ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere P-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova scritta del 25–9-2012

1. Spazio euclideo ordinario **E**. RC(O;i,j,k). Siano assegnati il piano p´:y+z=0, la retta r:2x+y-z=0, x+2y+z+1=0 ed il punto A(0,0,1).

(a) Determinare il piano p passante per il punto A, parallelo alla retta r e perpendicolare al piano p´.

(b) Determinare il punto C in cui l'asse y incontra il piano p.

(c) Determinare equazioni parametriche dell'asse s, sul piano p, del segmento AC.

(d) Determinare i punti B e D sul piano p in modo tale che il quadrilatero ABCD sia un quadrato.

(e) Calcolare il volume *V* del parallelepipedo individuato dai punti A,B,D,E, Essendo E(-4/√6,-2/√6,1+2/√6).

Soluzione

(a) Il piano generico passante per il punto A ha equazione cartesiana ax+by+c(z-1)=0, essendo a, b, c tre parametri reali non contemporaneamente nulli. Parametri direttori della retta r sono, per esempio, (l,m,n)=(1,-1,1) mentre coefficienti di giacitura del piano p´ sono (a´,b´,c´)=(0,1,1). Allora le condizioni sul piano p danno rispettivamente a-b+c=0 e b+c=0 da cui si ottiene, per esempio, (a,b,c)=(2,1,-1). Il piano p ha quindi equazione cartesiana 2x+y-(z-1)=0, ossia 2x+y-z+1=0.

(b) L'asse y ha equazioni cartesiane x=0, z=0. Mettendo a sistema tali equazioni con l'equazione del piano p e risolvendo si ha C(0,-1,0).

(c) Essendo (0,-1,-1) le coordinate del vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato AC ed M(0,-1/2,1/2) il punto medio di tale segmento, si ha che l'asse s avrà equazioni, in forma di rapporti uguali, del tipo x/l=(y+1/2)/m=(z-1/2)/n, con i parametri l, m, n, non contemporaneamente nulli, soddisfacenti il sistema -m-n=0, 2l+m-n=0. Da tale sistema si ha, per esempio, (l,m,n)=(1,-1,1). Si ha allora che equazioni parametriche dell'asse s sono:x=t, y=-1/2-t, z=1/2+t, t∈***R***.

(d) Essendo (t,-1/2-t,1/2+t) le coordinate del punto generico P(t) dell'asse s, si ha che i punti B e D si ottengono imponendo che sia d(M,P(t))=d(M,A)=d(M,C)=$(1/2)^{1/2}$, ossia $3t^2$=1/2 da cui si trae t=±1/√6. Si ha allora, per esempio, B(1/√6,-1/2-1/√6,1/2+1/√6), D(-1/√6,-1/2+1/√6,1/2-1/√6).

(e) I vettori geometrici rappresentati dai segmenti orientati AB, AD, AE hanno rispettivamente terne di coordinate (1/√6,-1/2-1/√6,-1/2+1/√6), (-1/√6,-1/2+1/√6,-1/2-1/√6), (-4/√6,-2/√6,2/√6). Considerata la matrice quadrata che ha come righe rispettivamente le suddette terne di coordinate, si ha che il volume richiesto *V* uguaglia il modulo del determinante di tale matrice. Si ha pertanto *V*=|-2|=2.

2. <u>Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base</u> $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnata la forma quadratica reale $q:V\to\boldsymbol{R}$, tale che $q(v)=2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+2x_3^2-2x_3x_4+2x_4^2$, essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4$.
(a) Verificare che la forma quadratica reale q è definita positiva.
(b) Scrivere l'espressione della forma bilineare simmetrica $b:V\times V\to\boldsymbol{R}$ polare di q e dire se la b è oppure non è un prodotto scalare su V, giustificando la risposta. Nel caso in cui la b sia un prodotto scalare su V, porre per comodità $b(v,w)=\langle v,w\rangle$ ed indicare l'espressione di $|v|$.
(c) Determinare gli angoli convessi formati dalle coppie di vettori della base B_V.
(d) Determinare la base ortonormale $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ ottenuta dalla base B_V applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
(e) Posto $Span(v_1,v_2,v_3)=U$, determinare il vettore $S(v)$ immagine del vettore $v=v_3+2v_4$ nella simmetria ortogonale rispetto a U.

