ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere Pf-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 24–9-2013

1. <u>Spazio euclideo ordinario</u> ***E***. RC(O;i,j,k). Siano assegnati il piano p:2x-y-z+1=0 e la retta r:x+y-z-1=0, x+y+2z-1=0.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano p´ contenente la retta r e perpendicolare al piano p.

(b) Determinare i punti A e B in cui il piano p´ incontra rispettivamente l'asse x e l'asse y.

(c) Determinare i punti C e D del piano p´ in modo tale che il triangolo BCD sia isoscele con base CD, abbia altezza AB ed abbia area $A=2(3^{½})$.

(d) Determinare equazioni parametriche della retta r´ passante per il punto $P_0(1,1,1)$ e perpendicolare al piano p.

(e) Determinare il volume *V* del tetraedro BCDE al variare del punto E sulla retta r´.

(f) Giustificare geometricamente il risultato ottenuto nel quesito (e).

Soluzione

(a) Il piano p´ appartiene al fascio *F* di piani avente come asse la retta r. Un'equazione cartesiana del fascio *F* è per esempio x+y-z-1+h(x+y+2z-1)=0, ossia (h+1)x+(h+1)y+(2h-1)z-h-1=0, essendo h un parametro reale. Essendo (2,-1,-1) coefficienti di giacitura del piano p, la condizione di perpendicolarità tra i piani p e p´ dà 2(h+1)-(h+1)-(2h-1)=0, ovvero h=2. Pertanto si ha p´:3x+3y+3z-3=0, ossia x+y+z-1=0.

(b) Il punto A, intersezione del piano p´ con l'asse x, ha coordinate cartesiane che si ottengono risolvendo il sistema lineare x+y+z-1=0, y=0, z=0 e quindi risulta A(1,0,0). Analogamente risolvendo il sistema lineare x+y+z-1=0, x=0, z=0 si ha B(0,1,0).

(c) I punti C e D devono appartenere anzitutto alla retta s passante per il punto A, giacente sul piano p´ e perpendicolare alla retta passante per i punti A e B che, come si può facilmente verificare, coincide con la retta r. Per ottenere la retta s, scriviamo anzitutto equazioni in forma di rapporti uguali della retta generica passante per il punto A. Tali equazioni sono (x-1)/l=y/m=z/n, dove l, m, n hanno il significato di parametri direttori della retta. Essendo A$\in$ p´, la condizione s$\subset$ p´ può essere espressa imponendo che s sia parallela a p´ e quindi che risulti l+m+n=0. La condizione di perpendicolarità tra s ed r, essendo (1,-1,0) parametri direttori di r è invece espressa da l-m=0. Il sistema lineare omogeneo costituito dalle due equazioni lineari omogenee l+m+n=0, l-m=0 dà subito (l,m,n)=(1,1,-2). Equazioni parametriche di s sono allora x=1+t, y=t, z=-2t, t$\in$***R*** e quindi il punto generico P di s ha coordinate cartesiane (1+t,t,-2t). Ora, per ottenere i punti C e D, imponiamo che l'area *A* del triangolo isoscele ABC sia uguale a $2(3^{½})$. Osservato che la lunghezza della semibase AP è $(t^2+t^2+4t^2)^{½}=(6t^2)^{½}$ e che la lunghezza di AB è $2^{½}$, si ha che deve essere $(6t^2)^{½}2^{½}= 2(3^{½})$, ossia t=±1. Allora i punti C e D richiesti sono, per esempio, i punti di coordinate cartesiane rispettivamente (0,-1,2) e (2,1,-2).

(d) La retta r´, dovendo essere perpendicolare al piano p, avrà come parametri direttori, per esempio, (l´,m´,n´)=(2,-1,-1). Equazioni parametriche di r´ sono allora x=1+2t´, y=1-t´, z=1-t´, t´$\in$***R***.

(e) Il punto generico E, variabile sulla retta r´, ha coordinate (1+2t´,1-t´,1-t´). Allora il volume *V* del tetraedro BCDE, essendo uguale ad un sesto del modulo del prodotto misto dei vettori geometrici rappresentati rispettivamente dai segmenti orientati BC, BD e BE, uguaglia un sesto del modulo del determinante della matrice avente come righe (0,-2,2), (2,0-2) e (1+2t´,-t´,1-t´) e quindi risulta *V*=4/3.

(f) Il volume V, calcolato nel punto (e), non dipende da t´ e quindi non dipende dal particolare punto E preso su r´. Tale risultato si giustifica osservando che la retta r´, essendo perpendicolare al piano p è parallela al piano p´.

2. Spazi vettoriali euclidei numerici $V=\boldsymbol{R}^4$ e $W=\boldsymbol{R}^3$. Sia $F_h:V\to W$ l'applicazione lineare tale che $F_h(v)=(x_1-x_3+hx_4,x_2+x_3-x_4,(2h+1)x_1-x_2-2x_3+(h+1)x_4)$, essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ed h un parametro reale.

