ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Co)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e soluzioni della Prova scritta del 29–1-2014

1. Spazio euclideo ordinario. Riferimento cartesiano RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti A(-1,0,1) e B(0,1,1), la retta r:x-y+2z-1=0, x+2y-z+2=0 ed il piano p:x-z+1=0.
(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano q passante per il punto A e perpendicolare alla retta r.
(b) Detta r_1 la retta passante per i punti A e B, verificare che essa è contenuta nel piano q.
(c) Determinare equazioni parametriche della retta r_2 passante per il punto B, contenuta nel piano q e perpendicolare alla retta r_1.
(d) Determinare equazioni cartesiane della retta r_3 passante per il punto A, incidente la retta r_2 e parallela al piano p.
(e) Determinare le coordinate del punto d'incidenza $C=r_2\cap r_3$.
(f) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r_4 passante per l'origine O e parallela ai piani p e q.
(g) Detto D il punto il punto generico della retta r_4, calcolare il volume *V* del tetraedro ABCD al variare del punto D sulla retta r_4.
(h) Giustificare geometricamente il risultato ottenuto nel quesito (g).

Soluzione

(a) Si ha facilmente che parametri direttori della retta r sono, per esempio, (1,-1,-1). Allora il piano q passante per il punto A(-1,0,1) e perpendicolare alla retta r ha equazione cartesiana x+1-y-(z-1)=0, ossia x-y-z+2=0.
(b) Il punto A appartiene al piano q per costruzione ed il punto B appartiene al piano q perché le sue coordinate cartesiane soddisfano l'equazione cartesiana di tale piano. Allora la retta r_1 è contenuta nel piano q in quanto *una qualunque retta avente in comune con un piano due punti distinti è contenuta nel piano*.
(c) Parametri direttori della retta r_1 sono, per esempio, le coordinate (1,1,0) del vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato AB. Allora imponendo alla retta generica passante per il punto B, avente equazioni in forma di rapporti uguali $x/l_2=(y-1)/m_2=(z-1)/n_2$, di essere contenuta nel piano q e di essere perpendicolare alla retta r_1, si hanno le due condizioni $l_2-m_2-n_2=0$, $l_2+m_2=0$, che danno, per esempio, $(l_2,m_2,n_2)=(1,-1,2)$. Pertanto equazioni parametriche di r_2 sono, per esempio, $x=t_2$, $y=1-t_2$, $z=1+2t_2$, $t_2\in\boldsymbol{R}$.
(d) Una retta generica passante per il punto A(-1,0,1) ed incidente la retta r_2 ha equazioni in forma di rapporti uguali $(x+1)/(t_2+1)=y/(1-t_2)=(z-1)/(2t_2)$. Imponendo a tale retta di essere parallela al piano p:x-z+1=0, si ha la condizione t_2+1-2t_2, ossia $-t_2+1=0$, che dà $t_2=1$ e quindi equazioni cartesiane della retta r_3 sono x-z+2=0, y=0.
(e) Il punto d'incidenza $C=r_2\cap r_3$ è ovviamente il punto della retta r_2 che si ottiene per $t_2=1$ e quindi ha coordinate cartesiane (1,0,3).
(f) La retta r_4 può essere ottenuta come intersezione dei piani p´ e q´ passanti per l'origine O e paralleli rispettivamente ai piani p e q. Essendo p´:x-z=0 e q´:x-y-z=0, si ha che equazioni cartesiane di r_4 sono, per esempio, x-z=0, x-y-z=0, ovvero x-z=0, y=0. Allora equazioni parametriche di r_4 sono, per esempio, $x=t_4$, $y=0$, $z=t_4$, $t_4\in\boldsymbol{R}$.
(g) Un punto generico D della retta r_4 ha coordinate $(t_4,0,t_4)$, $t_4\in\boldsymbol{R}$. Essendo (1,1,0), (2,0,2), $(t_4+1,0,t_4-1)$, $t_4\in\boldsymbol{R}$, le coordinate dei vettori geometrici rappresentati rispettivamente dai segmenti orientati AB, AC, AD, il volume *V* del tetraedro ABCD, essendo uguale ad un sesto del modulo del prodotto misto di tali vettori, risulta essere uguale ad un sesto

del modulo del determinante della matrice quadrata che ha come righe (1,1,0), (2,0,2), (t_4+1,0,t_4-1). Eseguendo i calcoli si ha allora $V=|4|/6=2/3$ e quindi tale volume è costante.

(h) Il volume V risulta costante al variare del punto E sulla retta r_4 perché tale retta è parallela, per costruzione, al piano q che contiene la base ABC del tetraedro.

2. Spazi vettoriali euclidei numerici $V=\boldsymbol{R}^4$ e $W=\boldsymbol{R}^3$. Sia F_h:V→W l'applicazione lineare tale che $F_h(v)=(x_1-hx_3+x_4,x_1+x_2-x_4,hx_1+x_2-2x_3)$, essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ed h un parametro reale.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'applicazione lineare F_h non sia surgettiva.

(b) Indicata semplicemente con F l'applicazione lineare associata al valore h_0 del parametro di cui al quesito precedente, determinare la dimensione ed una base del nucleo Ker(F) dell'applicazione lineare F.