Soluzione

(a) Risulta immediatamente $q(v)=2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+2x_3^2-2x_3x_4+2x_4^2=(x_1-x_2)^2+x_1^2+(x_3-x_4)^2+x_3^2+x_4^2$. Allora $q(v)$, essendo una somma di quadrati, è tale che $q(v)\geq 0$ per ogni $v\in V$. Inoltre $q(v)=0$ implica $x_1-x_2=0$, $x_1=0$, $x_3-x_4=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ e quindi $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$, onde $v=0$. Pertanto la forma quadratica reale q è definita positiva.
(b) La forma bilineare simmetrica reale $b:V\times V\to\boldsymbol{R}$, polare della forma quadratica reale q, è tale che $b(v,w)=2x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2+2x_3y_3-x_3y_4-x_4y_3+2x_4y_4$, essendo $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3+y_4v_4$. La forma bilineare simmetrica b è un prodotto scalare su V perché la forma quadratica associata q è, come verificato al punto (a), definita positiva. Posto allora $\langle v,w\rangle=b(v,w)$, si ha $\langle v,w\rangle=2x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2+2x_3y_3-x_3y_4-x_4y_3+2x_4y_4$ e quindi $|v|=\langle v,v\rangle^{1/2}=(2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+2x_3^2-2x_3x_4+2x_4^2)^{1/2}$.
(c) Risulta $\cos v_1\hat{}v_2=\langle v_1,v_2\rangle/(|v_1||v_2|)=-1/\sqrt{2}\Rightarrow v_1\hat{}v_2=(3/4)\pi$, $\cos v_1\hat{}v_3=\langle v_1,v_3\rangle/(|v_1||v_3|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_1\hat{}v_4=\langle v_1,v_4\rangle/(|v_1||v_4|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_3=\langle v_2,v_3\rangle/(|v_2||v_3|)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_4=\langle v_2,v_4\rangle/(|v_2||v_4|)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_3\hat{}v_4=\langle v_3,v_4\rangle/(|v_3||v_4|)=-1/2\Rightarrow v_3\hat{}v_4=(2/3)\pi$.
(d) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt applicato alla base B_V dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3,w_4), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=v_2+(1/2)v_1=(1/2)v_1+v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,(1/2)v_1+v_2\rangle/\langle(1/2)v_1+v_2,(1/2)v_1+v_2\rangle)((1/2)v_1+v_2)=v_3$,
$w_4=v_4-(\langle v_4,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_4,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2-\langle v_4,w_3\rangle/\langle w_3,w_3\rangle)w_3=$
$v_4-(\langle v_4,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_4,(1/2)v_1+v_2\rangle/\langle(1/2)v_1+v_2,(1/2)v_1+v_2\rangle)((1/2)v_1+v_2)(\langle v_4,v_3\rangle/\langle v_3,v_3\rangle)v_3=$
$v_4+(1/2)v_3=(1/2)v_3+v_4$.
Risultando poi $|w_1|=|v_1|=\sqrt{2}$, $|w_2|=|(1/2)v_1+v_2|=1/\sqrt{2}$, $|w_3|=|v_3|=\sqrt{2}$, $|w_4|=|(1/2)v_3+v_4|=\sqrt{3}/\sqrt{2}$, si ha che la base ortonormale richiesta B_V' è costituita dai vettori $v_1'=w_1/|w_1|=(1/\sqrt{2})v_1$, $v_2'=w_2/|w_2|=(\sqrt{2}/2)v_1+\sqrt{2}v_2$, $v_3'=w_3/|w_3|=(1/(\sqrt{2})v_3$ e $v_4'=w_4/|w_4|=(\sqrt{2}/2\sqrt{3})v_3+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_4$.
(e) Il vettore w_4 per costruzione è ortogonale ai vettori w_1, w_2, w_3 e quindi ad $U=Span(v_1,v_2,v_3)=Span(w_1,w_2,w_3)$. Allora il vettore unitario $v_4'=w_4/|w_4|=(\sqrt{2}/2\sqrt{3})v_3+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_4$ costituisce una base ortonormale di $U^\perp$. Risulta pertanto $S(v)=v-2\langle v,v_4'\rangle v_4'=v_3+2v_4-2\langle v_3+2v_4,(\sqrt{2}/2\sqrt{3})v_3+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_4\rangle((\sqrt{2}/2\sqrt{3})v_3+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_4)=$
$v_3+2v_4-(6\sqrt{2}/\sqrt{3})((\sqrt{2}/2\sqrt{3})v_3+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_4)=v_3+2v_4-2v_3-4v_4=-v_3-2v_4=-v$.