ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Ca)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova scritta del 27–1-2015

1. Spazio euclideo ordinario ***E***. Riferimento cartesiano RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti A(0,1,-1), B_h(1,-h,0), C_h(1,0,-h), D_h(1-h,0,0), E(0,-1,0) e le rette r:2x-y-z+1=0, x+y+z-1=0, r_h:x+hz=0, y+1=0, r'_h :x-hy+1=0, z+2=0, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare il sottoinsieme H di ***R*** costituito dal valori di h in corrispondenza dei quali i punti A, B_h e C_h risultino indipendenti.

(b) Per ogni h∈H, determinare l'equazione cartesiana del piano p_1(h) generato dai tre punti A, B_h e C_h.

(c) Per ogni h∈H, determinare l'equazione cartesiana del piano p_2(h) passante per il punto D_h e parallelo alle rette r ed r_h.

(d) Per ogni h∈H, determinare l'equazione cartesiana del piano p_3(h) passante per il punto E e perpendicolare alla retta r'_h .

(e) Determinare i valori del parametro h∈H in corrispondenza dei quali l'intersezione S_h=p_1(h)∩p_2(h)∩p_3(h) sia un sottospazio affine di ***E***.

(f) Nei casi in cui S_h sia un sottospazio affine di ***E***, determinare la dimensione di S_h.

Soluzione

(a) I vettori geometrici che hanno come rappresentanti i segmenti orientati AB_h e AC_h hanno coordinate, rispettivamente, (1,-h-1,1) e (1,-1,-h+1). La matrice, che ha come colonne le colonne delle coordinate di tali vettori, ha rango 2 se e soltanto se è h≠0. Pertanto i punti A, B_h e C_h risultano indipendenti se e soltanto se è h≠0 e quindi è H=***R***\{0}.

(b) Per h∈H, l'equazione cartesiana del piano p_1(h) passante per i punti A, B_h e C_h può essere ottenuta imponendo che sia nullo il determinante della matrice quadrata avente come righe, rispettivamente, (x,y-1,z+1), (1,-h-1,1), (1,-1,-h+1). Sviluppando tale determinante, si ha p_1(h):h^2x+h(y-1)+h(z+1)=0, ossia, avendo supposto h≠0, p_1(h):hx+y+z=0.

(c) Le rette r ed r_h hanno, rispettivamente, come parametri direttori (l,m,n)=(0,1,-1) e (l_h,m_h,n_n)=(h,0,-1). L'equazione cartesiana del piano p_2(h), passante per il punto D_h e parallelo alle rette r ed r_h, può essere ottenuta uguagliando a zero il determinante della matrice quadrata che ha come righe, rispettivamente, (x-h+1,y,z,), (0,1,-1), (h,0,-1). Si ha allora p_2(h):-(x-1+h)-hy-hz=0, ossia p_2(h):x+hy+hz+h-1=0.

(d) Parametri direttori della retta r'_h sono, per esempio, (l'_h,m'_h,n'_h)=(h,1,0). Allora l'equazione cartesiana del piano p_3(h) passante per il punto E e perpendicolare alla retta r'_h è h·(x-0)+1·(y+1)+0·(z-0)=0, ossia hx+y+1=0.

(e) L'intersezione S_h=p_1(h)∩p_2(h)∩p_3(h) è un sottospazio affine di ***E*** se e soltanto il sistema lineare hx+y+z=0, x+hy+hz+h-1=0, hx+y+1=0, h∈H, che la rappresenta, è compatibile. Studiamo dunque la compatibilità di tale sistema. La matrice incompleta A_h del sistema, che ha come righe, rispettivamente, (h,1,1), (1,h,h), (h,1,0), ha determinante uguale a 1-h^2. Tale determinante è nullo se e soltanto se è h=±1. Allora per h∈H\{-1,1} il rango della matrice incompleta A_h è 3. Per tali valori di h, anche la matrice completa A'_h ha rango 3 perché essa, avendo tre righe, non può avere rango maggiore di 3 né, d'altra parte, può avere rango minore di 3 perché A_h è una sua sottomatrice. Allora se h∈H\{-1,1}, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile.

Esaminiamo ora il caso h=-1. Per tale valore di h, la matrice incompleta ha come righe, rispettivamente, (-1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,0). Essendo le prime due righe proporzionali e la prima e terza riga non proporzionali e quindi linearmente indipendenti, si ha allora $rg(A_{-1})=2$. La matrice completa A'_{-1}, che ha come righe, rispettivamente, (-1,1,1,0), (1,-1,-1,2), (-1,1,0,-1), ha invece rango 3 perché ha minori del terzo ordine con determinante non nullo, per esempio quello ottenuto cancellando la prima colonna il cui determinante è 2. Allora, se h=-1, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è incompatibile.

