ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Lettere A-Co)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e soluzioni della prova scritta del 20–6-2014

1. Spazio euclideo ordinario E. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $P_h(1,-1,h)$, $Q_h(h,1,1)$, $R_h(-1,-h,1)$, A(1,1,1), B(1,-1,1), i piani p_1:x-z=0, p_2:x-y+z-1=0 e le rette r_1: (x-1)/2=y/1=z/(-1), r_2: x/l=(y-1)/(-1)=(z-1)/2, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare il valore h_0 del parametro h in corrispondenza del quale i punti $P_h(1,-1,h)$, $Q_h(h,1,1)$, $R_h(-1,-h,1)$ risultino allineati e, indicati semplicemente con P, Q, R i punti corrispondenti a tale valore del parametro, determinare equazioni cartesiane della retta s_1 individuata dai punti P, Q, R.

(b) Determinare equazioni cartesiane della retta s_2 asse del segmento AB sul piano p_1.

(c) Determinare equazioni parametriche delle rette r_1 e r_2.

(d) Determinare equazioni cartesiane della retta s_3 incidente le rette r_1 e r_2 e perpendicolare al piano p_2.

(e) Decomporre il vettore v(1,1,1) nella somma di tre vettori v_1, v_2 e v_3 appartenenti rispettivamente alle direzioni W_1, W_2 e W_3 delle rette s_1, s_2 ed s_3.

Soluzione

(a) I punti $P_h(1,-1,h)$, $Q_h(h,1,1)$, $R_h(-1,-h,1)$ risultano allineati se e soltanto se i vettori geometrici rappresentati rispettivamente dai segmenti orientati P_hQ_h e P_hR_h sono linearmente dipendenti. Tali vettori, aventi rispettivamente coordinate (h-1,2,1-h) e (-2,1-h,1-h), risultano linearmente dipendenti se e soltanto se è h=-1, quindi è h_0=-1. Allora i punti che corrispondono a tale valore del parametro sono P((1,-1,-1), Q(-1,1,1) ed R(-1,1,1). Equazioni, in forma di rapporti uguali, della retta s_1 sono, per esempio, (x-1)/(-2)=(y+1)/2=(z+1)/2 e quindi equazioni cartesiane di s_1 sono, per esempio, x+z=0, y-z=0. Osserviamo esplicitamente che, stante il significato geometrico dei denominatori nelle equazioni di una retta in forma di rapporti uguali, parametri direttori della retta s_1 sono, per esempio, (l_1,m_1,n_1)=(1,-1,-1).

(b) La retta s_2, asse del segmento AB sul piano p_1, può essere ottenuta come retta passante per il punto medio M(1,0,1) del segmento AB, giacente sul piano p_1 e perpendicolare al vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato AB. Essendo (1,0,-1) coefficienti di giacitura del piano p_1 e (0,-2,0) le coordinate del vettore geometrico rappresentato da AB, detti (l_2,m_2,n_2) i parametri direttori della retta s_2, le condizioni assegnate sulla retta s_2 danno l_2-n_2=0, -2m_2=0 e quindi, per esempio, (l_2,m_2,n_2)=(1,0,1). Allora equazioni, in forma di rapporti uguali, della retta s_2 sono, per esempio, (x-1)/l=y/0=(z-1)/1. Pertanto, equazioni cartesiane di s_2 sono, per esempio, x-z=0, y=0.

(c) Dalle equazioni delle rette r_1 e r_2, che sono in forma di rapporti uguali, si trae immediatamente che equazioni parametriche di tali rette sono, rispettivamente, x=1+2t_1, y=t_1, z=-t_1, $t_1 \epsilon \boldsymbol{R}$, e x=$t_2$, y=1-$t_2$, z=1+2$t_2$, $t_2 \epsilon \boldsymbol{R}$.

(d) La retta s_3 può essere ottenuta imponendo alla retta generica passante per un punto di r_1 e per un punto di r_2 la condizione di perpendicolarità col piano p_2. Tenute presenti le equazioni parametriche delle rette r_1 e r_2 di cui al punto precedente, si ha che equazioni, in forma di rapporti uguali, di una retta generica incidente le rette r_1 ed r_2 sono, per esempio, (x-1-2t_1)/(t_2-1-2t_1)=(y-t_1)/(1-t_2-t_1)=(z+t_1)/(1+2t_2+t_1). Parametri direttori di tale retta sono, per esempio, (t_2-1-2t_1,1-t_2-t_1,1+2t_2+t_1). Imponendo che tali parametri direttori siano proporzionali ai coefficienti di giacitura (1,-1,1) del piano p_2, si ha il sistema 3t_1=0, -t_2-3t_1-2=0 che dà t_1=0, t_2=-2. Andando a sostituire tali valori nelle equazioni di tale retta generica, si ha che equazioni, in forma di rapporti uguali, della retta s_3 sono: (x-1)/(-3)=y/3=z/(-3) e quindi

equazioni cartesiane, per esempio, $x-z-1=0$, $y+z=0$. Osserviamo esplicitamente che parametri direttori della retta s_3 sono, per esempio, $(l_3,m_3,n_3)=(1,-1,1)$.
(e) Dai punti (a), (b), (d) si evince immediatamente che vettori direttori delle rette s_1, s_2 ed s_3 sono, rispettivamente, $w_1(1,-1,-1)$, $w_2(1,0,1)$ e $w_3(1,-1,1)$. Allora i vettori v_1, v_2, v_3, tali che $v=v_1+v_2+v_3$, dovendo appartenere, rispettivamente, alle direzioni di s_1, s_2 e s_3 sono tali che $v_1=\rho_1 w_1$, $v_2=\rho_2 w_2$, $v_3=\rho_3 w_3$, essendo ρ_1, ρ_2, ρ_3 tre opportuni numeri reali da determinare. Traducendo scalarmente l'uguaglianza vettoriale $v=\rho_1 w_1+\rho_2 w_2+\rho_3 w_3$, si ha il sistema lineare $1=\rho_1+\rho_2+\rho_3$, $1=-\rho_1-\rho_3$, $1=-\rho_1+\rho_2+\rho_3$ che dà $\rho_1=0$, $\rho_2=2$, $\rho_3=-1$. Pertanto risulta $v_1(0,0,0)$, $v_2(2,0,2)$, $v_3(-1,1,-1)$.

