ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Co)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 23-9-2014

1. <u>Spazio euclideo numerico</u> $\boldsymbol{E}^4$. <u>Riferimento euclideo canonico</u> RC(0;e_1,e_2,e_3,e_4). Siano assegnati i punti $P=(0,1,1,0)$, $P_1=(1,1,1,1)$, $P_2=(1,0,0,1)$, gli iperpiani h:$x_1-x_2+x_3-x_4+1=0$, h':$x_1+x_3+x_4-1=0$ e le rette r:$x_1+x_2=0$, $x_3=0$, $x_1-x_4+1=0$, r_1:$(x_1-1)/0=x_2/1=x_3/(-1)=x_4/1$, r_2:$x_1=1+t_2$, $x_2=-t_2$, $x_3=2+t_2$, $x_4=3$, $t_2\in\boldsymbol{R}$.

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta r' passante per il punto P, parallela agli iperpiani h ed h' e perpendicolare alla retta r.
(b) Determinare equazioni cartesiane dell'iperpiano h_1 passante per il punto P_1 e perpendicolare alla retta r_1.
(c) Determinare equazioni cartesiane dell'iperpiano h_2 passante per il punto P_2 e perpendicolare alla retta r_2.
(d) Verificare che il sottoinsieme $S=h_1\cap h_2$ è un sottospazio affine di $\boldsymbol{E}^4$ e determinarne la dimensione.
(e) Determinare la mutua posizione della retta r' e del sottospazio affine S.

Soluzione

(a) Coefficienti di giacitura degli iperpiani h ed h' sono, rispettivamente, $(a_1,a_2,a_3,a_4)=(1,-1,1,-1)$ e $(a_1',a_2',a_3',a_4')=(1,0,1,1)$. Posto $x_1=t$ nelle equazioni cartesiane della retta r, si ha che equazioni parametriche di r sono $x_1=t$, $x_2=-t$, $x_3=0$, $x_4=1+t$, $t\in\boldsymbol{R}$ e quindi parametri direttori di r sono $(l_1,l_2,l_3,l_4)=(1,-1,0,1)$. La retta r' appartiene alla stella di rette di vertice il punto P e quindi ha equazioni, in forma di rapporti uguali, del tipo $x_1/l_1'=(x_2-1)/l_2'=(x_3-1)/l_3'=x_4/l_4'$, con (l_1',l_2',l_3',l_4') parametri direttori da determinare. La condizione di parallelismo di r' con l'iperpiano h, la condizione di parallelismo di r' con l'iperpiano h' e la condizione di perpendicolarità di r' con la retta r danno rispettivamente $l_1'-l_2'+l_3'-l_4'=0$, $l_1'+l_3'+l_4'=0$ e $l_1'-l_2'+l_4'=0$. Pertanto parametri direttori di r' sono, per esempio, $(l_1',l_2',l_3',l_4')=(3,2,-2,-1)$. Allora equazioni, in forma di rapporti uguali, di r' sono, per esempio, $x_1/3=(x_2-1)/2=(x_3-1)/(-2)=x_4/(-1)$ e quindi equazioni cartesiane di r' sono, per esempio, $x_1/3=x_4/(-1)$, $(x_2-1)/2=x_4/(-1)$, $(x_3-1)/(-2)=x_4/(-1)$, ossia $x_1+3x_4=0$, $x_2+2x_4-1=0$, $x_3-2x_4-1=0$.

(b) La retta r_1 è assegnata mediante equazioni in forma di rapporti uguali. Stante il significato geometrico dei denominatori in tali equazioni, si ha che parametri direttori di tale retta sono, per esempio, $(0,1,-1,1)$. Allora l'iperpiano h_1 passante per P_1 e perpendicolare alla retta r_1, dovendo avere i coefficienti di giacitura proporzionali a tali parametri direttori, ha come equazione cartesiana, per esempio, $x_2-1-(x_3-1)+x_4-1=0$, ossia $x_2-x_3+x_4-1=0$.

(c) La retta r_2 è assegnata mediante equazioni parametriche nel parametro t_2. Stante il significato geometrico dei coefficienti del parametro t_2 in tali equazioni, si ha che parametri direttori di tale retta sono, per esempio, $(1,-1,1,0)$. Allora l'iperpiano h_2 passante per P_2 e perpendicolare alla retta r_2, dovendo avere i coefficienti di giacitura proporzionali a tali parametri direttori, ha come equazione cartesiana, per esempio, $x_1-1-x_2+x_3=0$, ossia $x_1-x_2+x_3-1=0$.

(d) Equazioni cartesiane di $S=h_1\cap h_2$ sono $x_2-x_3+x_4-1=0$, $x_1-x_2+x_3-1=0$. Il sistema lineare che rappresenta S è equivalente al sistema lineare a scala di due equazioni in quattro incognite $x_1-x_2+x_3-1=0$ $x_2-x_3+x_4-1=0$, il quale è compatibile. Pertanto S è un sottospazio affine di $\boldsymbol{R}^4$ con giacitura W: $x_2-x_3+x_4=0$, $x_1-x_2+x_3=0$ e quindi di dimensione 2, ossia S è un piano.

