ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)

(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)

Testi e Soluzioni della Prova Scritta del 16–2-2011

1. Spazio euclideo ordinario **E**. RC(O;i,j,k). Siano assegnati i punti $P_0(1+h,-1,1)$, $P_1(-1,1-h,-1)$ e $P_2(3,-3,3+h)$, essendo h un parametro reale.

(a) Determinare il valore del parametro h in corrispondenza del quale i punti P_0, P_1 e P_2 risultano allineati e scrivere equazioni cartesiane della retta r generata da tali punti.

(b) Scrivere equazioni cartesiane della retta r′ passante per il punto $P_0'(0,1,0)$ e perpendicolare al piano p:x-y=0.

(c) Supposto di aver orientato la retta r verso il basso e la retta r′ secondo le y decrescenti, determinare il coseno dell'angolo convesso r^r′ formato dalle due rette

(d) Dopo aver verificato che le rette r ed r′ sono sghembe, determinare equazioni cartesiane della retta s incidente e perpendicolare alle rette r ed r′.

(e) Determinare le coordinate cartesiane dei punti N ed N′ ottenuti, rispettivamente, intersecando la retta s con la retta r e con la retta r′ e dedurne la distanza d(r,r′) delle due rette r ed r′.

Soluzione

(a) I punti P_0, P_1 e P_2 risultano allineati se i vettori geometrici rappresentati dai segmenti orientati P_0P_1 e P_0P_2 sono linearmente dipendenti. Tali vettori hanno coordinate, rispettivamente, (-2-h,2-h,-2) e (2-h,-2,2+h). Si trova facilmente che tali vettori sono linearmente dipendenti per h=0 e quindi i punti P_0, P_1 e P_2 risultano allineati per h=0. Per h=0 si ha $P_0(1,-1,1)$, $P_1(-1,1,-1)$ e $P_2(3,-3,3)$. Essendo $P_0 \neq P_1$, la retta r generata dai punti allineati P_0, P_1 e P_2 può essere ottenuta come retta passante per P_0 e P_1. Equazioni, in forma di rapporti uguali, della retta r sono allora (x-1)/(-2)=(y+1)/2=(z-1)/(-2) e quindi equazioni cartesiane della retta r sono x-z=0, y+z=0.

(b) La retta generica passante per il punto P_0' ha equazioni, in forma di rapporti uguali, x/l′=(y-1)/m′=z/n′, dove i denominatori hanno il significato di parametri direttori della retta. Essendo (a,b,c)=(1,-1,0) i coefficienti di giacitura del piano p, la condizione di perpendicolarità tra r′ e p dà (l′,m′,n′)=(1,-1,0), Equazioni in forma di rapporti uguali di r′ sono allora x/1=(y-1)/(-1)=z/0 e quindi equazioni cartesiane di r′. sono x+y-1=0, z=0,

(c) Essendo (1,-1,1) parametri direttori della retta r, si ha che i due versori della retta r sono (i-j+k)/(±√3). La condizione sulla retta r di essere orientata verso il basso, ossia secondo le z decrescenti, implica che sia negativa la terza coordinata del versore e quindi a denominatore va scelto il segno -. Risulta allora versr=(i-j+k)/(-√3)=(-i+j-k)/(√3). Analogamente, essendo (1,-1,0) parametri direttori della retta r′, e quindi (i-j)/(±√2) i due versori della retta r′, imponendo che la retta r′ sia orientata secondo le y decrescenti si ha che deve essere negativa la seconda coordinata del versore. Ciò implica che a denominatore va scelto il segno +, onde è versr′=(i-j)/(√2). Risulta in definitiva cos r^r′=versr×versr′=-2/√6, dove con × si indica, come di consueto, il prodotto scalare ordinario dello spazio dei vettori geometrici.

