ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Ca)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 23-9-2015

1. Spazio euclideo ordinario. Riferimento cartesiano RC(0;i,j,k). Siano assegnati i vettori $w_1(h)$=i-j+(h+2)k, $w_2(h)$=-i+(h+2)j+k, $w_3(h)$=-j+k, essendo h un parametro reale, e i punti P_0=(1,0,0), P_0'=(0,0,1).

(a) Determinare una base del sottospazio vettoriale W(h)=Span($w_1(h)$,$w_2(h)$,$w_3(h)$), al variare del parametro h.

(b) Detto h_0 il valore del parametro h in corrispondenza del quale il sottospazio vettoriale W(h) abbia dimensione 2 ed indicati semplicemente con w_1, w_2, w_3 e W rispettivamente i vettori $w_1(h_0)$, $w_2(h_0)$, $w_3(h_0)$ ed il sottospazio vettoriale $W(h_0)$, determinare l'equazione cartesiana del piano p passante per il punto P_0 ed avente come giacitura il sottospazio vettoriale W.

(c) Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per il punto P_0 e perpendicolare al piano p.

(d) Determinare l'equazione cartesiana del piano p´ passante per il punto P_0', perpendicolare al piano p e parallelo all'asse x.

(e) Posto r´=p∩p´, verificare che le rette r ed r´ sono sghembe.

(f) Determinare la distanza d(r,r´) delle rette sghembe r ed r´.

Soluzione

(a) La matrice quadrata del terzo ordine A_h, che ha come colonne le colonne delle coordinate dei vettori $w_1(h)$, $w_2(h)$, $w_3(h)$, ha determinante uguale a 2(h+2). Tale determinante è nullo se e soltanto se è h=-2. Da ciò segue che è rg(A_h)=3 per h $\neq$-2 e quindi per tali valori di h i vettori $w_1(h)$, $w_2(h)$, $w_3(h)$ sono linearmente indipendenti. Allora tali vettori, essendo un sistema di generatori di W_h, costituiscono una base di W_h ed è dim(W_h)=3. Per h=-2, essendo det(A_{-2})=0, i vettori $w_1(-2)$=i-j, $w_2(-2)$=-i+k, $w_3(-2)$=-j+k sono linearmente dipendenti e, per esempio, i primi due di tali vettori sono linearmente indipendenti perché non proporzionali. Pertanto, essendo i vettori $w_1(-2)$, $w_2(-2)$, $w_3(-2)$ un sistema di generatori di W_{-2}, una base di W_{-2} è costituita dai vettori $w_1(-2)$, $w_2(-2)$ ed è dim(W_{-2})=2.

(b) Da quanto stabilito nel quesito precedente, si trae che il valore richiesto del parametro h è h_0=-2. Il piano p, passante per il punto P_0 ed avente come giacitura il sottospazio vettoriale W, ha come equazione cartesiana l'equazione che si ottiene uguagliando a 0 il determinante della matrice quadrata avente come prima riga (x-1,y,z), essendo (x,y,z) le coordinate del punto generico P dello spazio euclideo ordinario, e come seconda e terza riga rispettivamente la riga delle coordinate del vettore w_1 e la riga delle coordinate del vettore w_2. Si ha, pertanto, p:(x-1)-y-z=0, ossia x+y+z-1=0.

(c) La retta r, dovendo passare per il punto P_0(1,0,0) e dovendo essere perpendicolare al piano p:x+y+z-1=0, ha equazioni, in forma di rapporti uguali, (x-1)/1=y/1=z/1. Allora equazioni cartesiane di r sono, per esempio, x-z-1=0, y-z=0.

(d) Il piano generico passante per il punto P_0'(0,0,1) ha equazione cartesiana a´x+ b´y+ c´(z-1)=0. La condizione di perpendicolarità di tale piano con il piano p:x+y+z-1=0 e la condizione di parallelismo di tale piano con l'asse x danno, rispettivamente, a´+b´+c´=0 e a´=0, ossia, per esempio, (a´,b´,c´)=(0,1,-1). Pertanto l'equazione cartesiana del piano p´ è y-(z-1)=0, ossia y-z+1=0.

(e) La retta r´=p∩p´, ha equazioni cartesiane x+y+z-1=0, y-z+1=0. Il determinante della matrice quadrata del quarto ordine associata alle equazioni cartesiane di r ed r´ vale 2, $\neq$0, e quindi le rette r ed r´ sono sghembe.

(f) La distanza $d(r,r')$ tra le rette sghembe r ed r´ uguaglia, per esempio, la distanza del punto P_0 dal piano q contenente la retta r´ e parallelo alla retta r. Per determinare il piano q consideriamo il fascio di piani *F* di asse la retta r´ e imponiamo il parallelismo con la retta r. Si ha F:$\lambda(x+y+z-1)+\mu(y-z+1)=0$, $(\lambda,\mu)\in \boldsymbol{R}^2\setminus\{0,0\}$, ossia $\lambda x+(\lambda+\mu)y+(\lambda-\mu)z-\lambda+\mu=0$. La condizione di parallelismo con la retta r dà $\lambda+(\lambda+\mu)+(\lambda-\mu)=0$, ossia $3\lambda=0$ e quindi, per esempio, $(\lambda,\mu)=(0,1)$. Allora è q:$y-z+1=0$ e quindi $d(r,r')=d(P_0,q)=|1|/2^{½}=2^{½}/2$.