Consideriamo infine il caso di h=1. In questo caso, la matrice incompleta A_1 ha come righe, rispettivamente, (1,1,1), (1,1,1), (1,1,0) e quindi, ragionando come sopra, risulta $rg(A_1)=2$. La matrice completa A'_1 ha come righe, rispettivamente, (1,1,1,0), (1,1,1,0), (1,1,0,-1) e quindi, ragionando come per la matrice incompleta, si ha che è anche $rg(A'_1)=2$. Allora, se è h=1, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile. In definitiva l'intersezione $S_h=p_1(h)\cap p_2(h)\cap p_3(h)$ è un sottospazio affine di $\boldsymbol{E}$ per ogni $h\in H\setminus\{-1\}$.

(f) Per $h\in H\setminus\{-1,1\}$, essendo $rg(A_h)=3$, risulta $\dim(S_h)=\dim(\boldsymbol{E})-rg(A_h)=3-3=0$ e quindi il sottospazio affine S_h è un punto.
Per h=1, risulta $\dim(S_1)=\dim(\boldsymbol{E})-rg(A_1)=3-2=1$ onde il sottospazio affine S_1 è una retta.

2. <u>Spazio vettoriale euclideo numerico</u> $V=\boldsymbol{R}^4$. <u>Base canonica</u> $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$. Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\to V$ di equazioni cartesiane $y_1=-x_1$, $y_2=(-1/3)x_2+(2/3)x_3+(2/3)x_4$, $y_3=(2/3)x_2+(-1/3)x_3+(2/3)x_4$, $y_4=(2/3)x_2+(2/3)x_3+(-1/3)x_4$.

(a) Determinare la matrice A associata all'endomorfismo F rispetto alla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ di V.

(b) Determinare gli autovalori dell'endomorfismo F indicandone le rispettive molteplicità algebriche.

(c) Determinare una base di ciascun autospazio e dedurne la diagonalizzabilità dell'endomorfismo F.

(d) Verificare che autospazi associati ad autovalori distinti dell'endomorfismo F sono a due a due ortogonali.

(e) Determinare una base ortonormale di ciascun autospazio.

(f) Determinare una base ortonormale $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3,v'_4)$ di V costituita da autovettori rispetto all'endomorfismo F.

(g) Determinare la matrice diagonale A′, associata all'endomorfismo F rispetto alla base ortonormale di autovettori $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3,v'_4)$ di V, e una matrice invertibile C tale che $A'=C^{-1}AC$.

(h) Dire di che tipo è la matrice C, giustificando la risposta.

Soluzione

(a) La matrice A associata all'endomorfismo F, rispetto alla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ di V, ha come righe $A^{(1)}=(-1,0,0,0)$, $A^{(2)}=(0,-1/3,2/3,2/3)$, $A^{(3)}=(0,2/3,-1/3,2/3)$, $A^{(4)}=(0,2/3,2/3,-1/3)$.

(b) L'equazione caratteristica dell'endomorfismo F è $\det(A-\lambda I)=0$, ossia $-(\lambda+1)(-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1)=0$, ovvero $(\lambda+1)^3(\lambda-1)=0$. Da tale equazione si trae che gli autovalori dell'endomorfismo F sono $\lambda_1=-1$, con molteplicità algebrica $a_1=3$, e $\lambda_2=1$, con molteplicità algebrica $a_2=1$.

(c) L'autospazio V_{-1}, associato all'autovalore $\lambda_1=-1$, è rappresentato dal sistema di equazioni cartesiane 0=0, $(2/3)x_2+(2/3)x_3+(2/3)x_4=0$, $(2/3)x_2+(2/3)x_3+(2/3)x_4=0$, $(2/3)x_2+(2/3)x_3+(2/3)x_4=0$. Si ha allora

$V_{-1}=\{t_1(1,0,0,0)+t_2(0,-1,1,0)+t_3(,0,-1,0,1)|t_1,t_2,t_3 \in \boldsymbol{R}\}$. Pertanto una base dell'autospazio V_{-1} è costituita dagli autovettori $v_1=(1,0,0,0)$, $v_2=(0,-1,1,0)$, $v_3=(0,-1,0,1)$.

