ESAME DI GEOMETRIA Per FISICI (Canale B)
(Corso del Prof. R. MAZZOCCO)
Testi e soluzioni della prova scritta del 16–2-2010

1. Spazio euclideo ordinario E. RC(O;i,j,k). Siano assegnati il piano p:x-2y+z-1=0, il punto $P_0(0,0,1)\in p$ e le rette r_1:x=0, y+z=0 ed r_2:x+y+z-3=0, x-y=0.

(a) Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per P_0 e perpendicolare al piano p.

(b) Scrivere equazioni cartesiane del fascio *F* di rette, sul piano p, avente come centro il punto P_0.

(c) Verificare che le rette r_1 ed r_2 sono sghembe.

(d) Scrivere equazioni cartesiane della retta r incidente e perpendicolare alle rette r_1 ed r_2.

(e) Detta s la retta generica del fascio *F*, studiare la mutua posizione delle rette r ed s al variare di s in *F*.

Soluzione

(a) La retta richiesta, dovendo essere perpendicolare al piano p, ha parametri direttori proporzionali ai coefficienti di giacitura di p, quindi sue equazioni in forma di rapporti uguali sono x/1 = y/(-2) = (z-1)/1 e sue equazioni cartesiane sono x-z+1=0, y+2z-2=0.

(b) Il fascio *F* di rette, su p, di centro P_0 può essere ottenuto come intersezione con il piano p del fascio di piani avente come asse la retta di cui al punto (a). Un'equazione cartesiana di tale fascio di piani è, per esempio, x-z+1+h(y+2z-2)=0, essendo h un parametro reale. Allora equazioni cartesiane del fascio *F* di rette sono x-z+1+h(y+2z-2)=0, x-2y+z-1=0, ossia x+hy+(2h-1)z+1-2h=0, x-2y+z-1=0.

(c) Si verifica facilmente che, considerata la matrice del quarto ordine A avente come righe $A^{(1)}$=(1,0,0,0), $A^{(2)}$=(0,1,1,0), $A^{(3)}$=(1,1,1,-3), $A^{(4)}$=(1,-1,0,0), risulta det(A)=3 e quindi, essendo det(A)≠0, le rette r_1 ed r_2 sono sghembe.

(d) Iniziamo con l'osservare che le rette r_1 ed r_2 passano, per esempio, rispettivamente per i punti $P_1(0,0,0)\equiv O$ e $P_2(1,1,1)$. Inoltre si ha subito che $(l_1,m_1,n_1)=(0,1,-1)$ sono parametri direttori della retta r_1 e $(l_2,m_2,n_2)=(1,1,-2)$ sono parametri direttori della retta r_2. Detti w_1 e w_2 i vettori direttori, rispettivamente di r_1 e r_2, aventi come coordinate tali terne di parametri direttori, si ha che un vettore direttore della retta r incidente e perpendicolare alle rette r_1 e r_2 è $w=w_1\wedge w_2=-i-j-k$ onde parametri direttori di r sono (-1,-1,-1). Allora, tenuto presente che la retta r può essere ottenuta come intersezione del piano p_1 passante per P_1 ed avente come giacitura Span(w_1,w) e del piano p_2 passante per P_2 ed avente come giacitura Span(w_2,w), risultando p_1:2x-y-z=0 e p_2:x-y=0 si ha che equazioni cartesiane di r sono 2x-y-z=0, x-y=0.

(e) La matrice del quarto ordine A avente come righe $A^{(1)}=(2,-1,-1,0)$, $A^{(2)}=(1,-1,0,0)$, $A^{(3)}=(1,h,2h-1,1-2h)$, $A^{(4)}=(1,-2,1,-1)$, costruita a partire dalle equazioni cartesiane della retta r e dalle equazioni cartesiane della retta generica s del fascio F, ha determinante uguale a 3h. Pertanto le rette r ed s sono sghembe per $h\neq 0$ e incidenti per h=0. Per h=0 equazioni cartesiane di s sono $x-z+1=0$, $x-2y+z-1=0$. La retta s ha allora parametri direttori $(l,m,n)=(1,1,1)$ e quindi tale retta, avendo parametri direttori opposti dei parametri direttori della retta r, è parallela alla retta r. Osservato poi che il punto P_1 appartiene ad r ma non ad s, si ha che r ed s non coincidono e quindi sono rette parallele e disgiunte. Resta da esaminare il caso in cui la retta s coincide con la retta di equazioni cartesiane $y+2z-2=0$, $x-2y+z-1=0$, che, pur appartenendo al fascio F, non può essere rappresentata dalle equazioni cartesiane $x-z+1+h(y+2z-2)=0$, $x-2y+z-1=0$. La matrice del quarto ordine costruita come sopra a partire dalle equazioni cartesiane di r ed s in questo caso ha determinante uguale a 3 e quindi le rette r ed s sono sghembe.