2. <u>Spazio vettoriale reale</u> V <u>di dimensione quattro</u>. <u>Base</u> $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnata la forma quadratica reale $q:V\to \boldsymbol{R}$ tale che

$$q(v)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-2x_2x_3+2\,x_3^2+2x_3x_4+2x_4^2,$$

essendo $v=(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

(a) Determinare la matrice simmetrica A associata alla forma quadratica q rispetto alla base B_V.
(b) Determinare l'espressione di $b(v,w)$, rispetto alla base B_V, essendo $b:V\times V\to \boldsymbol{R}$ la forma bilineare simmetrica reale polare della forma quadratica reale q.
(c) Verificare che la forma bilineare simmetrica b è definita positiva e quindi è un prodotto scalare di V che, d'ora in poi, indicheremo con $<\ ,\ >$, ossia porremo $<v,w>=b(v,w)$.
(d) Considerato lo spazio vettoriale V dotato del prodotto scalare $<\ ,\ >$, determinare gli angoli formati dalle coppie di vettori della base B_V.
(e) Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base B_V ed eventualmente normalizzando, determinare una base ortonormale $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$.
(f) Determinare la matrice A´ associata al prodotto scalare $<\ ,\ >$, rispetto alla base ortonormale B_V' ed una matrice invertibile C tale che risulti $A'={}^tCAC$.

Soluzione

(a) Si ha immediatamente che la matrice A associata alla forma quadratica reale q, rispetto alla base B_V, ha come righe $A^{(1)}=(1,-1,0,0)$, $A^{(2)}=(-1,2,-1,0)$, $A^{(3)}=(0,-1,2,1)$, $A^{(4)}=(0,0,1,2)$.
(b) La forma bilineare simmetrica reale $b:V\times V\to \boldsymbol{R}$, polare della forma quadratica reale $q:V\to \boldsymbol{R}$, ha come matrice associata, rispetto alla base B_V, la matrice A e quindi è tale che

$$b(v,w)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+2x_3y_3+x_3y_4+x_4y_3+2x_4y_4,$$

essendo $w=(y_1,y_2,y_3,y_4)$.
(c) La forma bilineare simmetrica reale b è definita positiva per il criterio di positività di Hurewicz. Infatti risulta $\det(A_{1,1})=1>0$, $\det(A_{2,2})=1>0$, $\det(A_{3,3})=1>0$, $\det(A_{4,4})=\det(A)=1>0$. Allora la b è un prodotto scalare che, d'ora in poi, indicheremo con $<\ ,\ >$, ossia porremo $<v,w>=b(v,w)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+2x_3y_3+x_3y_4+x_4y_3+2x_4y_4$. Indicato, come di consueto, con $|v|$ il modulo di v, osserviamo esplicitamente che risulta $|v|^2=q(v)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-2x_2x_3+2\,x_3^2+2x_3x_4+2x_4^2$.
(d) Risulta:
$\cos v_1\hat{}v_2=<v_1,v_2>/|v_1||v_2|=(-1)/2^{½}\Rightarrow v_1\hat{}v_2=3\pi/4$, $\cos v_1\hat{}v_3=<v_1,v_3>/|v_1||v_3|=0\Rightarrow v_1\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_1\hat{}v_4=<v_1,v_4>/|v_1||v_4|=0\Rightarrow v_1\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_3=<v_2,v_3>/|v_2||v_3|=(-1)/2\Rightarrow v_2\hat{}v_3=2\pi/3$, $\cos v_2\hat{}v_4=<v_2,v_4>/|v_2||v_4|=0\Rightarrow v_2\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_3\hat{}v_4=<v_3,v_4>/|v_3||v_4|=1/2\Rightarrow v_3\hat{}v_4=\pi/3$.
(e) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, applicato alla base B_V dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3,w_4), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=v_2-((-1)/1)v_1=v_1+v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=$
$v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,v_1+v_2\rangle/\langle v_1+v_2,v_1+v_2\rangle)(v_1+v_2)=v_3-((-1)/1)(v_1+v_2)=v_1+v_2+v_3$,

$w_4=v_4-(\langle v_4,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_4,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2-(\langle v_4,w_3\rangle/\langle w_3,w_3\rangle)w_3=$
$v_4-(\langle v_4,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_4,v_1+v_2\rangle/\langle v_1+v_2,v_1+v_2\rangle)(v_1+v_2)-$
$(\langle v_4,v_1+v_2+v_3\rangle/\langle v_1+v_2+v_3,v_1+v_2+v_3\rangle)(v_1+v_2+v_3)=v_4-(1/1)(v_1+v_2+v_3)=-v_1-v_2-v_3+v_4$.
La base ortogonale (w_1,w_2,w_3,w_4) è anche ortonormale perché è $|w_1|=|v_1|=1$, $|w_2|=|v_1+v_2|=1$, $|w_3|=|v_1+v_2+v_3|=1$, $|w_4|=|-v_1-v_2-v_3+v_4|=1$. Pertanto la base ortonormale richiesta è $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$, essendo $v_1'=v_1$, $v_2'=v_1+v_2$, $v_3'=v_1+v_2+v_3$, $v_4'=-v_1-v_2-v_3+v_4$.
(f) La matrice A´ associata al prodotto scalare, rispetto alla base ortonormale B_V', coincide con la matrice unità I. Essendo A la matrice associata alla forma bilineare b, rispetto alla base B_V, e quindi associata al prodotto scalare < , >, rispetto a tale base, la matrice invertibile C tale che $A'={}^tCAC$ è la matrice del cambiamento di base nel passaggio dalla base B_V alla base B_V', ossia è la matrice che ha come colonne, rispettivamente, le colonne delle coordinate dei vettori v_1',v_2',v_3',v_4' e quindi che ha come righe $C^{(1)}=(1,1,1,-1)$, $C^{(2)}=(0,1,1,-1)$, $C^{(3)}=(0,0,1,-1)$, $C^{(4)}=(0,0,0,1)$.