ESAME DI GEOMETRIA FISICI (Lettere P-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della Prova scritta del 23–11-2012

1. Spazio euclideo, $RC(O, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k})$.

(i) Verificare che le rette

$$r_1 : x = 0\,,\ y = 0$$

$$r_2 : x - y + 3 = 0\,,\ x + y - 2z = 0$$

sono sghembe.

(ii) Determinare la retta r incidente e perpendicolare ad r_1 e r_2.

(iii) Determinare inoltre i punti di incidenza $N_1 = r \cap r_1$ e $N_2 = r \cap r_2$ e dedurne la distanza tra r_1 e r_2.

Soluzione: Risulta

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0\,.$$

Quindi le due rette sono sghembe.

La retta r_1, che è l'asse delle z, ha equazioni parametriche

$$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = t_1\,,\ t_1 \in \mathbb{R}$$

e suoi parametri direttori sono $(0, 0, 1)$. La retta r_2 ha equazioni parametriche

$$x = -3/2 + t_2\,,\ y = 3/2 + t_2\,,\ z = t_2\,,\ t_2 \in \mathbb{R}$$

e suoi parametri direttori sono $(1, 1, 1)$.

Una retta incidente r_1 e r_2 ha equazioni in forma di rapporti uguali

$$\frac{x}{-3/2 + t_2} = \frac{y}{3/2 + t_2} = \frac{z - t_1}{t_2 - t_1}$$

e suoi parametri direttori sono $(-3/2 + t_2, 3/2 + t_2, t_2 - t_1)$. La condizione di perpendicolarità con r_1 e r_2 dà

$$\begin{cases} t_2 - t_1 = 0 \\ -3/2 + t_2 + 3/2 + t_2 + t_2 - t_1 = 0 \end{cases}$$

da cui $t_1 = t_2 = 0$. Pertanto la retta richiesta s ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

I punti N_1 e N_2 si ottengono rispettivamente come punti di r_1 e r_2 per $t_1 = 0$ e $t_2 = 0$. Quindi

$$N_1(0, 0, 0)\,, \quad N_2(-3/2, 3/2, 0)\,.$$

Da $\mathrm{d}\,(r_1, r_2) = \mathrm{d}\,(N_1, N_2)$ si trae

$$\mathrm{d}\,(r_1, r_2) = \frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

2. Spazio vettoriale reale tridimensionale V dotato di prodotto scalare $\langle , \rangle$. Base ortonormale $(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)$.

(i) Verificare che l'applicazione $F : V \to V$ definita da

$$F(\mathrm{v}) = \langle \mathrm{v}, \mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2 + 2\mathrm{u}_3 \rangle (\mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2 + 2\mathrm{u}_3)$$

è un operatore simmetrico.

(ii) Determinare una base ortonormale di autovettori.

Soluzione: (i) L'applicazione F è lineare grazie alla linearità del prodotto scalare rispetto al primo argomento e alla distributività del prodotto di vettori per scalari rispetto alla somma di scalari. Pertanto F è lineare.

Risulta poi

$$\begin{aligned} F(\mathrm{u}_1) &= \mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2 + 2\mathrm{u}_3 \\ F(\mathrm{u}_2) &= -\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 - 2\mathrm{u}_3 \\ F(\mathrm{u}_3) &= 2\mathrm{u}_1 - 2\mathrm{u}_2 + 4\mathrm{u}_3 \end{aligned}$$

e quindi la matrice associata ad F nella base ortonormale assegnata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice A è simmetrica e quindi l'operatore F è simmetrico.

(ii) L'equazione caratteristica di F è

$$\begin{vmatrix} 1-x & -1 & 2 \\ -1 & 1-x & -2 \\ 2 & -2 & 4-x \end{vmatrix} = -x^3 + 6x^2 = 0$$

da cui gli autovalori

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0\,; \quad \lambda_3 = 6\,.$$

L'autospazio $V_{\lambda_1} = V_{\lambda_2}$ relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ è

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui
$$V_{\lambda_1} = V_{\lambda_2} = \{t_1(\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2) + t_2(-2\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_3) \mid t_1, t_2 \in \mathrm{R}\}\,.$$
Una base è ad esempio
$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2\,;\ \mathrm{v}_2 = -2\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_3\,.$$
Non è una base ortonormale (infatti $\langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\rangle = -2 \neq 0$). Con il procedimento di Gram–Schmidt si perviene alla base ortogonale
$$\mathrm{w}_1 = \mathrm{v}_1 = \mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2\,,\ \mathrm{w}_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{\langle \mathrm{v}_2, \mathrm{w}_1\rangle}{\langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_1\rangle}\mathrm{w}_1 = -\mathrm{u}_1 + \mathrm{u}_2 + \mathrm{u}_3$$
Dividendo ciascuno di questi vettori per la rispettiva norma
$$\|\mathrm{w}_1\| = \sqrt{2}\,,\ \|\mathrm{w}_2\| = \sqrt{3}$$
si perviene alla base ortonormale di V_{λ_1}
$$\mathrm{u}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{u}_2\,,\ \mathrm{u}'_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{u}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{u}_3\,.$$
Risulta poi per V_{λ_3}
$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$
da cui
$$V_{\lambda_3} = \{t(\mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2 + 2\mathrm{u}_3) \mid t \in \mathrm{R}\}$$
con base ortonormale
$$\mathrm{u}'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{u}_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{u}_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathrm{u}_3\,.$$
In definitiva una base ortonormale di autovettori di V è
$$(\mathrm{u}'_1, \mathrm{u}'_2, \mathrm{u}'_3)\,.$$