2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnata la funzione reale $b: V\times V\rightarrow R$, definita da

$$b(v,w)=2x_1y_1+x_1y_4+x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+2x_3y_3+x_4y_1+x_4y_4,$$

essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4$ e $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3+y_4v_4$.

(a) Verificare che b è una forma bilineare simmetrica reale definita positiva ossia che è un prodotto scalare.
(b) Posto $b(v,w)=\langle v,w\rangle$, scrivere l'espressione di $|v|^2$. rispetto alla base B_V.
(c) Determinare gli angoli convessi formati dalle coppie di vettori della base B_V.
(d) Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram Schmidt alla base B_V e normalizzando, determinare una base di V ortonormale rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$.
(e) Determinare il vettore $S_W(-v_4)$, immagine del vettore $-v_4$ nella simmetria ortogonale rispetto a W, essendo $W=\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)$.

Soluzione

(a) Risulta $b(v,w)={}^tXAY$, essendo ${}^tX=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, A la matrice quadrata avente come righe $A^{(1)}=(2,0,0,1)$, $A^{(2)}=(0,1,-1,0)$, $A^{(3)}=(0,-1,2,0)$, $A^{(4)}=(1,0,0,1)$ e ${}^tY=(y_1,y_2,y_3,y_4)$. Pertanto la funzione reale b è una forma bilineare reale. Essendo A una matrice simmetrica, la forma bilineare reale b è simmetrica. Risulta infine $\det(A_{(1,1)})=2>0$, $\det(A_{(2,2)})=2>0$, $\det(A_{(3,3)})=2>0$, $\det(A_{(4,4)})=1>0$ e quindi, per il criterio di positività di Hurewicz, la forma bilineare simmetrica reale b è definita positiva ossia è un prodotto scalare.
(b) Da $\langle v,w\rangle=2x_1y_1+x_1y_4+x_2y_2-x_2y_3-x_3y_2+2x_3y_3+x_4y_1+x_4y_4$ si trae $|v|^2=\langle v,v\rangle=2x_1^2+2x_1x_4+x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2+x_4^2$.
(c) Si ha $\cos v_1\hat{}v_2=\langle v_1,v_2\rangle/(|v_1||v_2|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_2=\pi/2$, $\cos v_1\hat{}v_3=\langle v_1,v_3\rangle/(|v_1||v_3|)=0 \Rightarrow v_1\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_1\hat{}v_4=\langle v_1,v_4\rangle/(|v_1||v_4|)=1/2^{1/2}\Rightarrow v_1\hat{}v_4=\pi/4$, $\cos v_2\hat{}v_3=\langle v_2,v_3\rangle/(|v_2||v_3|)=-1/2^{1/2}\Rightarrow v_2\hat{}v_3=(3/4)\pi$, $\cos v_2\hat{}v_4=\langle v_2,v_4\rangle/(|v_2||v_4|)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_3\hat{}v_4=\langle v_3,v_4\rangle/(|v_3||v_4|)=0\Rightarrow v_3\hat{}v_4=\pi/2$.
(d). Il procedimento di Gram Schmidt, applicato alla base B_V dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3,w_4), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=$ $v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,v_2\rangle/\langle v_2,v_2\rangle)v_2=v_2+v_3$, $w_4=v_4-(\langle v_4,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_4,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2-(\langle v_4,w_3\rangle/\langle w_3,w_3\rangle)w_3=v_4-(\langle v_4,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_4,v_2\rangle/\langle v_2,v_2\rangle)v_2-(\langle v_4,v_2+v_3\rangle/\langle v_2+v_3,v_2+v_3\rangle)(v_2+v_3)=-(1/2)v_1+v_4$.
Essendo $|w_1|^2=2$, $|w_2|^2=1$, $|w_3|^2=1$, $|w_4|^2=1/2$, si ha che i vettori $u_1=w_1/|w_1|=(1/2^{1/2})v_1$, $u_2=w_2/|w_2|=v_2$, $u_3=w_3/|w_3|=v_2+v_3$ e $u_4=w_4/|w_4|=-(2^{1/2}/2)v_1+2^{1/2}v_4$ costituiscono una base ortonormale di V.
(e) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt è tale che $\mathrm{Span}(v_1,v_2,v_3)=\mathrm{Span}(w_1,w_2,w_3)$. Ovviamente è anche $\mathrm{Span}(u_1,u_2,u_3)=\mathrm{Span}(w_1,w_2,w_3)$ e quindi

(u_1,u_2,u_3) è una base ortonormale di $W=Span(v_1,v_2,v_3)$. Allora W è un iperpiano di V e $W^{\perp}=Span(u_4)$. Si ha pertanto $S_W(-v_4)=-v_4-2P_W{}^{\perp}(-v_4)=$
$-v_4-2(\langle -v_4,u_4\rangle u_4=-v_4-2\langle -v_4,-(2^{½}/2)v_1+2^{½}v_4\rangle(-(2^{½}/2)v_1+2^{½}v_4)=-v_4-2(2^{½}/2)(-(\sqrt{2}^{½}/2)v_1+2^{½}v_4)=$
$-v_4-v_1+2v_4=-v_1+v_4$.