2. Piano vettoriale euclideo V. Base ortonormale $B=(v_1,v_2)$ Sia assegnato l'endomorfismo $F:V\to V$, definito da $F(v)=(x_1-3x_2)v_1+(-3x_1+x_2)v_2$, essendo $v=x_1v_1+x_2v_2$.

(a) Verificare che l'endomorfismo F è simmetrico.

(b) Determinare una base ortonormale di V costituita da autovettori rispetto ad F.

(c) Scrivere l'espressione di $b(v,w)$ rispetto alla base ortonormale B, essendo $b:V\times V\to \boldsymbol{R}$ la forma bilineare simmetrica reale associata all'endomorfismo simmetrico F e $w=y_1v_1+y_2v_2$.

(d) Scrivere la forma canonica metrica e la forma canonica affine della forma bilineare simmetrica reale b, precisando le basi a cui si fa riferimento.

(e) Scrivere la forma canonica affine della forma quadratica reale associata a b e determinare, se esiste, una base di V costituita da vettori isotropi rispetto a b.

Soluzione

(a) la matrice A associata all'endomorfismo F rispetto alla base B ha come righe $A^{(1)}=(1,-3)$ e $A^{(2)}=(-3,1)$. Essendo A una matrice simmetrica e B una base ortonormale si ha che l'endomorfismo F è simmetrico.

(b) L'equazione caratteristica di F è $(1-\lambda)^2-9=0$ e quindi gli autovalori di F sono $\lambda_1=4$ e $\lambda_2=-2$. L'autospazio V_4, associato all'autovalore $\lambda_1=4$, ha equazioni cartesiane $-3x_1-3x_2=0$, $-3x_1-3x_2=0$ e quindi risulta $V_4=\{t(v_1-v_2)\}_{t\in \boldsymbol{R}}$. Risulta poi $V_{-2}:3x_1-3x_2=0$, $-3x_1+3x_2=0$ e quindi $V_{-2}=\{t(v_1+v_2)\}_{t\in \boldsymbol{R}}$. Una base ortonormale di V_4 è costituita, per esempio, dal solo autovettore unitario $v_1'=(1/\sqrt{2})v_1-(1/\sqrt{2})v_2$ mentre una base ortonormale di V_{-2} è costituita, per esempio, dal solo autovettore unitario $v_2'=(1/\sqrt{2})v_1+(1/\sqrt{2})v_2$. Gli autovettori v_1' e v_2', essendo associati ad autovalori distinti, sono ortogonali e quindi $B'=(v_1',v_2')$ è una base del tipo richiesto.

(c) La matrice associata alla forma bilineare simmetrica reale b:$V\times V\to \boldsymbol{R}$, rispetto alla base ortonormale B, coincide con la matrice simmetrica A associata all'endomorfismo simmetrico F rispetto alla stessa base. Pertanto risulta $b(v,w)=x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+x_2y_2$.

(d) Essendo $B'=(v_1',v_2')$ una base ortonormale di V costituita da autovettori rispetto ad F, si ha che rispetto a tale base la forma bilineare simmetrica reale b, associata all'endomorfismo simmetrico F, assume la seguente forma canonica metrica: $b(v,w)=4x_1'y_1'-2x_2'y_2'$, dove (x_1',x_2') e $(y_1'y_2')$ sono le coordinate rispettivamente di v e w nella base B'. Considerata la base ortogonale $B''=(v_1'',v_2'')$, essendo $v_1''=(1/2)v_1'=(1/2\sqrt{2})v_1-(1/2\sqrt{2})v_2$ e $v_2''=(1/\sqrt{2})v_1'=(1/2)v_1+(1/2)v_2$, si ha che rispetto a tale base la b assume la seguente forma canonica affine: $b(v,w)=x_1''y_1''-x_2''y_2''$, dove (x_1'',x_2'') e $(y_1''y_2'')$ sono le coordinate rispettivamente di v e w nella base B''.

(e) La forma canonica affine della forma quadratica reale q:$V\to \boldsymbol{R}$ associata a b è data da $q(v)=(x_1'')^2-(x_2'')^2$, essendo come sopra (x_1'',x_2'') le coordinate di v rispetto alla base B''. I vettori isotropi rispetto a b si ottengono ponendo $q(v)=0$. Pertanto l'equazione cartesiana dell'insieme dei vettori isotropi è $(x_1'')^2-(x_2'')^2=0$. Risolvendo tale equazione, si ha che una coppia di vettori isotropi indipendenti è data, per esempio, da $w_1(x_1''=1,x_2''=1)$ e $w_2(x_1''=1,x_2''=-1)$. Essendo 2 la dimensione di V, si ha che tale coppia di vettori isotropi è una base di V.