è una forma bilineare reale, simmetrica e definita positiva, ossia che la funzione reale b è un prodotto scalare.
(b) Posto per comodità b(v,w)=<v,w>, indicare l'espressione di |v|.
(c) Determinare l'angolo convesso $v'\hat{}w'$, essendo $v'=-v_1+v_3$, $w'=v_2+v_3$.
(d) Determinare la base ortonormale $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ ottenuta a partire dalla base B_V applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt e normalizzando.
(e) Assegnato il sottospazio vettoriale $U:x_1+2x_2-x_3=0$, $x_1-x_2+2x_3=0$, determinare equazioni cartesiane di $W=U^\perp$.
(f) Determinare il vettore $S_W(\tilde{v})$ immagine del vettore $\tilde{v}=v_1-v_3$ nella simmetria ortogonale $S_W:V\rightarrow V$ di V rispetto a W.

Soluzione

(a) Considerata la matrice simmetrica reale A avente come righe $A^{(1)}=(2,-1,1)$, $A^{(2)}=(-1,2,-1)$, $A^{(3)}=(1,-1,2)$, risulta immediatamente $b(v,w)={}^tXAY$, essendo ${}^tX=(x_1,x_2,x_3)$ e ${}^tY=(y_1,y_2,y_3)$. Allora, come noto, la funzione b, che è reale per ipotesi, risulta essere una forma bilineare simmetrica reale. La forma quadratica reale $q:V\rightarrow\boldsymbol{R}$, associata a b, è tale che $q(v)=2x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2=(x_1-x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2-x_3)^2$. Essendo q(v) una somma di quadrati, si ha che $q(v)\geq0$ per ogni $v\in V$. Inoltre q(v)=0 implica $x_1-x_2=0$, $x_1+x_3=0$, $x_2-x_3=0$ e quindi $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, onde v=0. Pertanto la forma quadratica reale q, e quindi la forma bilineare simmetrica reale b, è definita positiva. Si ha dunque che la funzione reale b è un prodotto scalare in V.
(b) Posto, come richiesto, $b(v,w)=\langle v,w\rangle$, ossia
$\langle v,w\rangle=2x_1y_1-x_1y_2+x_1y_3-x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2+2x_3y_3$,
si ha
$|v|=\langle v,v\rangle^{1/2}=(2x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2)^{1/2}=((x_1-x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_2-x_3)^2)^{1/2}$.
(c) Risulta $\cos v'\hat{}w'=\langle v',w'\rangle/(|v'|\,|w'|)=1/2\Rightarrow v'\hat{}w'=(1/3)\pi$,

(d) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, applicato alla base B_V, dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=$ $v_2+(1/2)v_1=(1/2)v_1+v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=$
$v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,(1/2)v_1+v_2\rangle/\langle(1/2)v_1+v_2,(1/2)v_1+v_2\rangle)((1/2)v_1+v_2)=$
$v_3-(1/2)v_1+(1/3)((1/2)v_1+v_2)= v_3-(1/2)v_1+(1/6)v_1+(1/3)v_2=-(1/3)v_1+(1/3)v_2+v_3$.
Risultando poi $|w_1|=|v_1|=2^{1/2}$, $|w_2|=|(1/2)v_1+v_2|=3^{1/2}/2^{1/2}$,
$|w_3|=|-(1/3)v_1+(1/3)v_2+v_3|=2/3^{1/2}$, si ha che la base ortonormale richiesta B_V' è costituita dai vettori $v_1'=w_1/|w_1|=(1/2^{1/2})v_1$, $v_2'=w_2/|w_2|=-(1/6^{1/2})v_1+(2^{1/2}/3^{1/2})v_2$,
$v_3'=w_3/|w_3|=-(3^{1/2}/6)v_1+(3^{1/2}/6)v_2+(3^{1/2}/2)v_3$.
(e) Risulta facilmente $U=\{t(v_1-v_2-v_3)|t\in\boldsymbol{R}\}$, con base costituita dal solo vettore $u= v_1-v_2-v_3$, quindi U è una retta vettoriale. Si ha allora $W=U^\perp=u^\perp:2x_1+x_1-x_1-x_2-2x_2+x_2+x_3+x_3-2x_3=0$, ossia $W:2x_1-2x_2=0$, ovvero $W:x_1-x_2=0$ e quindi W è un piano vettoriale.
(f) Essendo $W^\perp=U$ ed il vettore $u'=u/|u|=(1/2)v_1-(1/2)v_2-(1/2)v_3$ una base ortonormale di U, risulta $S_W(\tilde{v})=\tilde{v}-2P_U(\tilde{v})=\tilde{v}-2\langle\tilde{v},u'\rangle u'=$
$v_1-v_3-2\langle v_1-v_3,(1/2)v_1-(1/2)v_2-(1/2)v_3\rangle((1/2)v_1-(1/2)v_2-(1/2)v_3)=v_1-v_3-(v_1-v_2-v_3)=v_2$.