(d) La matrice quadrata A del quarto ordine associata alle equazioni delle due rette r ed r′, ossia che ha come righe $A^{(1)}$=(1,0,-1,0), $A^{(2)}$=(0,1,1,0), $A^{(3)}$=(1,1,0,-1), $A^{(4)}$=(0,0,1,0), ha determinante uguale a -4≠0 e quindi le rette r ed r′ sono sghembe. Essendo w(1,-1,1) e w′(1,-1,0) vettori direttori rispettivamente di r ed r′, si ha che un vettore direttore della retta s è dato $w \wedge w'=i+j$, La retta s può essere ottenuta come intersezione del piano q passante per il punto P_0 ed avente come giacitura $W=Span(w,w\wedge w')$ e del piano q′ passante per il punto P_0' ed avente come giacitura $W'=Span(w',w\wedge w')$. Si trova facilmente che è q::x-y-2z=0 e q′:z=0 e quindi equazioni cartesiane di s sono, per esempio, x-y-2z=0, z=0.

(e) Essendo $x=1+t$, $y=-1-t$, $z=1+t$, $t\in \boldsymbol{R}$, equazioni parametriche di r, andando a sostituire tali equazioni parametriche nelle equazioni cartesiane di s si ha che il punto N si ottiene per t=-1. Si ha allora N(0,0,0), ossia N=O. Procedendo in modo analogo per N′, si ha che, essendo $x=t'$, $y=1-t'$, $z=0$, $t'\in \boldsymbol{R}$, equazioni parametriche di r′, risulta N′(1/2,1/2,0). Si ha infine $d(r,r')=d(N,N')=(1/4+1/4)^{1/2}=1/\sqrt{2}$.

2. <u>Spazio vettoriale reale</u> V <u>di dimensione quattro dotato di prodotto scalare</u> < , ><u>.</u> Base ortonormale $B_V=(u_1,u_2,u_3,u_4)$. Siano assegnati i vettori $v_1=u_1-u_2$, $v_2=u_1-u_3$, $v_3=u_2$, $v_4=u_4$ ed il sottospazio vettoriale $U;x_1-x_2+x_3=0,\ x_1+x_2-x_3=0,\ x_4=0$.

(a) Verificare che i vettori v_1,v_2,v_3,v_4 costituiscono una base di V e dire se essa è o non è ortogonale rispetto al prodotto scalare < , >, giustificando la risposta.

(b) Determinare una base $B_V'=(u_1',u_2',u_3',u_4')$ di V, ortonormale rispetto al prodotto scalare < , >, ottenuta applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base (v_1,v_2,v_3,v_4) .

(c) Determinare la matrice non singolare del cambiamento di basi nel passaggio dalla base B_V alla base B_V' e dire di che tipo è tale matrice, giustificando la risposta.

(d) Determinare equazioni cartesiane ed una base del sottospazio vettoriale $W=U^{\perp}$.

(e) Determinare il vettore $S_W(v)$ simmetrico del vettore v(1,1,1,1) nella simmetria ortogonale rispetto a W.

Soluzione

(a) La matrice che ha come colonne le colonne delle coordinate dei vettori v_1,v_2,v_3,v_4 ha determinante uguale a $1\neq 0$, quindi tali vettori sono linearmente dipendenti e, siccome il loro numero uguaglia la dimensione di V, si ha che essi costituiscono una base di V; Risulta $\langle v_1,v_2\rangle=1\neq 0$, $\langle v_1,v_3\rangle=-1\neq 0$, $\langle v_1,v_4\rangle=0$, $\langle v_2,v_3\rangle=0$, $\langle v_2,v_4\rangle=0$, $\langle v_3,v_4\rangle=0$ e quindi la base (v_1,v_2,v_3,v_4) non è ortogonale.

