ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere Pf-Z)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 21-6-2013

1. Spazio affine numerico $\boldsymbol{A^4(R)}$. Riferimento affine canonico RA(O;e_1,e_2,e_3,e_4). Sia assegnato il sistema lineare

$$x_1+x_2+x_3=0,\ x_2+(h+1)x_3+(h+2)x_4=1,\ 3x_1+2x_2+(2-h)x_3=-1,$$

essendo h un parametro reale.

(a) Determinare i valori del parametro h in corrispondenza dei quali il sistema assegnato rappresenti un sottospazio affine S(h) di $\boldsymbol{A^4(R)}$.

(b) In corrispondenza di ciascun valore del parametro h, di cui al punto (a), determinare un punto P_0(h) e la giacitura W(h) del sottospazio affine S(h).

(c) Determinare una base di W(h) e la dimensione di S(h).

Soluzione

(a) Il sistema lineare assegnato rappresenta un sottospazio affine di $\boldsymbol{A^4(R)}$ se e soltanto se esso è compatibile. Studiamo dunque la compatibilità del sistema al variare del parametro h. Utilizzando l'algoritmo di eliminazione di Gauss-Jordan, si ha che il sistema assegnato risulta equivalente al sistema lineare a scala compatibile $x_1+x_2+x_3=0$, $x_2+(h+1)x_3+(h+2)x_4=1$, $(h+2)x_4=0$, se $h\neq-2$, e al sistema lineare a scala, anch'esso compatibile, $x_1+x_2+x_3=0$, $x_2-x_3=1$, se h=-2. Allora il sistema lineare assegnato è compatibile per ogni valore del parametro h e quindi esso rappresenta un sottospazio affine di $\boldsymbol{A^4(R}$ per ogni valore del parametro h.

(b) Caso $h\neq-2$. Posto x_3=t nel sistema lineare a scala $x_1+x_2+x_3=0$, $x_2+(h+1)x_3+(h+2)x_4=1$, $(h+2)x_4=0$ e risolvendo il sistema si ha subito $S(h)=\{(-1+ht,1-(h+1)t,t,0)\}_{t\in\boldsymbol{R}}=(-1,1,0,0)+\{t(h,-(h+1),1,0)\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ e quindi un punto di S(h) è, per esempio, $P_0(h)=(-1,1,0,0)$ mentre la giacitura di S(h) è $W(h)=\{t(h,-(h+1),1,0)\}_{t\in\boldsymbol{R}}$.

Caso h=-2. Posto $x_3=t_1$, $x_4=t_2$ nel sistema lineare compatibile $x_1+x_2+x_3=0$, $x_2-x_3=1$ e risolvendo il sistema si ha subito $S(-2)=\{(-1-2t_1,1+t_1,t_1,t_2)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}=(-1,1,0,0)+\{t_1(-2,1,1,0)+t_2(0,0,0,1)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$ onde un punto di S(-2) è, per esempio, $P_0(-2)=(-1,1,0,0)$ e la giacitura di S(-2) è $W(-2)=\{t_1(-2,1,1,0)+t_2(0,0,0,1|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$.

(c) Caso $h\neq-2$. Una base di W(h) è, per esempio, quella costituita dal solo vettore w(h)= (h,-(h+1),1,0) e quindi è dim(W(h))=1. Essendo la dimensione di un sottospazio affine uguale alla dimensione della sua giacitura, si ha che dim(S(h))=dim(W(h))=1, onde S(h) è una retta.

Caso h=-2. Una base di W(-2) è, per esempio, quella costituita dai due vettori $w_1(-2)$= (-2,1,1,0) e $w_2(-2)=(0,0,0,1)$. Pertanto è dim(W(-2))=2 e quindi dim(S(-2))=dim(W(-2))=2, onde S(-2) è un piano.

2. Spazio vettoriale euclideo numerico V=$\boldsymbol{R^3}$. Base canonica $B_V=(e_1,e_2,e_3)$. Sia F_h:V→V l'endomorfismo di V tale che

$$F_h(v)=(((h-4)/4)x_1+(h-2)x_2-(1/2)x_3,\ (h-2)x_2+(h-2)x_3,\ ((h-4)/4)x_1+(h-2)x_2+((h-4)/4)x_3),$$

essendo $v=(x_1,x_2,x_3)$ ed h un parametro reale.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale l'endomorfismo F_h sia simmetrico.

(b) Indicato semplicemente con F l'endomorfismo simmetrico corrispondente al valore h_0 di cui al punto (a), scrivere l'espressione di F(v) rispetto alla base canonica B_V.

(c) Determinare una base ortonormale $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ di V costituta da autovettori rispetto ad F.

(d) Verificare che la funzione reale b:V×V→$\boldsymbol{R}$ definita da b(v,w)=<F(v),w>, essendo $w=(y_1,y_2,y_3)$, è una forma bilineare simmetrica reale.

(e) Determinare l'espressione di b(v,w) rispetto alla base ortonormale B_V'.