Indicato poi con V_1 l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_2=1$, si ha V_1:$-2x_1=0$, $-(4/3)x_2+(2/3)x_3+(2/3)x_4=0$, $(2/3)x_2-(4/3)x_3+(2/3)x_4=0$, $(2/3)x_2+(2/3)x_3-(4/3)x_4=0$ e quindi $V_1=\{t(0,1,1,1)|t \in \boldsymbol{R}$. Allora una base di V_1 è costituita dal solo autovettore $v_4=(0,1,1,1)$. Essendo una base di V_{-1} costituita da tre autovettori ed una base di V_1 costituita da un solo autovettore, si ha $\dim(V_{-1})=3$ e $\dim(V_1)=1$. Indicate con g_1 e g_2 rispettivamente le molteplicità geometriche degli autovalori λ_1 e λ_2 si ha pertanto $g_1=\dim(V_{-1})=3$ e $g_2=\dim(V_1)=1$. Così per ogni autovalore la molteplicità geometrica uguaglia la rispettiva molteplicità algebrica e risultando anche $a_1+a_2=4=\dim(V)$ l'endomorfismo F è diagonalizzabile.

(d) Indicato, come al solito con $v \cdot w$ il prodotto scalare standard di due vettori di V, si ha subito $v_4 \cdot v_1=0$, $v_4 \cdot v_2=0$, $v_4 \cdot v_3=0$, ossia ogni autovettore della base (v_4) di V_1 è ortogonale ad ogni autovettore della base (v_1,v_2,v_3) di V_{-1}. Allora gli autospazi V_{-1} e V_1 sono ortogonali.

(e) La base di autovettori (v_1,v_2,v_3) di V_{-1} non è ortogonale perché risulta $v_2 \cdot v_3=1\neq 0$. Per ottenere una base ortogonale di autovettori di V_{-1} applichiamo il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt a tale base. Tale procedimento dà la base ortogonale di autovettori (w_1,w_2,w_3), essendo $w_1=v_1=(1,0,0,0)$, $w_2=v_2-((v_2 \cdot w_1)/(w_1 \cdot w_1))w_1=(0,-1,1,0)$,
$w_3=v_3-((v_3 \cdot w_1)/(w_1 \cdot w_1))w_1-((v_3 \cdot w_2)/(w_2 \cdot w_2))w_2=(0,-1,0,1)-(1/2)(0,-1,1,0)=$
$(0,-1/2,-1/2,1)$. Normalizzando la base ortogonale (w_1,w_2,w_3) di autovettori di V_{-1}, si ha la base ortonormale (v'_1,v'_2,v'_3) di autovettori di V_{-1}, essendo $v'_1=w_1/|w_1|=(1,0,0,0)$, $v'_2=w_2/|w_2|=(0,-1/2^{1/2},1/2^{1/2},0)$, $v'_3=w_3/|w_3|=$ $(0,-2^{1/2}/2 \cdot 3^{1/2},-2^{1/2}/2 \cdot 3^{1/2},2^{1/2}/3^{1/2})$.

Per quanto riguarda l'autospazio V_1 osserviamo anzitutto che la sua base (v_4) di autovettori, essendo costituita da un solo vettore, è banalmente ortogonale. Normalizzando tale base si ha allora la base ortonormale (v'_4) di autovettori di V_1, essendo $v'_4= v_4/|v_4|=(0,1/3^{1/2},1/3^{1/2},1/3^{1/2})$.

(f) La base $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3,v'_4)$ di V, costituita dagli autovettori unitari determinati al punto precedente, è ortogonale. Infatti il prodotto scalare standard di due di tali autovettori unitari distinti è nullo sia se essi appartengono ad uno stesso autospazio (vedere il punto (e)) sia se essi appartengono ad autospazi distinti (vedere il punto (d)). Allora $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3,v'_4)$ è una base di V del tipo richiesto.

(g) La matrice diagonale A´, associata all'endomorfismo F rispetto alla base ortonormale di autovettori $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3,v'_4)$ di V, è la matrice che ha come elementi della diagonale principale $a'_{11}=a'_{22}=a'_{33}=-1$, $a'_{44}=1$. Una matrice invertibile C tale che $A'=C^{-1}AC$ è, per esempio, la matrice del cambiamento di basi nel passaggio dalla base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ alla base ortonormale di autovettori $B'_V=(v'_1,v'_2,v'_3,v'_4)$. Si tratta dunque della matrice che ha come righe, rispettivamente, $C^{(1)}=(1,0,0,0)$, $C^{(2)}=(0,-1/2^{1/2},-2^{1/2}/2 \cdot 3^{1/2},1/3^{1/2})$, $C^{(3)}=(0,1/2^{1/2},-2^{1/2}/2 \cdot 3^{1/2},1/3^{1/2})$, $C^{(4)}=(0,0,2^{1/2}/3^{1/2},1/3^{1/2})$.

(h) Tenuto presente che la base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard, si ha che la matrice C è ortogonale perché essa è matrice di un cambiamento di basi ortonormali.