ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 18-7-2011

1. Spazio euclideo ordinario. RC(O;i,j,k). Siano assegnati il punto $P_0(1,-1,1)$, il piano p:x+y+z=0, la retta r:x+y-z=0, x+2y=0 e la retta s:x=1+t, y=1, z=1-t, t□***R***.

(a) Determinare la retta r´ passante per il punto P_0, parallela al piano p e complanare con la retta r.

(b) Determinare il valore del parametro reale h in corrispondenza del quale i punti $Q_0(0,h,0)$, $Q_1(1,h+1,-1)$, $Q_2(1,3h,3h)$, $Q_3(-1,h+1,3)$ risultano complanari.

(c) Determinare il piano q generato dai punti Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 in corrispondenza del valore del parametro reale h di cui al punto precedente.

(d) Scrivere equazioni cartesiane del fascio *F* di rette ottenuto intersecando con il piano q il fascio di piani avente come asse la retta r´.

(e) Determinare la retta s′ appartenete al fascio *F* e perpendicolare alla retta s.

Soluzione

(a) Risulta $r'=p_1\cap p_2$, essendo p_1 il piano passante per il punto P_0 e parallelo al piano p e p_2 il piano passante per il punto P_0 e contenente la retta r. Imponendo al piano generico parallelo al piano p il passaggio per il punto P_0, si ha subito p_1:x+y+z-1=0. Il piano p_2 può essere ottenuto imponendo al piano generico del fascio di piani di asse la retta r il passaggio per il punto P_0. Un'equazione cartesiana di tale fascio di piani è x+y-z+h(x+2y)=0. Il passaggio per il punto P_0 dà h=-1 e quindi è p_2:y+z=0. Equazioni cartesiane di r´ sono allora x+y+z-1=0, y+z=0, ossia x-1=0, y+z=0.

(b) I punti Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 risultano complanari se e soltanto se i vettori geometrici rappresentati dai segmenti orientati Q_0Q_1, Q_0Q_2 e Q_0Q_3, risultano linearmente dipendenti. Essendo (1,1,-1), (1,2h,3h) e (-1,1,3) le coordinate di tali vettori, si ha che essi risultano linearmente dipendenti se e soltanto se la matrice A avente come righe $A^{(1)}=(1,1,-1)$, $A^{(2)}=(1,2h,1)$ e $A^{(3)}=(-1,3h,3)$ ha rango minore di 3, ossia se e soltanto se risulta det(A)=0. Ma è det(A)=-2h-4, onde i punti Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 risultano complanari se e soltanto è h=-2.

(c) Dalla matrice A, scritta per h=-2, si trae per esempio che i punti Q_0, Q_1, Q_2 non sono allineati, quindi il piano q può essere ottenuto come piano passante per tali punti. Detta B la matrice avente come righe $B^{(1)}=(x,y+2,z)$, $B^{(2)}=(1,1,-1)$ e $B^{(3)}=(1,-4,-6)$, l'equazione cartesiana di q può essere ottenuta ponendo det(B)=0. Risulta allora q:2x-y+z-2=0.

(d) Il fascio di piani avente come asse la retta r´ ha come equazione cartesiana, per esempio, x-1+h´(y+z)=0. Il fascio di rette *F* ha allora equazioni cartesiane x-1+h´(y+z)=0, 2x-y+z-2=0, ovvero x+h´y+h´z-1=0, 2x-y+z-2=0.

(e) La retta generica del fascio *F* ha parametri direttori l´=2h´, m´=2h´-1, n´=-2h´-1. Allora la condizione di perpendicolarità con la retta s, che ha parametri direttori, (l,m,n)=(1,0,-1), dà 4h´+1=0, ossia h´=-1/4 onde equazioni cartesiane della retta s´ sono 4x-y-z-4=0, 2x-y+z-2=0.

2. Spazio vettoriale reale V di dimensione quattro. Base $B_V=(v_1,v_2,v_3,v_4)$. Sia assegnata la funzione reale $b:V\times V\to\boldsymbol{R}$, tale che

$$b(v,w)=x_1y_1-x_1y_3+2x_2y_2-x_2y_4-x_3y_1+2x_3y_3+x_3y_4-x_4y_2+x_4y_3+2x_4y_4,$$

essendo $v=x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4$, $w=y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3+y_4v_4$.

(a) Verificare che b è una forma bilineare reale simmetrica definita positiva, ossia che b è un prodotto scalare su V.

(b) Posto per comodità b(v,w)=<v,w>, determinare l'espressione di |v|.