(b) Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base (v_1,v_2,v_3,v_4) si ha la base ortogonale (w_1,w_2,w_3,w_4), essendo $w_1=,v_1=u_1-u_2$, $w_2=v_2-(\langle v_2,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1=v_2-(\langle v_2,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1=-(1/2)v_1+v_2$, $w_3=v_3-(\langle v_3,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_3,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2=v_3-(\langle v_3,v_1\rangle/\langle v_1,v_1\rangle)v_1-(\langle v_3,-(1/2)v_1+v_2\rangle/\langle-(1/2)v_1+v_2,-(1/2)v_1+v_2\rangle)((1/2)v_1+v_2)=(2/3)v_1+(1/3)v_2+v_3$, $w_4=v_4-(\langle v_4,w_1\rangle/\langle w_1,w_1\rangle)w_1-(\langle v_4,w_2\rangle/\langle w_2,w_2\rangle)w_2-(\langle v_4,w_3\rangle/\langle w_3,w_3\rangle)w_3=v_4$. Essendo poi $|w_1|^2=2$, $|w_2|^2=3/2$, $|w_3|^2=1/3$, $|w_4|^2=1$, si ha che i vettori $u_1'=w_1/|w_1|=(1/\sqrt{2})v_1$, $u_2'=w_2/|w_2|=-(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))v_1+(\sqrt{2}/\sqrt{3})v_2$, $u_3'=w_3/|w_3|=(2\sqrt{3}/3)v_1-(\sqrt{3}/3)v_2+(\sqrt{3})v_3$ e $u_4'=w_4/|w_4|=v_4$ costituiscono una base ortonormale B_V' di V del tipo richiesto.

(c) Andando a sostituire le espressioni $v_1=u_1-u_2$, $v_2=u_1-u_3$, $v_3=u_2$, $v_4=u_4$ in u_1', u_2' ,u_3', u_4', si ha $u_1'=(1/\sqrt{2})u_1-(1/\sqrt{2})u_2$, $u_2'=(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))u_1+(\sqrt{2}/(2\sqrt{3}))u_2-(\sqrt{2}/\sqrt{3})u_3$,
$u_3'=(\sqrt{3}/3)u_1+(\sqrt{3}/3)u_2+(\sqrt{3}/3)u_3$, $u_4'=u_4$. Allora la matrice del cambiamento di basi nel passaggio dalla base B_V alla base B_V' è la matrice C avente come righe
$C^{(1)}=(1/\sqrt{2},\sqrt{2}/(2\sqrt{3}),1/\sqrt{3},0)$, $C^{(2)}=(-1/\sqrt{2},\sqrt{2}/(2\sqrt{3}),1/\sqrt{3},0)$, $C^{(3)}=(0,-\sqrt{2}/\sqrt{3},1/\sqrt{3},0)$,
$C^{(4)}=(0,0,0,1)$, Tale matrice è ortogonale perché le basi B_V e B_V' sono entrambe ortonormali.

(e) L'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo che rappresenta U è $S_O=\{t(0,1,1,0) \mid t\in \boldsymbol{R}\}$ e quindi risulta $U=\{t(u_2+u_3) \mid t\in \boldsymbol{R}\}$, onde U è una retta vettoriale e una base di U è costituita dal solo vettore $u=u_2+u_3$, Allora $W=U^{\perp}$.è l'iperpiano vettoriale ortogonale al vettore u e quindi ha equazione cartesiana $x_2+x_3=0$. Una base di W è, per esempio, quella costituita dai vettori $w_1'=u_1$, $w_2'=-u_2+u_3$, $w_3'=u_4$.
<u>Altra soluzione.</u> I vettori $v_1'=u_1-u_2+u_3$, $v_2'=u_1+u_2-u_3$, $v_3'=u_4$, ortogonali rispettivamente agli iperpiani rappresentati dalla prima, dalla seconda e dalla terza equazione cartesiana che costituiscono il sistema lineare omogeneo che rappresenta U, sono un sistema di generatori di $W=U^{\perp}$. Si verifica facilmente che tali vettori sono linearmente indipendenti e quindi essi formano una base di $W=U^{\perp}$. Usando tale base si perviene poi alla suddetta equazione cartesiana di $W=U^{\perp}$.
(e) Essendo W un iperpiano vettoriale ed u una base di $U=W^{\perp}$. si ha $S_W(v)=v-2P_U(v)=v-2(\langle v,u\rangle/\langle u,u\rangle)u=u_1+u_2+u_3+u_4-2(\langle u_1+u_2+u_3,u_2+u_3\rangle/\langle u_2+u_3,u_2+u_3\rangle)(u_2+u_3)=$ $u_1+u_2+u_3+u_4-2(u_2+u_3)=u_1-u_2-u_3+u_4$.