ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere Pf-Z)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e soluzioni della Prova Scritta del 21-11-2013

Esercizio 1 Si considerino, nello spazio euclideo ordinario, i punti $P \equiv (1, 0, -1)$, $Q \equiv (k, -1, 0)$ ed $R \equiv (-1, 0, 0)$, dove k è un parametro reale.

(i) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π_1 passante per l'origine e per i punti P e Q; trovare quindi l'equazione cartesiana del piano π_2 passante per R e che ha vettore normale $n \equiv (1, k, 0)$.

(ii) Sia ora π il piano di equazione $kx + y + kz = 1 - k$. Si determini, al variare di k, la dimensione del luogo $\pi \cap \pi_1 \cap \pi_2$, se non vuoto.

Soluzione.

(i) L'equazione di π_1 si ottiene imponendo

$$det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

dunque $\pi_1 : x + ky + z = 0$. L'equazione di π_2 è del tipo $\pi_2 : x + ky = d$ (in quanto $(k, 1, 0)$ è un vettore normale al piano), e si trova $d = -1$ imponendo la condizione $R \in \pi_2$.

(ii) È necessario discutere il sistema

$$\begin{cases} kx + y + kz = 1 - k \\ x + ky + z = 0 \\ x + ky = -1 \end{cases}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è uguale a $(1 - k^2)$, dunque si annulla solo per i valori $k = \pm 1$.

Pertanto, al di fuori di questi due valori, la soluzione del sistema è unica, il luogo $\pi \cap \pi_1 \cap \pi_2$ è un punto e la sua dimensione è zero.

Per $k = 1$, si ottiene il sistema con due equazioni indipendenti

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

che ha quindi per soluzioni una retta affine; in questo caso la dimensione del luogo $\pi \cap \pi_1 \cap \pi_2$ è uno.

Per $k = -1$, si ottiene invece il sistema

$$\begin{cases} -x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

È immediato verificare che il rango della matrice completa del sistema in questo caso è uguale tre (il determinante del minore costituito dalle ultime tre colonne è non nullo), mentre il rango della matrice dei coefficienti è inferiore a tre (perché il suo determinante è zero). Pertanto il sistema non ha soluzioni ed in questo caso $\pi \cap \pi_1 \cap \pi_2$ è vuoto.

Esercizio 1. Siano assegnate le matrici quadrate

$$A(k) = \begin{pmatrix} -1 & k & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & k & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

essendo k un parametro reale.

(i) Determinare il valore k_0 del parametro k per cui $A(k)$ ammette il numero 1 come autovalore.

(ii) Posto $A_0 = A(k_0)$, verificare che la matrice A_0 è diagonalizzabile.

(iii) Determinare una matrice invertibile C tale che $C^{-1}A_0C$ sia una matrice diagonale.

(iv) Dire se le matrici A_0 e B sono o non sono simili.

Soluzione.

(i) L'equazione caratteristica della matrice $A(k)$ è $\det\big(A(k) - \lambda I\big) = 0$, ovvero $(-1-\lambda)^2(k-1-\lambda) = 0$. Tale equazione ammette la soluzione $\lambda = 1$ se e solo se è $k - 1 - 1 = 0$, ovvero per il valore $k_0 = 2$ del parametro.

(ii) Risulta quindi

$$A_0 = A(2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

e l'equazione caratteristica $(-1-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$ di A_0 fornisce i due autovalori $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e il già determinato $\lambda_2 = 1$, con molteplicità algebrica 1. Gli autospazi corrispondenti V_{λ_1} e V_{λ_2} si ottengono risolvendo i sistemi lineari omogenei rispettivamente

$$\begin{cases} 2x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases},$$

da cui $V_{\lambda_1} = \{(t_1, 0.t_2)\}_{t_1,t_2 \in \mathbb{R}}$ e $V_{\lambda_2} = \{(t, t.t)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Dunque le molteplicità geometriche, rispettivamente $2 = \dim V_{\lambda_1}$ e $1 = \dim V_{\lambda_2}$, coincidono con quelle algebriche, e ciò assicura che la matrice A_0 è diagonalizzabile.

(iii) Per determinare una matrice invertibile C tale che $C^{-1}A_0C$ sia diagonale, è sufficiente determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_0. Tale base si ottiene subito dalla descrizione parametrica degli autospazi data al punto ii) e consiste dei vettori $\vec{v}_1 = (1,0,0), \vec{v}_2 = (0,0,1), \vec{v}_3 = (1,1,1)$. Dunque

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice che ha per colonne le coordinate di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

(iv) L'equazione caratteristica di B è $(-1-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$. Pertanto gli autovalori di B coincidono con quelli di A_0 e hanno le stesse rispettive molteplicità algebriche. Non così è però per la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = -1$. Infatti il relativo autospazio W_{λ_1} di B è dato dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$, da cui segue che la dimensione di W_{λ_1} è 1. Dunque l'autovalore λ_1 ha per B molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1. Ciò implica che B non è diagonalizzabile, e dunque non simile alla matrice A_0.