(c) Determinare la dimensione ed una base dell'immagine Im(F) dell'applicazione lineare F.

(d) Determinare equazioni cartesiane dell'immagine Im(F).

(e) Posto per semplicità U=Ker(F), determinare la dimensione ed una base ortonormale del sottospazio vettoriale $U^{\perp}$ ortogonale ad U.

Soluzione

(a) La matrice A_h associata all'applicazione lineare F_h, rispetto alle basi canoniche di V e W ha come righe $A_h^{(1)}=(1,0,-h,1)$, $A_h^{(2)}=(1,1,0,-1)$, $A_h^{(3)}=(h,1,-2,0)$. E' noto che un'applicazione lineare non è surgettiva se e soltanto se il suo rango è minore della dimensione del codominio, che nel nostro caso è 3. Calcoliamo dunque il rango $rg(A_h)$ al variare del parametro h. Considerato il minore B, del secondo ordine, costituito dagli elementi d'incontro delle prime due righe con le prime due colonne della matrice A_h, si ha subito che è $\det(B)=1\neq0$ indipendentemente dal valore di h. Allora per ogni valore di h è $2\leq rg(A_h)\leq3$. Orlando il minore B con la terza riga e la terza colonna di A_h, si ha un minore il cui determinante è h^2-h-2 che si annulla per h=-1 e per h=2. Orlando il minore B con la terza riga e la quarta colonna di A_h, si ha un minore il cui determinante vale 2-h e che quindi si annulla per h=2. Allora per il Teorema di Kronecker risulta $rg(A_h)=2$ per h=2 e $rg(A_h)=3$ per $h\neq2$. Pertanto il valore richiesto h_0 del parametro è h=2.

(b) Per $h=h_0=2$ risulta $F(v)=(x_1-2x_3+x_4,x_1+x_2-x_4,2x_1+x_2-2x_3)$. Equazioni cartesiane del nucleo Ker(F) sono $x_1-2x_3+x_4=0$, $x_1+x_2-x_4=0$, $2x_1+x_2-2x_3=0$. Il sistema costituito da tali equazioni lineari omogenee ha come matrice associata la matrice A, che si ottiene ponendo $h=h_0=2$ nella matrice A_h considerata nello svolgimento del quesito precedente. Allora, essendo rg(A)=2, si ha anzitutto dim(Ker(F))=dim(V)-rg(A)= 4-2=2. Fissata l'attenzione sul minore B di A, si ha che il sistema lineare omogeneo lineare che rappresenta Ker(F) risulta equivalente al sistema lineare omogeneo $x_1-2x_3+x_4=0$, $x_1+x_2-x_4=0$. Tale sistema, posto $x_3=t_1$, $x_4=t_2$, dà immediatamente $x_1=2t_1-t_2$, $x_2=-2t_1+2t_2$ e quindi $Ker(F)=\{(2t_1-t_2,-2t_1+2t_2,t_1,t_2)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}=\{(t_1(2,-2,1,0)+t_2(-1,2,0,1)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$. Allora una base di Ker(F) è costituita dai vettori $u_1=(2,-2,1,0)$ e $u_2=(-1,2,0,1)$.

(c) Essendo rg(A)=2, si ha anzitutto che è dim(Im(F))=2. Una base di Im(F) puà essere ottenuta estraendo due vettori indipendenti dal sistema di generatori di Im(F) costituito dai vettori di W che hanno come colonne delle coordinate le colonne della matrice A. Allora, essendo indipendenti le prime due colonne di A, si ha che una base di Im(F) è costituita dai due vettori $w_1=(1,1,2)$ e $w_2=(0,1,1)$.

(d) Im(F) ha codimensione 1, quindi può essere rappresentato da una sola equazione cartesiana. Considerata la matrice quadrata che ha come righe (y_1,y_2,y_3), (1,1,2), (0,1,1), essendo y_1, y_2, y_3 tre incognite, e imponendo che il suo determinante sia nullo si ha Im(F):$y_1+y_2-y_3=0$.

(e) Posto U=Ker(F), si ha anzitutto che risulta $\dim(U^\perp)=\dim(V)-\dim(U)=4-2=2$. Per ottenere una base di $U^\perp$, ricordiamo che, come visto nel corso dello svolgimento del quesito (a), U può essere rappresentato dal sistema lineare omogeneo $x_1-2x_3+x_4=0$, $x_1+x_2-x_4=0$. Allora, stante il significato dei coefficienti delle incognite di una equazione lineare omogena, si ha che una base di $U^\perp$ è costituita dai due vettori $v_1=(1,0,-2,1)$ e $v_2=(1,1,0,-1)$. Tali vettori sono ortogonali rispetto al prodotto scalare standard perché il loro prodotto scalare standard è nullo. Allora (v_1,v_2) è una base ortogonale di $U^\perp$. Normalizzando tale base, si ha la base ortonormale (v_1',v_2') di $U^\perp$, essendo $v_1'=(1/6^{1/2},0,-2/6^{1/2},1/6^{1/2})$, $v_2'=(1/3^{1/2},1/3^{1/2},0,-1/3^{1/2})$.