(e) Andando a sostituire i parametri direttori 3, 2, -2, -1 della retta r' rispettivamente al posto di x_1, x_2, x_3, x_4 nelle equazioni cartesiane della giacitura W di S, si ha 3=0, -1=0, onde la retta r´ ed il piano S non sono paralleli. Dalle equazioni in forma di rapporti uguali della retta r´ si trae immediatamente che equazioni parametriche di r´ sono $x_1=3t´$, $x_2=1+2t´$, $x_3=1-2t´$, $x_4=-t´$, $t´\in\boldsymbol{R}$. Il punto generico variabile sulla retta r´ ha allora coordinate cartesiane (3t´,1+2t´,1-2t´,-t´). Andando a sostituire tali coordinate rispettivamente al posto di x_1, x_2, x_3, x_4 nelle equazioni cartesiane di S si ha 1+2t´-(1-2t´)-t´-1=0, 3t´-(1+2t´)+(1-2t´)-1=0, ossia 3t´-1=0, -t´-1=0. Allora nessun punto di r´ appartiene a S, ossia r´ ed S sono disgiunti. Pertanto r´ ed S non essendo paralleli ed essendo disgiunti sono sghembi.

2. Spazio vettoriale euclideo V dei vettori geometrici dello spazio euclideo ordinario. Base ortonormale $B_V=(i,j,k)$. Siano assegnati i vettori $v_1=(h-1)i+(1-h)j+(1-h)k$, $v_2=(1-h)i+(h-1)j-hk$, $v_3=(h-1)i+(h-1)j$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro reale h in corrispondenza del quale (v_1,v_2,v_3) sia una base ortogonale di V e determinare esplicitamente tale base.

(b) Determinare la base ortonormale $B_V´=(i´,j´,k´)$ che si ottiene normalizzando la base ortogonale (v_1,v_2,v_3).

(c) Determinare la matrice C del cambiamento di base nel passaggio dalla base ortonormale B_V alla base ortonormale $B_V´$ e dire di che tipo è tale matrice.

(d) Assegnato il sottospazio vettoriale U:x+y+2z=0, 2x-y+z=0, determinare una base ortonormale di U ed una base ortonormale del sottospazio vettoriale $W=U^{\perp}$.

(e) Determinare la proiezione ortogonale $P_W(v)$ del vettore v=3i su W.

Soluzione

(a) Indicato con $\times$ il prodotto scalare ordinario, si ha che i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base ortogonale se e soltanto se $v_1\times v_2=0$, $v_1\times v_3=0$, $v_2\times v_3=0$ e nessuno di loro è il vettore nullo. Ma è $v_1\times v_2=(h-1)(1-h)+(1-h)(h-1)-(1-h)h=-2h^2+4h-2-h+h^2=-h^2+3h-2$, $v_1\times v_3=(h-1)^2+(1-h)(h-1)=0$, $v_2\times v_3=(1-h))(h-1)+(h-1)^2=0$. Allora i vettori i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base ortogonale se e soltanto se risulta $-h^2+3h-2=0$ e nessuno di loro è il vettore nullo. Soluzioni dell'equazione di secondo grado sono h=1 ed h=2. Per h=1 si ha che i vettori v_1 e v_3 sono nulli, quindi tale valore del parametro è da scartare. Per h=2 nessuno dei tre vettori coincide con il vettore nullo quindi il valore h_0 richiesto è 2. I vettori richiesti sono allora $v_1=i-j-k$, $v_2=-i+j-2k$, $v_3=i+j$.
(b) Risulta $|v_1|=3^{½}$, $|v_2|=6^{½}$, $|v_3|=2^{½}$. Pertanto la base ortonormale $B_V´=(i´,j´,k´)$ richiesta è tale che $i´=v_1/|v_1|=3^{-½}(i-j-k)$, $j´=6^{-½}(-i+j-2k)$, $k´=2^{-½}(i+j)$.
(c) La matrice C del cambiamento di base, nel passaggio dalla base ortonormale B_V alla base ortonormale $B_V´$ ha come righe $C^{(1)}=(3^{-½},-6^{-½},2^{-½})$, $C^{(2)}=(-3^{-½},6^{-½},2^{-½})$, $C^{(3)}=(-3^{-½},(-2)6^{-½},0)$. Tale matrice è ortogonale perché esprime il cambiamento tra due basi ortonormali.
(d) Risulta immediatamente $U=\{t(i+j-k)|t\in\boldsymbol{R}\}$, quindi U è una retta vettoriale ed una sua base è costituita, per esempio, dal solo vettore u=i+j-k. Una base ortonormale di U è allora costituita dal solo vettore unitario $u´=3^{-½}(i+j-k)$. Stante il significato geometrico dei coefficienti delle incognite nelle equazioni cartesiane omogenee di un sottospazio vettoriale, si ha che una base di $W=U^{\perp}$ è costituita dai vettori $w_1=i+j+2k$, $w_2=2i-j+k$. Tali vettori non sono ortogonali perché risulta $w_1\times w_2=3\neq0$. Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt ai vettori w_1, w_2 si ha la base ortogonale $(w_1´,w_2´)$, essendo $w_1´= w_1=i+j+2k$, $w_2´=w_2-((w_2\times w_1)/(w_1\times w_1))w_1=2i-j+k-(3/6)(i+j+2k)=(3/2)i-(3/2)j$. Essendo $|w_1´|=6^{½}$, $|w_2´|=3/2^{½}$, si ha che una base ortonormale di W è costituita dai vettori unitari $w_1''= w_1´/|w_1´|=6^{-½}(i+j+2k)$, $w_2''= w_2´/|w_2´|=(2^{½}/3)\,((3/2)i-(3/2)j)=2^{-½}(i-j)$.
(e) Essendo $W=U^{\perp}$, risulta $P_W(v)=v-P_U(v)=v-(v\times u´)u´=3i-(3i\times3^{-½}(i+j-k))3^{-½}(i+j-k)=3i-i-j+k=2i-j+k$.