(f) Detta $q:V\to \boldsymbol{R}$ la forma quadratica reale associata alla forma bilineare simmetrica reale b, determinare l'espressione di q(v) rispetto alla base ortonormale B_V' e dedurne il tipo della forma quadratica reale q.

Soluzione

(a) La matrice A_h associata all'endomorfismo F_h, rispetto alla base canonica di $V=\boldsymbol{R}^3$, ha come righe $A_h^{(1)}=((h-4)/4,h-2,-1/2)$, $A_h^{(2)}=((0,h-2,h-2)$, $A_h^{(3)}=((h-4)/4,h-2,(h-4)/4)$. Essendo la base canonica ortonormale rispetto al prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo numerico $V=\boldsymbol{R}^3$, ossia rispetto al prodotto scalare standard di $V=\boldsymbol{R}^3$, si ha che l'endomorfismo F_h è simmetrico se e soltanto se la matrice A_h è simmetrica. Orbene la matrice A_h è simmetrica se e soltanto se è h-2=0, (h-4)/4=-1/2 e quindi se e soltanto se è h=2. Pertanto il valore richiesto del parametro h è $h_0=2$.

(b) Detto semplicemente F l'endomorfismo simmetrico corrispondente al valore h_0 del parametro di cui al punto precedente, risulta $F(v)=(-(1/2)\,x_1-(1/2)x_3,0,-(1/2)x_1\,-(1/2)x_3)$.

(c) Detta semplicemente A la matrice associata all'endomorfismo simmetrico F, si ha che A ha come righe $A^{(1)}=(-1/2,0,-1/2)$, $A^{(2)}=(0,0,0)$, $A^{(3)}=(-1/2,0,-1/2)$. Il polinomio caratteristico di F è $\det(A-\lambda I)=-\lambda^2(\lambda+1)$ e pertanto gli autovalori di F sono $\lambda_1=-1$, con molteplicità algebrica $a_1=1$ e $\lambda_2=0$, con molteplicità algebrica $a_2=2$.

(d) Detto V_{-1} l'autospazio associato all'autovalore $\lambda_1=-1$, si ha V_{-1}:$(1/2)x_1-(1/2)x_3=0$, $x_2=0$, $-(1/2)x_1+(1/2)x_3=0$ e quindi $V_{-1}=\{t(1,0,1)\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ con base ortonormale costituita dal solo autovettore unitario $v_1'=((1/2)^{1/2},0,(1/2)^{1/2})$. Risulta poi V_0:$-(1/2)x_1-(1/2)x_3=0$, 0=0, $-(1/2)x_1-(1/2)x_3=0$ e quindi $V_0=\{t_1(1,0,-1)+t_2(0,1,0)|t_1,t_2\in\boldsymbol{R}\}$ con base ortonormale costituita dagli autovettori unitari ortogonali $v_2'=((1/2)^{1/2},0,-(1/2)^{1/2})$, $v_3'=(0,1,0)$. Essendo gli autovettori v_1' e v_2', v_3' associati agli autovettori distinti $\lambda_1=-1$ e $\lambda_2=0$, si ha che v_1' è ortogonale sia a v_2' sia a v_3'. Pertanto $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ è una base ortonormale costituita da autovettori rispetto ad F.

(d) Risulta $b(v,w)=\langle F(v),w\rangle=\langle(-(1/2)x_1-(1/2)x_3,0,-(1/2)x_1-(1/2)x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle= -(1/2)x_1y_1-(1/2)x_3y_1-(1/2)x_1y_3-(1/2)x_3y_3$. Si ha allora $b(v,w)={}^tXAY$, essendo ${}^tX=(x_1,x_2,x_3)$, ${}^tY=(y_1,y_2,y_3)$ ed A la matrice simmetrica associata all'endomorfismo simmetrico F rispetto alla base canonica di $V=\boldsymbol{R}^3$. Allora la funzione reale $b:V\times V\to\boldsymbol{R}$ è una forma bilineare simmetrica reale.

(e) Risulta $b(v_1',v_1')=\langle -v_1',v_1'\rangle=-1$, $b(v_1',v_2')=\langle -v_1',v_2'\rangle=0$, $b(v_1',v_3')=\langle -v_1',v_3'\rangle=0$, $b(v_2',v_2')=\langle 0,v_2'\rangle=0$, $b(v_2',v_3')=\langle 0,v_3'\rangle=0$, $b(v_3',v_3')=\langle 0,v_3'\rangle=0$. Allora la matrice simmetrica A' associata a b rispetto alla base ortonormale $B_V'=(v_1',v_2',v_3')$ ha come righe $A'^{(1)}=(-1,0,0)$, $A'^{(2)}=(0,0,0)$, $A'^{(3)}=(0,0,0)$. Pertanto risulta $b(v,w)=-x_1'y_1'$, essendo (x_1',x_2',x_3') e (y_1',y_2',y_3') rispettivamente le coordinate di v e w rispetto alla base ortonormale B_V'.

(f) Risulta $q(v)=b(v,v)=-(x_1')^2$ e quindi q è una forma quadratica reale semidefinita negativa.