(c) Determinare gli angoli convessi formati dalle coppie di vettori della base B_V.
(d) Determinare la base ortonormale $B_V'=(v_1',v_2',v_3',v_4')$ ottenuta dalla base B_V applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
(e) Posto $Span(v_1,v_2)=W$, determinare il vettore $P(v)$, proiezione ortogonale del vettore $v=v_1+v_2+v_3+v_4$ sul sottospazio vettoriale W, ed il vettore $S(v)$ immagine dello stesso vettore v nella simmetria ortogonale rispetto a W.

Soluzione

(a) Risulta $b(v,w)={}^tXAY$, essendo ${}^tX=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, A la matrice quadrata avente come righe $A^{(1)}=(1,0,-1,0)$, $A^{(2)}=(0,2,0,-1)$, $A^{(3)}=(-1,0,2,1)$, $A^{(4)}=(0,-1,1,2)$ e ${}^tY=(y_1,y_2,y_3,y_4)$. Pertanto la funzione reale b è una forma bilineare reale. Essendo A una matrice simmetrica, la forma bilineare reale b è simmetrica. Risulta infine $\det(A_{(1,1)})=1>0$, $\det(A_{(2,2)})=2>0$, $\det(A_{(3,3)})=2>0$, $\det(A_{(4,4)})=1>0$ e quindi, per il criterio di positività di Hurewicz, la forma bilineare simmetrica reale b è definita positiva, ossia è un prodotto scalare.
(b) Si ha $\langle v,w\rangle=b(v,w)=x_1y_1-x_1y_3+2x_2y_2-x_2y_4-x_3y_1+2x_3y_3+x_3y_4-x_4y_2+x_4y_3+2x_4y_4$ e quindi $|v|=\langle v,v\rangle^{1/2}=(x_1^2-2x_1x_3+2x_2^2-2x_2x_4+2x_3^2+2x_3x_4+2x_4^2)^{1/2}$.
(c) Risulta $\cos v_1\hat{}v_2=\langle v_1,v_2\rangle/(|v_1||v_2|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_2=\pi/2$, $\cos v_1\hat{}v_3=\langle v_1,v_3\rangle/(|v_1||v_3|)=-1/\sqrt{2}\Rightarrow v_1\hat{}v_3=(3/4)\pi$, $\cos v_1\hat{}v_4=\langle v_1,v_4\rangle/(|v_1||v_4|)=0\Rightarrow v_1\hat{}v_4=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_3=\langle v_2,v_3\rangle/(|v_2||v_3|)=0\Rightarrow v_2\hat{}v_3=\pi/2$, $\cos v_2\hat{}v_4=\langle v_2,v_4\rangle/(|v_2||v_4|)=-1/2\Rightarrow v_2\hat{}v_4=(2/3)\pi$, $\cos v_3\hat{}v_4=\langle v_3,v_4\rangle/(|v_3||v_4|)=1/2\Rightarrow v_3\hat{}v_4=\pi/3$.
(d) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt applicato alla base B_V dà la base ortogonale (w_1,w_2,w_3,w_4), essendo $w_1=v_1$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,v_2\rangle/\langle v_2,v_2\rangle)v_2=v_1+v_3$, $w_4=v_4-(\langle v_4,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_4,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2-\langle v_4,w_3\rangle/\langle w_3,w_3\rangle)w_3=v_4-(\langle v_4,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_4,v_2\rangle/\langle v_2,v_2\rangle)v_2-(\langle v_4, v_1+v_3\rangle/\langle v_1+v_3, v_1+v_3\rangle)(v_1+v_3)=-v_1+(1/2)v_2-v_3+v_4$.
Risultando poi $|w_1|=|v_1|=1$, $|w_2|=|v_2|=\sqrt{2}$, $|w_3|=|v_1+v_3|=1$, $|w_4|=1/(\sqrt{2})$, si ha che la base ortonormale richiesta B_V' è costituita dai vettori $v_1'=w_1/|w_1|=v_1$, $v_2'=w_2/|w_2|=(1/\sqrt{2})v_2$, $v_3'=w_3/|w_3|=v_1+v_3$ e $v_4'=w_4/|w_4|=-(\sqrt{2})v_1+(\sqrt{2}/2)v_2-(\sqrt{2})v_3+(\sqrt{2})v_4$.
(e) Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt è tale che $Span(v_1,v_2)=Span(w_1,w_2)$. Ovviamente è anche $Span(v_1',v_2')=Span(w_1,w_2)$ e quindi (v_1',v_2') è una base ortonormale di $W=Span(v_1,v_2)$. Si ha pertanto $P(v)=\langle v,v_1'\rangle v_1'+\langle v,v_2'\rangle v_2'=\langle v_1+v_2+v_3+v_4,v_1\rangle v_1+\langle v_1+v_2+v_3+v_4,(1/\sqrt{2})v_2\rangle(1/\sqrt{2})v_2=(1/2)v_2$ e

$S(v)=2P(v)-v=v_2-v_1-v_2-v_3-v_4= -v_1-v_3-v_4$.