- **(a)** Determinare i valori del parametro reale h in corrispondenza dei quali l'applicazione lineare F_h sia surgettiva.
- **(b)** Per ogni valore del parametro h, di cui al punto precedente, indicato con U_h il nucleo dell'applicazione surgettiva F_h, determinare equazioni cartesiane di U_h ed una base di U_h.
- **(c)** Determinare una base e la dimensione del sottospazio vettoriale $U_h^{\perp}$ ortogonale ad U_h.
- **(d)** Determinare equazioni cartesiane di $U_h^{\perp}$.

Soluzione

(a) La matrice A_h, associata all'applicazione lineare F_h rispetto alle basi canoniche di V e W, ha come righe rispettivamente $A_h^{(1)}=(1,0,-1,h)$, $A_h^{(2)}=(0,1,1,-1)$, $A_h^{(3)}=(2h+1,-1,--2,h+1)$. Allora l'applicazione lineare F_h è surgettiva se e soltanto se risulta $rg(A_h)=dim(W)=3$: Calcoliamo dunque $rg(A_h)$ al variare del parametro h. Intanto, essendo tre il numero dell righe di A_h, è $rg(A_h)\leq 3$ per ogni valore del parametro h. Inoltre per ogni valore del parametro h è $2\leq rg(A_h)$ giacché la matrice A_h contiene minori del secondo ordine a determinante non nuullo che non dipendono da h, per esempio quello, che indicheremo con C, costituito dagli elementi d'incrocio delle prime due righe e delle prime due colonne che ha determinante uguale ad 1. Orlando il minore C con la terza riga e la terza colonna di A_h, si ha un minore del terzo ordine di A_h avente come determinante 2h e quindi che si annulla se e soltanto se è h=0. Orlando invece il minore C con la terza riga e la quarta colonna di A_h si ha un minore del terzo di A_h avente come determinante $-2h^2$ e quindi che si annulla anch'esso se e soltanto se è h=0. Allora, per il teorema di Kronecker, risulta $rg(A_h)=2$ se e soltanto se è h=0 e quindi $rg(A_h)=3$ per ogni $h\neq 0$. Pertanto l'applicazione lineare F_h è surgettiva se e soltanto è $h\neq 0$.

(b) Equazioni cartesiane di U_h sono $x_1-x_3+hx_4=0$, $x_2+x_3-x_4=0$, $(2h+1)x_1-x_2-2x_3+(h+1)x_4=0$, $h\neq 0$. Tali equazioni costituiscono un sistema lineare omogeneo di tre equazioni in quattro incognite con matrice dei coefficienti delle incognite associata A_h. Orbene, essendo $rg(A_h)=3$ per ogni $h\neq 0$, si ha che tale sistema ammette ∞^1 soluzioni tra di loro proporzionali. Una soluzione non banale del sistema è data dalla quaterna $(\mathcal{A}_1(h),\mathcal{A}_2(h),\mathcal{A}_3(h),\mathcal{A}_4(h))$, dove $(\mathcal{A}_1(h),\mathcal{A}_2(h),\mathcal{A}_3(h),\mathcal{A}_4(h))$ sono i determinanti, presi a segni alterni, dei minori del terzo ordine che si ottengono rispettivamente cancellando la prima, la seconda, la terza e la quarta colonna nella matrice A_h. Osservato che i minori del terzo ordine ottenuti cancellando rispettivamente la terza e la quarta colonna di A_h coincidono con i minori del terzo ordine che orlano C, già considerati, e che quindi hanno come determinante $-2h^2$ e 2h, si ha intanto che è $\mathcal{A}_3(h)=-2h^2$ e $\mathcal{A}_4(h)=-2h$. Si ha poi subito che è $\mathcal{A}_1(h)=0$ e $\mathcal{A}_2(h)=2h^2-2h$. Lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo è allora $S_0(h)=\{t(0,h-1,-h,-1)|t\in\boldsymbol{R}\}$ e quindi, essendo $h\neq 0$, una base di U_h è, per esempio, quella costituita dal solo vettore $v_0(h)=(0,h-1,-h,-1)$.

(c) Un sistema di generatori di $U_h^{\perp}$ è costituito dai vettori riga della matrice A_h, ossia dai vettori $v_1(h)=(1,0,-1,h)$. $v_2(h)=(0,1,1,-1)$. $v_3(h)=(2h+1,-1,-2,h+1)$. Essendo tali vettori indipendenti perché tali sono le righe della matrice A_h per $h\neq 0$, si ha che essi costituiscono una base di $U_h^{\perp}$ onde è $dim(U_h^{\perp})=3$, ossia $U_h^{\perp}$ è un iperpiano vettoriale di V.

(d) Essendo $U_h^{\perp}$ un iperpiano vettoriale di V, si ha che esso può essere rappresentato da una sola equazione cartesiana. Ebbene una tale equazione cartesiana può essere ottenuta imponendo che sia nullo il determinante della matrice avente come prime tre colonne le colonne delle coordinate dei vettori $v_1(h)$. $v_2(h)$ e $v_3(h)$ e come quarta colonna la colonna delle incognite (x_1,x_2,x_3,x_4). Eseguendo i calcoli, si ha subito $U_h^{\perp}:(h-1)x_2-hx_3-x_4=0$.